I 21781

2022

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

APARE LA 15 A FIECĂREI LUNI

VOLUMUL XXVIII.

ANUL 1948—1949.

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

TIMIȘOARA
INSTITUT DE ARTE GRAFICE „GH. HALMAGEANU"

1999

80

JAN 2014

I 24781

ANUL XXVIII. MARTIE 1948. No. 1.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA
PREȚUL ABONAMENTULUI ESTE 300 LEI ANUAL PENTRU PARTICULARI
ȘI 600 LEI PENTRU INSTITUȚII
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRĂINĂTATE ESTE DE 600 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. COMITETUL DE COLABORARE AL R. M. T.
2. **V. ALACI:** O METODA PENTRU A CONSTRUI ANUMITE CLASE DE FUNCTII CARE AU ACEIASI DERIVATA.
3. **E. ARGHIRIADE:** ASUPRA TEOREMEI LUI TERQUEM.
4. INSTIINTARE.
5. NOTA MATEMATICA 1.
6. BIBLIOGRAFIE.
7. PROBLEME REZOLVATE: 1756, 1693, 2361, 2372, 2397, 2451, 2544, 2555, 2571, 2574.
8. PROBLEME PROPUSE: 2595-2604.
9. INFORMATII.

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

„Tipografia Românească", Timișoara.
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931

2469.

„Orice profesor de matematici, din orice colț al țării și de la orice școală, trebue să fie apostol al specialității sale. Din felul cald și luminos cum își face lecțiile, din drumul drept și demn pe care îl urmează în viață, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă și sigură, curată ca cristalul, are o înaltă și admirabilă valoare educativă pentru viață.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieței noastre. Aceasta să fie contribuția specialității noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ȚIȚEICA

Începând cu acest număr face parte din Comitetul de Colaborare și D-ra Prof. *Checian Ana* (Colegiul Diaconovîci Loga, Timișoara).

Anunțăm cu bucurie primirea a 18 abonamente din partea Cercului Științific al liceului de fete din Caransebeș de sub conducerea D-nei Prof. Constanța Loziciu.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara, conținând articole, note, probleme propuse și rezolvate, vor fi trimise pe adresa: Prof. V. Alaci, Politehnica, Timișoara.

Administrația revistei aduce la cunoștința generală următoarele:

1. Abonamentul pe anul XXVIII (15 Martie 1948 — 15 Februarie 1949) este 300 lei pentru particulari și 600 pentru instituții.

2. Taxa de membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timișoara" este de 200 lei.

3. Volumele I, XXIII, XXV, XXVI și XXVII sunt epuizate. Celelalte volume broșate se găsesc de vânzare cu prețul de 300 lei fiecare. La această sumă se va adăoga 50 lei costul expediției. In caz că se comandă mai multe volume se va adăoga la taxa de 26 lei pentru recomandat, câte 20 lei pentru fiecare volum.

4. Se găsesc de vânzare numere izolate din colecție chiar din volumele epuizate. Prețul unu număr este de 30 lei la care se adaogă 2 lei expediția. Din vol. XXVII se găsesc de vânzare no 1, 4—12.

5. Se primesc reclamații că se pierde revista prin poștă. Aceste reclamații sunt adunate în ordinea sosirii lor și vor fi sătisfăcute la 15 Februarie 1948 când se vor vedea ce numere rămân descomplectate după legarea volumelor întregi. Orice reclamație de pierderea unui număr nu este luată în seamă decât la o lună dela data apariției acelui număr.

6. Tot ce privește administrația se va adresa D-lui Prof. **Gh. Th. Gheorghiu** str. Voltaire Nr. 1, Timișoara I. Reclamațiile ce necesită răspuns vor fi însoțite de o carte poștală timbrată legal.

7. Orice sumă destinată revistei se poate trimite prin CEC sub contul n-rul 85208 sau prin mandat postal D-lui Prof. **Gh. Th. Gheorghiu** pe adresa de mai sus.

ANUL XXVIII — No 1. TIMISOARA, MARTIE 15

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

Prețul abonamentului este 300 lei pentru particulari și 600 lei pentru instituții.
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. GH. TH. GHEORGHIU
Timișoara I, Str. Voltaire, No. 1.

Revista Matematică din Timișoara (R. M. T.) apare cu colaborarea următorului comitet*)

1. *Alaci V.*, profesor P. T.
2. *Anastasiade I.*, profesor onorar P. T.
3. *Anițescu N. N.*, profesor secundar, Tg. Jiu
4. *Andronescu Pl.* profesor P. T.
5. *Angheluță Th.*, profesor onorar Universitatea Cluj.
5. *Arghiriade Em.*, conferențiar P. T.
7. *Baidaff B. I.*, profesor Buenos Aires.
8. *Bădescu R.*, profesor Politehnica București.
9. *Bakony C.*, profesor onorar P. T.
10. *Bănărescu M.*, profesor P. T.
11. *Bârglăzan A.*, profesor P. T.
12. *Bonea I.*, profesor P. T.
13. *Botez M.*, conferențiar Politehnica Iași.
14. *Buicliu Gh.*, general de artilerie, București.
15. *Călniceanu C.*, conferențiar P. T.
16. *Călugăreanu G.*, profesor Universitatea Cluj.
17. *Cândea C.*, profesor P. T.
18. *Cătuneanu C.*, profesor P. T.
19. *Chiriac C.*, lt. comandor, Brăila.
20. *Ciobanu V.*, inginer U. D. R., Anina
21. *Claudian V.*, profesor secundar, București.
22. *Coman A.*, conferențiar onorar P. T.
23. *Constantinescu Gh. Gh.*, asistent Politehnica București.
24. *Coșniță C.*, profesor secundar, București.
25. *Costăchescu V. C.*, căp. comandor. Constanța.
26. *Cristescu I.*, profesor onorar P. T.
27. *Curea I.*, profesor P. T.
28. *Dăscălescu Hr.*, profesor secundar R. Sărat.
29. *Dimitriu G.*, conferențiar P. T.
30. *Domide Em.*, inginer U. D. R., Anina.
31. *Dumitrescu Gh.*. profesor secundar, București.
32. *Gheorghiu Th. Gh.*, profesor P. T.
33. *Gheorghiu V.*, conferențiar P. T.
34. *Ghițescu Sp.*, profesor secundar, București.
35. *Ghițescu V.* profesor secundar, Brașov.
36. *Gloden A.*, profesor Luxemburg.
37. *Herman V.*, profesor secundar Reșița.
38. *Iacob St. E.*, lt. colonel, Galați.
39. *Ionescu Biss P. H.*, profesor secundar București.
40. *Ionescu Bujor C.*, profesor secundar, București,
41 *Ionescu D. V.*, profesor Universitatea Cluj.
42. *Ionescu Țiu D. C.*, lt colonel, București.
43. *Ivănescu C.*, profesor secundar, Târgoviște.
44. *Lațiu V.*, profesor P. T.
45. *Liteanu Gh.*, general de artilerie, București.
46 *Loziciu I.*, profesor secundar, Caransebeș.
47. *Lupan A.*, profesor onorar P. T.
48. *Maior N.* profesor P. T.
49. *Mardan D.*, profesor onorar P. T.
50. *Mateescu S.*, profesor onorar P. T.
51. *Mateiu A.*, profesor secundar, Cluj.
52. *Mățieș V. I.*, profesor secundar, Cluj.
53. *Mihăileanu N. N.*, profesor secundar, București.
54. *Mioc V.*, profesor secundar, Timișoara.
55. *Mirescu P.*, profesor secundar București.
56. *Murariu P.*, profesor secundar, Timișoara.
57. *Murgulescu El.*, asistentă P. T.
58. *Murgulescu G. I.*, profesor P. T.
59. *Musta Șt.*, profesor secundar, Beiuș.
60 *Nadașan Șt.*, profesor P. T.
61. *Nemeth I.*, profesor secundar, Timișoara.
62. *Nicolau A.*, profesor onorar P. T.
63. *Nicolau P.*, profesor onorar P. T.
64. *Oltenschi I.*, profesor P. T.
65. *Patriciu V.*, profesor P. T.
66. *Petrescu A.*, profesor secundar, Craiova.
67. *Poboran V.*, profesor P. T.
68. *Popescu I.*, profesor onorar P. T.
69 *Popescu C.*, profesor secundar, Roșiori de Vede.
70. *Popescu Văleni I.*, inginer U. D. R., Anina.
71. *Porumb N.*, conferențiar P. T.
72. *Propst I.*, inginer U. D. R., Anina.
73 *Rădulet R.*, profesor P. T.
74. *Roth R. E.*, asistent P. T.
75. *Sauciuc L.*, conferențiar P. T.
76. *Schileru I.*, profesor P. T.
77. *Sergescu P.*, profesor Politehnica București

*) Cei ce doresc să facă parte din acest comitet, având titlul de doctor sau licențiat în matematici, inginer sau ofițer din arme speciale, se vor adresa administrației revistei printr'o cerere în care să se oblige că va plăti cotizația de membru anuală. Cei ce nu-și respectă această obligație timp de doi ani sunt șterși din această listă.

Fac parte de drept din acest comitet profesorii și conferențiarii definitivi ai Politehnicei din Timișoara (P. T.) care sunt scutiți de a plăti cotizația de membru.

Adresa membrilor se poate obține dela administrația revistei.

78. *Simionescu D. Gh.*, inspector şcolar, Bucureşti.
79. *Stamate I. I.*. asistent Universitatea Cluj.
80. *Sfan A.*. lt. colonel, Bucureşti.
81. *Stăncescu C.*, profesor onorar P. T.
82. *Stănescu D.*, director U. D. R., Reşiţa.
83. *Stoicescu L.*, profesor P. T.
84. *Teodosiu A.*, profesor onorar P. T.
85. *Ţino O.*, profesor onorar P. T.
86. *Trufin E.*, conferenţiar P. T.
87. *Turcu V.*, profesor secundar, Timişoara.
88. *Vâlcovici V.*, profesor Universitatea, Bucureşti.
89. *Vasu V.*, profesor secundar, Sibiu.
90. *Viciu A.*, profesor secundar, Cluj.
91. *Vişa E.*, profesor secundar, Timişoara.
92. *Vlad I. V.*, profesor P. T.
93. *Vlădescu I.*, profesor P. T.
94. *Zăgănescu I.*, profesor P. T.
95. *Zapan Gr.*, general de aeronautică, Bucureşti.
96. *Zbegan V.*, conferenţiar P. T.

O METODĂ PENTRU A CONSTRUI ANUMITE CLASE DE FUNCŢII CARE AU ACEIAŞI DERIVATĂ.

DE

V. ALACI

Vom da o metodă simplă de a construi funcţii cuprinzând funcţii trigonometrice inverse, care au aceiaşi derivată.

1. *Fie funcţiile*

$$(1)\qquad \begin{cases} u = a\varphi \\ v = b\psi + c\left(\dfrac{a\varphi - b\psi}{c} + \theta\right), \end{cases}$$

unde a, b, c, θ sunt constante, iar φ şi ψ sunt funcţii anumite de variabila x, pe care le vom preciza.

Conform ipotezei, rezultă că u şi v sunt funcţii de variabila x.

Cum însă diferenţa lor este constantă, fiindcă

$$v - u = c\,\theta,$$

deducem că u şi v au aceiaşi derivată.

Să luăm pentru φ şi ψ funcţiile

$$(2)\qquad \varphi = \operatorname{arc\,tg} X,\quad \psi = \operatorname{arc\,tg} Y,$$

presupunând X şi Y funcţii oarecare de variabila x şi să definim constanta θ prin relaţia

$$(3)\qquad e^{2i\theta} = k,\quad (i = \sqrt{-1}).$$

Folosim acum următorul artificiu: În adevăr, observăm întâi că putem scrie

$$\frac{a\varphi - b\psi}{c} + \theta = \operatorname{arc\,tg}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{a\varphi - b\psi}{c} + \theta\right)\right].$$

Dar formulele lui *Euler* ne permit a înlocui tangenta în funcţie de exponenţiale, astfel că putem scrie succesiv:

$$\frac{a\varphi - b\psi}{c} + \theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{i}\,\frac{e^{i\left(\frac{a\varphi - b\psi}{c} + \theta\right)} - e^{-i\left(\frac{a\varphi - b\psi}{c} + \theta\right)}}{e^{i\left(\frac{a\varphi - b\psi}{c} + \theta\right)} + e^{-i\left(\frac{a\varphi - b\psi}{c} + \theta\right)}},\qquad (i = \sqrt{-1}),$$

sau

$$(4)\qquad \frac{a\varphi - b\psi}{c} + \theta = \operatorname{arc\,tg} i\,\frac{e^{-i\frac{a\varphi - b\psi}{c}} - e^{2i\theta}\,e^{i\frac{a\varphi - b\psi}{c}}}{e^{-i\frac{a\varphi - b\psi}{c}} + e^{2i\theta}\,e^{i\frac{a\varphi - b\psi}{c}}}.$$

De altă parte din (2) rezultând

$$X = \operatorname{tg}\varphi,\quad Y = \operatorname{tg}\psi,$$

şi observând că putem deduce

$$(5)\qquad \begin{aligned} 1 - iX &= 1 - i\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{e^{-i\varphi}}{\cos\varphi},\quad 1 - iY = \frac{e^{-i\psi}}{\cos\psi} \\ 1 + iX &= \frac{e^{i\varphi}}{\cos\varphi},\quad 1 + iY = \frac{e^{i\psi}}{\cos\psi}, \end{aligned}$$

din aceste relaţii rezultă cu uşurinţă:

$$(6)\qquad \begin{aligned} \sqrt[c]{(1 - iX)^a (1 + iY)^b} &= \frac{e^{-i\frac{a\varphi - b\psi}{c}}}{\cos^{\frac{a}{c}}\varphi\cos^{\frac{b}{c}}\psi}, \\ \sqrt[c]{(1 + iX)^a (1 - iY)^b} &= \frac{e^{i\frac{a\varphi - b\psi}{c}}}{\cos^{\frac{a}{c}}\varphi\cos^{\frac{b}{c}}\psi}. \end{aligned}$$

Scoţând de aci valorile exponenţialelor $e^{-i\frac{a\varphi - b\psi}{c}}$, $e^{i\frac{a\varphi - b\psi}{c}}$, apoi înlocuindu-le în relaţia (4) şi ţinând seamă şi de notaţia (3), obţinem după ce am simplificat factorul comun $\cos^{\frac{a}{c}}\varphi\cos^{\frac{b}{c}}\psi$:

$$(7)\qquad \frac{a\varphi - b\psi}{c} + \theta = \operatorname{arc\,tg} i\,\frac{\sqrt[c]{(1-iX)^a(1+iY)^b} - k\sqrt[c]{(1+iX)^a(1-iY)^b}}{\sqrt[c]{(1-iX)^a(1+iY)^b} + k\sqrt[c]{(1+iX)^a(1-iY)^b}}.$$

În fine, substituind acum în (1) valorile lui φ, ψ şi $\frac{a\varphi - b\psi}{c} + \theta$ din relaţiile (2) şi (7), găsim:

$$(8)\qquad \begin{cases} u = a\operatorname{arc\,tg} X, \\ v = b\operatorname{arc\,tg} Y + c\operatorname{arc\,tg} i\,\dfrac{\sqrt[c]{(1-iX)^a(1+iY)^b} - k\sqrt[c]{(1+iX)^a(1-iY)^b}}{\sqrt[c]{(1-iX)^a(1+iY)^b} + k\sqrt[c]{(1+iX)^a(1-iY)^b}}. \end{cases}$$

Am construit astfel o clasă formată din două funcţii u şi v de variabila x, ce conţin funcţii trigonometrice inverse, care au aceiaşi derivată.

Caz particular: Pentru $a=2$, $b=4$, $c=2$, $k=\frac{1}{2}$, $X=Y=x$, funcţiile u şi v din (8) devin:

$$(9)\qquad \begin{cases} u = 2\operatorname{arc\,tg} x \\ v = 4\operatorname{arc\,tg} x + 2\operatorname{arc\,tg} i\,\dfrac{1+3ix}{3+ix}, \quad (i=\sqrt{-1}). \end{cases}$$

Rezultă că funcţiile u şi v din (9) au aceiaşi derivată, ceiace se poate verifica şi prin derivare directă.

2. Generalizare. Mai general, putem considera funcţiile

$$(10)\qquad \begin{cases} u = a\varphi \\ v = \sum_{k=1}^{n} a_k\psi_k + c\left(\dfrac{a\varphi - \sum_{k=1}^{n} a_k\psi_k}{c} + \theta\right), \end{cases}$$

unde a, a_k, c şi θ sunt constante, iar φ, ψ_k sunt funcţii anumite de variabila x. Rezultă că u şi v sunt astfel funcţii de x, iar diferenţa lor fiind constantă, fiindcă

$$v - u = c\,\theta,$$

conchidem că ele au aceiaşi derivată.

Să luăm pentru φ şi ψ_k funcţiile,

$$(11)\qquad \varphi = \operatorname{arc\,tg} X, \quad \psi_k = \operatorname{arc\,tg} X_k,$$

X şi X_k fiind funcţii oarecare de variabila x şi definim pe θ prin relaţia

$$(12)\qquad e^{2i\theta} = A, \qquad (i=\sqrt{-1}).$$

Folosim acum acelaşi artificiu din cazul precedent, observând că putem scrie succesiv,

$$\frac{a\varphi - \sum_{k=1}^{n} a_k\psi_k}{c} + \theta = \operatorname{arc\,tg}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{a\varphi - \sum_{k=1}^{n} a_k\psi_k}{c} + \theta\right)\right]$$

$$= \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{i}\,\frac{e^{i\left(\frac{a\varphi - \sum_{k=1}^{n} a_k\psi_k}{c} + \theta\right)} - e^{-i\left(\frac{a\varphi - \sum_{k=1}^{n} a_k\psi_k}{c} + \theta\right)}}{e^{i\left(\frac{a\varphi - \sum_{k=1}^{n} a_k\psi_k}{c} + \theta\right)} - e^{-i\left(\frac{a\varphi - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k}{c} + \theta\right)}},$$

sau

$$(13)\qquad \frac{a\varphi - \sum_{k=1}^{n} a_k\psi_k}{c} + \theta = \operatorname{arc\,tg} i\,\frac{e^{-i\frac{a\varphi - \sum_{k=1}^{n} a_k\psi_k}{c}} - e^{2i\theta}e^{i\frac{a\varphi - \sum_{k=1}^{n} a_k\psi_k}{c}}}{e^{-i\frac{a\varphi - \sum_{k=1}^{n} a_k\psi_k}{c}} - e^{2i\theta}e^{i\frac{a\varphi - \sum_{k=1}^{n} a_k\psi_k}{c}}}.$$

De altă parte din (11) deducem

$$1 - iX = \frac{e^{-i\varphi}}{\cos\varphi}, \quad 1 - iX_k = \frac{e^{-i\psi_k}}{\cos\psi_k}, \quad 1 + iX = \frac{e^{i\varphi}}{\cos\varphi}, \quad 1 + iX_k = \frac{e^{i\psi_k}}{\cos\psi_k},$$

iar din aceste relaţii rezultă cu uşurinţă,

$$\sqrt[c]{(1-iX)^a\prod_{k=1}^{n}(1+iX_k)^{a_k}}=\frac{e^{-i\frac{a\varphi-\sum_{k=1}^{n}a_k\psi_k}{c}}}{\cos^{\frac{a}{c}}\varphi\prod_{k=1}^{n}\cos^{\frac{a_k}{c}}\psi_k},\quad \sqrt[c]{(1+iX)^a\prod_{k=1}^{n}(1-iX_k)^{a_k}}=\frac{e^{i\frac{a\varphi-\sum_{k=1}^{n}a_k\psi_k}{c}}}{\cos^{\frac{a}{c}}\varphi\prod_{k=1}^{n}\cos^{\frac{a_k}{c}}\psi_k}.$$

Scoţând de aci valorile exponenţialelor şi înlocuindu-le în relaţia (13), ţinând seamă şi de notaţia (12), obţinem după ce simplificăm cu factorul comun $\cos^{\frac{a}{c}}\varphi\prod_{k=1}^{n}\cos^{\frac{a_k}{c}}\psi_k$,

$$(14)\qquad \frac{a\varphi-\sum_{k=1}^{n}a_k\psi_k}{c}+\theta=\operatorname{arc\,tg} i\,\frac{\sqrt[c]{(1-iX)^a\prod_{k=1}^{n}(1+iX_k)^{a_k}}-A\sqrt[c]{(1+iX)^a\prod_{k=1}^{n}(1-iX_k)^{a_k}}}{\sqrt[c]{(1-iX)^a\prod_{k=1}^{n}(1+iX_k)^{a_k}}+A\sqrt[c]{(1+iX)^a\prod_{k=1}^{n}(1-iX_k)^{a_k}}}.$$

În fine, substituind în (10) pe φ, ψ_k, $\frac{a\varphi-\sum_{k=1}^{n}a_k\psi_k}{c}+\theta$, date de relaţiile (11) şi (14), găsim

$$(15)\qquad \begin{cases} u=a\operatorname{arc\,tg}X \\ v=\sum_{k=1}^{n}a_k\operatorname{arc\,tg}X_k+c\operatorname{arc\,tg}i\,\dfrac{\sqrt[c]{(1-iX)^a\prod_{k=1}^{n}(1+iX_k)^{a_k}}-A\sqrt[c]{(1+iX)^a\prod_{k=1}^{n}(1-iX_k)^{a_k}}}{\sqrt[c]{(1-iX)^a\prod_{k=1}^{n}(1+iX_k)^{a_k}}+A\sqrt[c]{(1+iX)^a\prod_{k=1}^{n}(1-iX_k)^{a_k}}} \end{cases}.$$

Am construit astfel o clasă mai generală de două funcţii u şi v de variabila x, ce conţin funcţii trigonometrice inverse, care au aceiaşi derivată.

Caz particular. Pentru

$$a=a_k=c=A=1,\quad X=X_k=ix,$$

funcţiile u şi v din (13) devin după unele simplificări

$$(16)\qquad \begin{cases} u=a\operatorname{arctg}X \\ v=n\operatorname{arc\,tg}ix+\operatorname{arc\,tg}i\,\dfrac{(1-x)^{n-1}-(1+x)^{n-1}}{(1-x)^{n-1}+(1+x)^{n-1}} \end{cases}.$$

$(i=\sqrt{-1},\ n$ întreg $>0)$

Rezultă că funcţiile u şi v din (16) au aceiaşi derivată, ceiace se poate verifica şi prin derivare directă.

3. Analog, putem proceda şi cu alte funcţii trigonometrice inverse. Fie astfel funcţiile,

$$(\ldots)\qquad \begin{cases} u=a\varphi \\ \ldots=b\psi+c\left(\dfrac{a\varphi-b\psi}{c}+\theta\right), \end{cases}$$

… sunt constante, iar φ şi ψ funcţii …bila x.

…$=c\theta$ (constant),

rezultă că u şi v au aceiaşi derivată.

Să luăm

$$18)\qquad \varphi=\arcsin X,\quad \psi=\arcsin Y,$$

X şi Y fiind funcţii oarecare de variabila x şi să definim pe θ prin relaţia

$$(19)\qquad e^{i\theta}=A.$$

Observăm apoi că putem scrie

$$(20)\qquad \frac{a\varphi-b\psi}{c}+\theta=\arcsin\left[\sin\left(\frac{a\varphi-b\psi}{c}+\theta\right)\right]=\arcsin\frac{e^{i\left(\frac{a\varphi-b\psi}{c}+\theta\right)}-e^{-i\left(\frac{a\varphi-b\psi}{c}+\theta\right)}}{2i}.$$

Dar din (17) deducând

$$X=\sin\varphi,\quad Y=\sin\psi,$$

rezultă că avem şi relaţiile

$$\sqrt{1-X^2}\pm iX=e^{\pm i\varphi},\quad \sqrt{1-Y^2}\pm iY=e^{\pm i\psi},\quad (i=\sqrt{-1})$$

şi prin urmare

$$\sqrt[c]{\left(\sqrt{1-X^2}\pm iX\right)^a\left(\sqrt{1-Y^2}\mp iY\right)^b}=e^{\pm i\frac{a\varphi-b\psi}{c}}.$$

Atunci relaţia (20) devine

$$(21)\quad \frac{a\varphi - b\psi}{c} + \theta = \arcsin \frac{A^2 \sqrt[c]{\left(\sqrt{1-X^2}+iX\right)^a \left(\sqrt{1-Y^2}-iY\right)^b} - \sqrt[c]{\left(\sqrt{1-X^2}-iX\right)^a \left(\sqrt{1-Y^2}+iY\right)^b}}{2iA}.$$

Substituind în (17) valorile din (18) şi (21), obţinem:

$$(22)\quad \begin{cases} u = a \arcsin X \\ v = b \arcsin Y + c \arcsin \dfrac{A^2 \sqrt[c]{\left(\sqrt{1-X^2}+iX\right)^a \left(\sqrt{1-Y^2}-iY\right)^b} - \sqrt[c]{\left(\sqrt{1-X^2}-iX\right)^a \left(\sqrt{1-Y^2}+iY\right)^b}}{2iA} \end{cases}$$

Rezultă că aceste funcţii u şi v ce depind de variabila x au aceiaşi derivată.

Caz particular. Pentru $a=2$, $b=4$, $c=3$, $A=1$, $X=Y=x$, funcţiile u şi v din (22), după unele simplificări, devin:

$$(23)\quad \begin{cases} u = 2 \arcsin x, \\ v = 4 \arcsin x + 3 \arcsin \dfrac{\sqrt[3]{\left(\sqrt{1-x^2}-ix\right)^2} - \sqrt[3]{\left(\sqrt{1-x^2}+ix\right)^2}}{2i} \end{cases} \qquad (i=\sqrt{-1})$$

Rezultă că funcţiile u şi v din (23) au aceiaşi derivată, ceeace se poate verifica direct şi prin derivare.

Observare. Am putea da o generalizare analoagă aceliea dela § 2, am putea de asemeni construi şi alte clase de funcţii u şi v care să conţine funcţii trigonometrice, luând de exemplu în (18)

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} X, \quad \psi = \arcsin Y$$

sau invers, sau altele, dar oprim acest articol spre a nu lua astfel o desvoltare prea mare. Relevăm încă, că aplicaţiile sunt numeroase.

ASUPRA TEOREMEI LUI TERQUEM

DE

E. ARGHIRIADE

1. În R. M. T. anul XXVII, Nr. 12, pag. 159–160, D-l prof. *M. Ghermănescu* generalizează unele proprietăţi ale cercului lui *Euler* la conica lui *Terquem* şi la conica celor 9 puncte. Reamintim că teorema lui *Terquem* are următorul enunţ: picioarele cevienelor a două puncte M şi M′ din planul unui triunghiu ABC, se găsesc pe o conică Γ(M,M′), iar conica celor 9 puncte a punctului M este conica care trece prin mijloacele laturilor triunghiului A B C, prin mijloacele segmentelor M A, MB, M C şi prin picioarele cevienelor punctului M, această conică fiind locul centrelor conicelor care trec prin punctele A, B, C, M.

D-l prof. *M. Ghermănescu* ia ca punct de plecare următoarea proprietate, pe care am publicat-o ca notă în G. M. XXVI 1920. pag. 173: „dreptele care unesc picioarele înălţimilor cu punctele în care medianele corespunzătoare sunt tăiate a doua oară de cercul lui *Euler*, sunt concurente într'un punct ω pe dreapta lui *Euler*". Să dăm mai întâi câteva sumare indicaţiuni bibliografice asupra acestei proprietăţi. Fără îndoială această proprietate nu e nouă şi a fost găsită desigur de mulţi alţi cercetători. Menţionăm că această proprietate a făcut obiectul problemei Nr. 3164 din *Gazeta Matematică*[1] propusă de d-l *M. I. Focşeneanu* care a adăogat că *punctul ω este isogonalul punctului lui Gergonne al triunghiului, ortic.* Imi amintesc că tot de această chestiune s'a mai ocupat ulterior un al treilea corespondent al G M. într'o problemă, pe care însă, căutând-o acum, n'am putut-o regăsi.

Deasemenea D-l prof. *Gh. Moisil*[2] pe când era elev de liceu, printre aplicaţiunile transformării prin puncte complementare generalizate, întrodusă de D-sa, a dat acestei proprietăţi următoarea generalizare: „Dacă $A_1, A_2, B_1 B_2, C_1 C_2$ sunt punctele unde un sistem de ceviene concurente şi conjugatele lor armonice, înţeapă o conică circumscrisă, dreptele $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ sunt concurente". În fine D-l prof. *Al. Niculescu*[3] s'a ocupat de această proprietate studiind o transformare omografică, care în esenţă se reduce la următoarea: fie M şi N punctele în care cercul circumscris A B C este

---

[1]) *Gazeta Matematică.* Vol XXIX. 1923—24. p. 319 şi XXX. p. 227.

[2]) *Gr. Moisil.* Teoreme asupra triunghiului. XXIX. 1923—4. pag. 161 şi 205 şi 281.

[3]) *Al. Niculescu.* G. M. XXXV 1929—30 O transformare geometrică şi aplicaţiile

tăiat de axa ortică, puncte prin care se ştie că trece şi cercul celor 9 puncte; omografia considerată este aceia care transformă punctele M şi N în punctele ciclice şi reciproc punctele ciclice în M şi N. Cercul circumscris se transformă tot în cercul circumscris şi acelaş lucru putem spune şi despre cercul celor nouă puncte; în această transformare medianele şi înălţimile schimbându-se între ele, demonstrarea proprietăţii în cauză este imediată şi D-l prof. *Al. Niculescu* precizează că *punctul ω de concurenţă al dreptelor care unesc picioarele înălţimilor cu punctele în care medianele corespunzătoare sunt tăiate de cercul celor nouă puncte, este polul axei ortice în raport cu cercul celor 9 puncte.* Ca o complectare a transformării D-lui prof. *Al. Niculescu* putem adăoga că deoarece orice cerc din fascicolul determinat de cercul circumscris şi cercul celor 9 puncte, se transformă tot într'un cerc, va rezulta că şi cercul conjugat, cercul ortocentroidal şi cercul ortoptic al celei de a doua elipsă a lui *Steiner*, care fac parte din acest fascicol[4]), se transformă tot în cercuri, dar pe câtă vreme cercul conjugat se transformă tot în cercul conjugat al figurii transformate, celelalte două cercuri deşi se transformă tot în cercuri aparţinând aceluiaşi fascicol, numai joacă acelaş rol pentru figura transformată.

2. Fie A_2, B_2, C_2 punctele în care cevienele punctului M″ sunt tăiate a doua oară de conica lui *Terquem* $\Gamma(M', M'')$. D-l prof. *M. Ghermănescu* în articolul citat, îşi propune problema de a determina în ce caz punctele A_2, B_2, C_2 sunt mijloacele segmentelor M″A, M″B, M″C şi găseşte că aceasta se întâmplă în două cazuri: sau când punctul $M' \equiv G$, sau când M″ este la infinit şi are coordonatele $\alpha'(\beta' - \gamma')$, $\beta'(\gamma' - \alpha')$, $\gamma'(\alpha' - \beta')$. D-l pr. *M. Ghermănescu* pentru problema care-l interesează pe D-sa, aceia a conicei celor 9 puncte, studiază numai primul caz. Ne propunem să studiem în articolul de faţă cazul al doilea. Vom stabili întâi o serie de teoreme preliminare şi apoi vom [a]borda studiul acestui caz în § 4. Deocamdată să [fa]cem două observaţii. Întâi că punctul M″ aparţine [co]nicei $\Gamma(M, M')$ şi deci acest caz este în le[gă]tură cu problema: *să se determine în ce caz*

[4]) *T. Lemoyne.* Courbes géométriques

conica lui Terquem $\Gamma(M, M')$ *trece printr'unul din punctele* M′ sau M″ şi a doua observaţie că coordonatele lui M″ date mai sus se pot scrie:

$$\frac{1}{\beta'} - \frac{1}{\gamma'}; \quad \frac{1}{\gamma'} - \frac{1}{\alpha'}; \quad \frac{1}{\alpha'} - \frac{1}{\beta'}$$

şi deci reprezintă punctul dela infinit al polarei trilineare a lui M′. Să mai observăm deasemenea că dacă aplicăm o proecţie conică, care aduce dreapta dela infinit la distanţa finită, cazului studiat de D-l prof. *M. Ghermănescu* ($M' \equiv G$), obţinem: *Punctele* A_2, B_2, C_2 *în care cevienele punctului* M″ *sunt tăiate a doua oară de conica lui Terquem* $\Gamma(M' M'')$ *sunt conjugatele armonice faţă de* M″A, M″B, M″C *ale punctelor în care aceste ceviene sunt tăiate de polara trilineară a lui* M′ şi evident această proprietate are loc şi pentru punctul M′. În particular dacă unul din punctele M′ sau M″, M′ spre exemplu este la infinit, obţinem: *paralelele cu o direcţie dată duse prin prin vârfurile triunghiului* ABC, *taie laturile opuse în* A″, B″, C″ *iar conica care trece prin* A″, B″, C″ *şi prin picioarele cevienelor punctului* M′ *taie a doua oară dreptele* AA″, BB″, CC″ *în* A_2, B_2, C_2. *Punctul* A_2 *este simetric faţă de* A *cu punctul în care dreapta* AA_2 *taie polara trilineară a lui* M′ *şi la fel pentru* B_2 şi C_2.

3. Să ne întoarcem la cercul lui *Euler*. Polarele trilineare ale punctelor G şi H sunt respectiv dreapta dela infinit şi axa ortică, această ultimă dreaptă fiind după cum se ştie perpendiculară pe dreapta lui *Euler;* pe de altă parte polarele aceloraş puncte faţă de cercul celor 9 puncte sunt evident şi ele perpendiculare pe dreapta lui *Euler*, de oarece dreapta GH trece prin O_9, deci cele 4 drepte considerate se întâlnesc într'un punct la infinit Printr'o proecţie conică a triunghiului obţinem de aici: *Fie* $\Gamma(M', M'')$ *conica care trece prin picioarele cevienelor punctelor* M′ şi M″. *Polarele punctelor* M′ şi M″ *faţă de* Γ, *precum şi polarele trilineare ale acestor puncte. sunt patru drepte concurente*, într'un punct *J*. În cazul particular când $M' \equiv G$, conica Γ devine conica celor nouă puncte a punctului M″, iar dreapta M″G trece prin centrul conicei. Obţinem deci: *polara trilineară a unui punct* M *şi dreapta* MG *sunt conjugate în conica celor nouă puncte, a punctului* M. În cazul general, punctul *J* în care se întâlnesc cele 4 polare este evident po-

lui dreptei $M'M''$ față de conica lui *Terquem*. Se știe[5] însă, că polurile trilineare ale dreptelor care trec printr'un punct J, formează o conică circumscrisă triunghiului ABC și care admite ca punct al lui *Lemoine* pe J. Aplicând această proprietate la configurația lui *Terquem*, obținem: *Considerăm conica lui Terquem* $\Gamma(M', M'')$, *și conica* γ, *circumscrisă lui* ABC *și trecând prin* M' *și* M''. *Tangentele în* A, B, C *la* γ *formează un triunghiu omologic cu* ABC, *centrul de omologie fiind polul dreptei* $M'M''$ *în raport cu* Γ. În cazul particular când $M' \equiv G$ și $M'' \equiv H$, conica Γ devine cercul celor nouă puncte, iar γ devine iperbola lui *Kiepert*. Regăsim teorema: *tangentele în* A, B, C *la iperbola lui Kiepert formează un triunghiu* K_1, K_2, K_3 *astfel că dreptele* AK_1, BK_2, CK_3 *sunt perpendiculare pe dreapta lui Euler*, teoremă cunoscută, deoarece se știe că iperbola lui *Kiepert* este locul polului trilinear al unei drepte care se deplasează rămânând perpendiculară pe dreapta lui *Euler*.

4. Putem acum răspunde ușor la întrebarea: în ce caz conica lui *Terquem* $\Gamma(M', M'')$ trece printr'unul din punctele M' sau M''? Desvoltările care preced ne conduc la o demonstrație pur geometrică pentru următoarea:

Teoremă. *Condiția necesară și suficientă pentru ca conica* $\Gamma(M', M'')$ *care trece prin picioarele cevienelor punctelor* M' *și* M'' *să treacă printr'unul din punctele* M' *sau* M'', *este ca punctul considerat să aparțină polarei trilineare a celuilalt punct. În acest caz tangenta la conică în punctul considerat este tocmai polara trilineară a celuilalt punct.* Fie A'' punctul în care $M''A$ taie pe BC; fie A_2 punctul în care $M''A$ taie a doua oară conica Γ și fie M_1 punctul în care $M''A$ taie polara trilineară Δ' a punctului M'. Am văzut la § 2 că punctele A_2 și M_1 sunt armonic conjugate față de AM'', deci dacă unul din punctele A_2 sau M_1 coincid cu M și celălalt punct va coincide cu M. Prin urmare dacă M aparține lui Γ, aparține și lui Δ' și reciproc. În această ipoteză, fie D punctul în care polara lui M' față de Γ, întâlnește tangenta în M''. Polara trilinară Δ' care prin ipoteză trece prin M'', trebuind să treacă (vezi § 3) și prin D, coincide cu tangenta la Γ în M'', și teorema este demonstrată. Această teoremă se mai poate enunța și sub forma echivalentă: *Pe polara trilineară* Δ' *a punctului* M', *luăm un punct* M''. *Conica care trece prin picioarele cevienelor punctelor* M' *și* M'' *este tangentă la* Δ' *în* M''. Dacă punctul M'' este punctul dela infinit al polarei trilineare Δ' a lui M', avem cazul pus în evidență de D-l prof. *M. Ghermănescu* și pe care l-am lăsat în suspensie la § 2. Avem în acest caz următorul enunț: *Paralelele duse prin vârfurile triunghiului* ABC *la polara trilineară a punctului* M', *întâlnesc laturile triunghiului în* A'', B'', C''. *Conica ce trece prin* A'', B'', C'' *și prin picioarele cevienelor punctului* M', *admite polara trilineară a lui* M', *ca asimptotă.* Ca aplicație a acestei teoreme să dăm o nouă soluție următoarei probleme[6]: Să se determine locul geometric al punctului M', astfel ca conica lui *Terquem* $\Gamma(M', M'')$ să treacă prin punctul fix M''. Va trebui pentru aceasta, ca polara trilineară a lui M', să treacă prin M'', în acest caz după o teoremă reamintită la § 3, punctul M' descrie o conică circumscrisă având pe M'' ca punct al lui *Lemoine*.

5. Să ne întoarcem la cercul lui *Euler*, și să precizăm poziția punctului ω pe dreapta lui *Euler*, punctul ω fiind punctul de concurență al dreptelor care unesc picioarele înălțimilor cu punctele în care medianele corespunzătoare sunt tăiate de cercul celor 9 puncte. Să observăm mai întâi că dreapta dela infinit este in acelaș timp polara trilineară a lui G și polara centrului O_9 al cercului celor 9 puncte față de acest cerc, iar după observația D-lui prof. *Al. Niculescu* pe care am reamintit-o la § 1, axa ortică este polara trilineară a lui H și polara lui ω față de cercul celor 9 puncte. Să mai reamintim că generalizând configurația cercului celor 9 puncte, D-l prof. *M. Ghermănescu* a enunțat[7]: *Fie* (A', B', C'), (A'', B'', C'') *picioarele cevienelor punctelor* M' *și* M'', *iar* (A_1, B_1, C_1), (A_2, B_2, C_2) *punctele în care conica ce trece prin picioarele acestor ceviene, taie aceste ceviene. Dreptele* $(A'A_2, B'B_2, C'C_2)$, $(A''A_1, B''B_1, C''C_1)$ *sunt concurente în două puncte* G_1 *și* G_2 *colineare cu* M' *și* M''. Cum configurația lui *Terquem* se deduce din configurația lui *Euler* printr'o omografie, putem adăoga

[5]) *C. Coșniță.* Les coordonnées barycentriques, pagina 426.

[6]) *C. Cosnitză*, loc, cit. pag. 103

[7]) *M. Ghermănescu* loc. cit. pag 159.

rezultatului de mai sus următoarele: *polarele punctelor* G_1 *şi* G_2 *faţă de conica* $\Gamma(M', M'')$, *coincid respectiv cu polarele trilineare ale punctelor* M' *şi* M''.

6. Coordonatele punctelor G_1 şi G_2 au fost date de D-l prof. *M. Ghermănescu*[8].

Trecând la cercul lui *Euler* va trebui să facem în aceste formule $\alpha'=\beta'=\gamma'=1$ şi să înlocuim pe $\alpha'', \beta'', \gamma''$ cu coordonatele ortocentrului:

$$\alpha'' : \beta'' : \gamma'' = \frac{1}{-a^2+b^2+c^2} : \frac{1}{a^2-b^2+c^2} : \frac{1}{a^2+b^2-c^2}. \tag{1}$$

Făcând aceste înlocuiri obţinem pentru coordonatele $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ ale lui $G_2 \equiv \omega$

$$\omega \{ \alpha''(2\beta''\gamma'' + \gamma''\alpha'' + \alpha''\beta'), \beta''(\ldots), \gamma''(\ldots) \},$$

sau

$$\omega \left\{ \frac{b^2+c^2}{-a^2+b^2+c^2} ; \frac{c^2+a^2}{a^2-b^2+c^2} ; \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2-c^2} \right\}$$

Să luăm pentru punctele H şi ω respectiv coordonatele $\bar{\alpha}'', \bar{\beta}'', \bar{\gamma}''$ şi $\bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0, \bar{\gamma}_0$ definite de relaţiile

$$\bar{\alpha}'' : \bar{\beta}'' : \bar{\gamma}'' = \frac{\alpha''}{k_1} : \frac{\beta''}{k_1} : \frac{\gamma''}{k_1} ; \quad \bar{\alpha}_0 : \bar{\beta}_0 : \bar{\gamma}_0 = \frac{\alpha_0}{k_2} : \frac{\beta_0}{k_2} : \frac{\gamma_0}{k_2}$$

unde

$$k_1 = -\Sigma a^4 + 2\Sigma b^2 c^2 = 16 S^2$$

$$k_2 = 2\Sigma a^4 (b^2+c^2) - 2\Sigma a^6 = 32 S^2 - 12 a^2 b^2 c^2.$$

Vom avea în acest caz:

$$\bar{\alpha}'' + \bar{\beta}'' + \bar{\gamma}'' = \bar{\alpha}_0 + \bar{\beta}_0 + \bar{\gamma}_0.$$

Expresiunile

$$k_1 \bar{\alpha}'' \frac{a^2+b^2+c^2}{2} - k_2 \bar{\alpha}_0$$

şi celelalte analoage, fiind egale între ele, reprezintă coordonatele punctului G. Deducem

$$\frac{GH}{G\omega} = \frac{2k_2}{k_1(a^2+b^2+c^2)} = 4\left(1 - \frac{6R^2}{a^2+b^2+c^2}\right)$$

formulă care fixează poziţia punctului ω pe dreapta lui *Euler*.

7. *Fie* (A', B', C') *şi* (A'', B'', C'') *picioarele cevienelor punctelor* M' *şi* M'' *şi fie* $(A_1, B_1, C_1), (A_2, B_2, C_2)$ *punctele în care aceste ceviene sunt tăiate de conica lui Terquem* $\Gamma(M', M'')$. *Dreptele* $A'A_2$ *şi* $A''A_1$ *se întâlnesc în* N_1 *şi fie* N_2 *şi* N_3 *punctele analoage. Dreptele* AN_1, BN_2, CN_3 *sunt concurente într'un punct* Q. Ecuaţiile dreptelor $A'A_2$ şi $A''A_1$ au fost date în articolul D-lui prof. *M. Ghermănescu*. Intrebuinţând aceste formule, găsim că dreapta AN_1 are ecuaţia:

$$[\beta'^2\alpha''\gamma'' + \beta''^2\alpha'\gamma' + 3\alpha'\alpha''(\beta'\gamma'' + \beta''\gamma')]\gamma'\gamma''\beta -$$
$$[\beta'^2\alpha''\gamma'' + \beta''^2\alpha'\gamma' + 3\beta'\beta''(\alpha'\gamma'' + \alpha''\gamma')]\beta'\beta''\gamma = 0$$

dreptele BN_2, CN_3 având ecuaţii care se deduc din acestea prin permutări circulare. Deducem că dreptele AN_1, BN_2, CN_3 sunt concurente în punctul $Q(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ pentru care avem:

$$\alpha_0 = \frac{\alpha'\alpha''}{\alpha'^2\beta''\gamma'' + \alpha''^2\beta'\gamma' + 3\alpha'\alpha''(\beta'\beta'' + \beta''\gamma')}$$

şi alte două formule care se deduc din aceasta prin permutări circulare. In cazul cercului lui *Euler* avem $M' \equiv G$ şi $M'' \equiv H$; făcând în aceste formule $\alpha' = \beta' = \gamma' = 1$ şi înlocuind pe $\alpha'', \beta'', \gamma''$ cu valorile (1) dela § 6, găsim pentru $Q(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ coordonatele

$$\frac{1}{\alpha_0} = b^2c^2 + a^2(-a^2+b^2+c^2)$$

şi alte două formule analoage. Citim din aceste formule că *reciprocul lui* Q *se găseşte pe dreapta care uneşte centrul* O *al cercului circumscris cu punctul lui Longchamps* $D(b^2c^2, c^2a^2, a^2b^2)$. Reciprocul Q_1 al lui Q e determinat pe dreapta OD de relaţia

$$\frac{Q_1O}{Q_1D} = -\frac{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}{16S^2}.$$

Mai adăogăm că Q aparţine conicei circumscrise care trece prin reciprocul lui O şi prin K.

NOTA MATEMATICA

1. — *Studiul unei funcţii.* Fie funcţia

$$y = sp\,x + cp\,x. \tag{1}$$

al cărei grafic vrem să-l construim, numai în intervalul închis $(0, 2\pi)$, de oarece funcţia (1) este periodică având perioada 2π.

Vom ţine seamă de formula fundamentală din *Trigonometria patratică*, anume:

[8]) *M. Ghermănescu*, idem.

(2) $$|sp\,x| + |cp\,x| = 1.$$

Suntem conduşi astfel a cerceta următoarele cazuri:

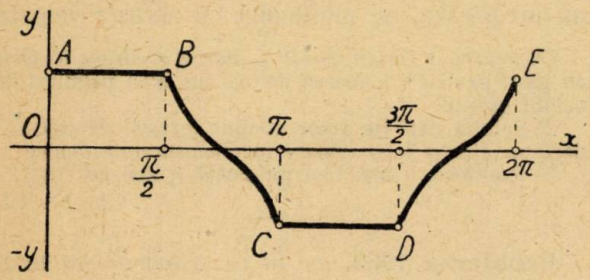
1₀ *Cazul* $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$. În acest caz formula (2) devine

$$sp\,x + cp\,x = 1,$$

astfel că funcţia (1) ne dă

$$y = 1,$$

care reprezintă o dreaptă paralelă la axa Ox, din care vom reţine numai segmentul AB.



2⁰ *Cazul* $\frac{\pi}{2} \leqq x < \pi$. Formula (2) în acest caz este echivalentă cu următoarea

$$sp\,x - cp\,x = 1,$$

astfel că funcţia (1) devine

$$y = 2\,sp\,x - 1.$$

Cum derivatele 1-a şi a 2-a ale acestei funcţii, conform celor ştiute din *Trig. patratică*, sunt respectiv,

$$y' = -2\,(sp^2 x + cp^2 x),$$
$$y'' = 4\,(sp\,x + cp\,x)\,(sp^2 x + cp^2 x),$$

putem construi următorul tablou de variaţie:

x	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
y'	-2	$-$	-1	$-$	-2
y''	4		0		-2
y	1	descr.	0	descr.	-1

Graficul ce rezultă din acest tablou este format din arcul BC, care porneşte din punctul $B\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ tangent la o dreaptă de coeficient unghiular -2, întâlneşte axa Ox în punctul de abscisă $\frac{3\pi}{4}$, punct de inflexie al curbei şi ajunge în punctul $C(\pi, -1)$ tangent la o dreaptă de coeficient unghiular -2.

3⁰ *Cazul* $\pi \leqq x \leqq \frac{3\pi}{2}$. În acest caz formula (2) devine

$$sp\,x + cp\,x = -1,$$

astfel că funcţia (1) ne dă

$$y = -1,$$

care reprezintă o paralelă la axa Ox, din care vom reţine numai segmentul CD.

4⁰ *Cazul* $\frac{3\pi}{2} \leqq x \leqq 2\pi$. Formula (2) pentru cadranul al 4-lea devine

$$sp\,x - cp\,x = -1,$$

astfel că funcţia (1) devine

(3) $$y = 2\,sp\,x + 1.$$

Cum pentru cadranul al 4-lea, prima şi a 2-a derivată a funcţiei (3) sunt respectiv

$$y' = 2\,(sp^2 x + cp^2 x),$$
$$y'' = 4\,(sp\,x + cp\,x)\,(sp^2 x + cp^2 x).$$

putem construi următorul tablou de variaţie:

x	$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
y'	2	+	1	+	2
y''	-4		0		4
y	-1	creşte	0	creşte	1

Din acest tablou rezultă graficul format din arcul DE, care pleacă din punctul $D\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$ tangent la o dreaptă de coeficient unghiular 2, întâlneşte axa Ox în punctul de abscisă $\frac{7\pi}{4}$, punct de inflexie şi ajunge în punctul $E(2\pi, 1)$ tangent la o dreaptă de coeficient unghiular egal cu 2.

Graficul complect al funcţiei (1) din intervalu $(0, 2\pi)$, *este format din segmentele de dreaptă* AB CD, *precum şi din arcele* BC *şi* DE, *astfel cum se văd în figură.*

Ţinem să relevăm acest grafic interesant, care în punctele B, C şi D are câte două tangente.

Într'o altă notă vom studia funcţia

$$z = D\,(sp\,x + cp\,x),$$

adică derivata funcţiei (1), al cărei grafic vom arăta că prezintă discontinuităţi finite.

V. ALACI

INŞTIINŢARE

Conducerea R. M. T. dorind să încurajeze activitatea tinerilor corespondenţi elevi de liceu sau studenţi, înfiinţează două premii pentru anul în

curs 1948—49. Aceste premii se vor acorda corespondenților ce vor trimite mai multe soluții la problemele publicate în cursul acestui volum, în rubrica *„probleme propuse"*. Se vor considera în special problemele purtând un asterisc precum și celelalte probleme în particular. Comitetul de conducere va hotărâ corespondenții ce vor fi premiați având în vedere pregătirea lor în raport cu cunoștințele ce le au, în baza numărului problemelor rezolvate și a calității soluțiilor lor. In acest scop, corespondenții sunt rugați să-și precizeze pe soluție situația lor școlară.

Premiile vor consta în bani sau în cărți.

Abonații care doresc să ia parte la acest Concurs se vor înscrie, adresându-se redacției, până la 15 Iunie a. c., arătând în cererea de înscriere situația lor școlară. Numele lor se va publica în no. 5 ce apare la 15 Iulie a. c.

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul LIII, No. 6, Februarie 1948, Asupra unor figuri patru-puncte, reciproce, formate din ortocentre, de G-l *Gh. I. Popescu*. Dr. *Paul Tancu* profesor ardelean de matematici, de *I. V. Matieș* Concursul „Gazeta Matematică" din 1948. Note Matematici. Chestiuni de examen. Probleme rezolvate și propuse.

2. *P. Sergescu:* La Littérature mathématique dans la première période (1665—1701) du „Journal des Savants".

3. *P. Sergescu:* Documentation et informations.

4. *P. Sergescu:* Le vie et l'oeuvre de *Gaspard Monge*.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1756. — *Să se rezolve ecuația*

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{2\sqrt{x}-3}{x+3}+\operatorname{arc\,tg}\frac{2\sqrt{x}+3}{x-3}=\operatorname{arc\,tg}\frac{287\,x}{54(18-4x\sqrt{x})}$$

C. I. JIDANU

Soluția. Aplicând tangenta în ambele părți, ecuația dată se reduce la ecuația

$$\frac{\dfrac{2\sqrt{x}-3}{x+3}+\dfrac{2\sqrt{x}+3}{x-3}}{1-\dfrac{2\sqrt{x}-3}{x+3}\cdot\dfrac{2\sqrt{x}+3}{x-3}}=\frac{287\,x}{54(18-4x\sqrt{x})}$$

unde făcând toate calculele suntem conduși la a rezolva ecuația

$$f(x)=1151\cdot x^3-1148\,x^2-17496=0.$$

Cum derivata se anulează pentru valorile $x=0$ și $x_1=\frac{1148}{3453}$, șirul lui *Rolle* este

$$\begin{array}{cccc} f(-\infty) & f(0) & f(x_1) & f(+\infty) \\ - & - & - & + \end{array}$$

adică ecuația are o singură rădăcină reală mai mare ca x_1.

Se constată că $f(2,8)=-1229,568<0$ și $f(2,9)=921,059$, ceiace însemnează că rădăcina cu o zecimală exactă este $x=2,8$. Cum poblema nu precizează, ne mulțumim cu această valoare.

Observări. 1° D-nii *Heindl N. Martin* și *Mihoc N. Ovidiu* au găsit pentru x valoarea de mai sus. S'au primit și două soluții greșite.

2° Soluția dată de autor conține greșeli de calcul. De aceia se ajunge la o valoare incomensurabilă pentru x.

3° Problema a mai fost publicată și sub no 1821.

Gh. Th. Gh.

Problema 1963. — *În ce sistem de numerație, a cărui bază este inferioară lui 100, există pătrate de patru cifre, de forma aaaa?*

V. THÉBAULT

D-l *Roman I. Const.* (Timișoara) ne trimete următoarea indicație: Problema este rezolvată de însăși autorul problemei în *nota* publicată în R.M.T., vol. 24, pag. 53. La pag. 54 se găsesc soluțiile: $B=7$, $B=41$ și $B=99$.

Problema 2361. — *Să se găsească un patrat perfect de 8 cifre, știind că primele grupe de câte două cifre sunt numere consecutive, iar ultima grupă de două cifre este un număr cu cifre egale.*

G-L. GH. BUICLIU

Soluția. Ultima grupă de 2 cifre egale nu poate fi decât 00 sau 44. Fie N^2 patratul căutat și a un număr de 2 cifre.

Considerăm că N^2 se termină cu 00 și că primele 3 grupe de câte 2 cifre sunt în ordinea a, $a+1$, $a+2$, atunci va trebui găsit P^2 de forma

$$(1)\quad P^2=a\cdot 10^4+a\cdot 10^2+100+a+2=3(3367\cdot a+34)$$

Pentru ca membrul al doilea să fie patrat perfect, trebuie ca mai întâi paranteza să se dividă prin 3, deci

(2) $3367a+34=3m \therefore a+1=3n \therefore a=3n-1.$

Ducând această valoare în (1) obţinem

(3) $P^2=9[3367.a-1111]=9[3366.a-1111+a],$

Faţă de divizorul 11 un patrat perfect este de una din formele

$11t,\ 11t+1,\ 11t+3,\ 11t+4,\ 11t+5,$ sau $11t+9$

deci a trebuie să fie de una din aceste forme şi în acelaşi timp de forma (2). Fie de exemplu:

$$a=3n-1=11t, \quad a=11\theta+4.$$

Dăm lui a valori de această formă, între 0 şi 99 şi anume

$$4,\ 15,\ 26,\ldots,92$$

şi le introducem în paranteza din (3). Pentru nici una din aceste valori, paranteza nu este patrat perfect. Ajungem la acelaş rezultat dacă înlocuim pe a prin celelalte valori.

Dacă examinăm, pe aceiaşi cale, pe rând celelalte cazuri în care se pot scrie numerele $a, a+1, a+2$ unul după altul ajungem tot la rezultatul că problema nu are soluţie.

Când N^2 se termină cu 44 avem

$$N^2=10^4a+10^4+10^2.a+200+44=1010100a+10244$$
$$\therefore \quad N^2=M.3-1,$$

ceia ce este imposibil, căci faţă de divizorul 3, un patrat perfect nu poate fi de cât de forma $3m$ sau $3m+1$. Ajungem la acelaşi rezultat ori care ar fi ordinea în care se scriu numerele $a, a+1, a+2$.

În concluzie problema nu are soluţie.

Notă. 1° *Teodorescu P. P.* (Lic. Matei Basarab, Buc.) a dat această soluţie, dar n'a examinat de cât terminaţia 44.

2° Enunţul acestei probleme a apărut cu o scăpare de transcriere. Enunţul sub care am compus-o este: „...*ştiind că două din primele 3 grupe de câte două cifre sunt consecutive*...". Sub această formă problema are mai multe soluţii, de exemplu

$$3762^2=14152644;\quad 5688=32353344;\ldots$$

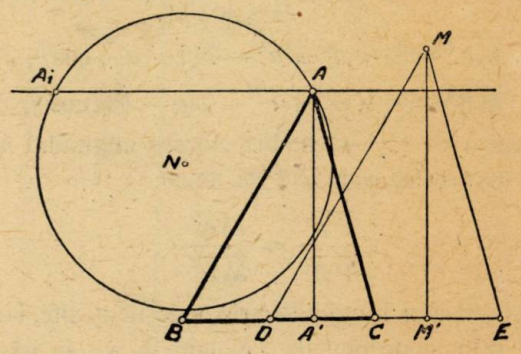
D-l *Constantinescu N. Ilie* a dat aceste 2 soluţii fără a le fi găsit pe calea unei cercetări matematice.

Gh. B.

Problema 2372. — *Să se construiască un triunghiu* A B C *cunoscând în plan baza* B C, *ştiind că paralelele din un punct* M *la* AB *şi* AC *determină pe* BC *un segment de lungime dată şi cunoscând distanţa de la* A *la un alt punct fie* N.

G-L. GH. BUICLIU

Soluţie. Fie problema rezolvată. Notăm cu D şi E intersecţiile lui BC cu paralelele din M la AB şi AC. Fie A', M' proecţiile lui A şi M pe B C. Triunghiurile A B C, D M E având laturile paralele sunt asemeni şi dau



$$\frac{AA'}{BC}=\frac{MM'}{DE}$$

(1) $$\therefore \quad AA'=BC\,\frac{MM'}{DE}$$

Din această egalitate se deduce A A' care se construeşte imediat. Rezultă următoarea construcţie a triunghiului cerut: Se duce o paralelă la B C la distanţa A A' dată de (1) şi se iau intersecţiile A, A_1 ale acestei paralele cu cercul cu centrul în N şi cu raza egală cu distanţa dată. Vom avea 2, 1 sau zero soluţii.

Au dat soluţii analoage D-nii: *Giurconiu M.*, *Grigore A. Gh.*, *Manolescu G.*, *Popa D. V.* (P. T.) şi *Tecdorescu P. P.* (Lic. Matei Basarab, Bucureşti).

Problema 2397. — *Se dau punctele* A,B,C *în plan şi se cere locul geometric al punctului* M, *ştiind că bisectoarea unghiului* A M B *trece prin* C.

G-L GH. BUICLIU

Soluţie. Luăm originea în C şi ca axe de coordonate pe CH şi CB. Fie deci: C(0, 0 ; A(0, a); B(b, 0); M(α, β). Notăm cu P intersecţiile lui CM cu AB şi cu θ unghiul ACB. Avem

$$(CM).\ y=\frac{\beta}{\alpha}x; \quad (AB).\ \frac{x}{b}+\frac{y}{a}-1=0.$$

Din aceste două ecuaţii se scoate

$$P\left[\frac{ab\alpha}{a\alpha+b\beta},\ \frac{ab\beta}{a\alpha+b\beta}\right].$$

Cu aceste elemente găsim

$$\overline{PA}^2 = \frac{a^2b^2\alpha^2 + a^4\alpha^2 - 2a^3b\alpha^2\cos\theta}{(a\alpha + b\beta)^2},$$

$$\overline{PB}^2 = \frac{a^2b^2\beta^2 + b^4\beta^2 - 2ab^3\beta^2\cos\theta}{(a\alpha + b\beta)^2},$$

$$\overline{MA}^2 = (\beta - a)^2 + \alpha^2 - 2(\beta - a)\alpha\cos\theta,$$

$$\overline{MB}^2 = (\alpha - b)^2 + \beta^2 - 2(\alpha - b)\beta\cos\theta,$$

Pentru ca CM să fie bisectoarea unghiului AMB este necesar şi suficient să avem

$$\frac{\overline{PA}^2}{\overline{PB}^2} = \frac{\overline{MA}^2}{\overline{MB}^2}.$$

Înlocuind aici lungimile prin valorile găsite, iar pe α, β prin coordonatele cuvenite x, y, se găseşte că M descrie cuartica

$$a^2[(a-y)^2 + x^2 - 2(a-y)x\cos\theta]x^2 =$$
$$b^2[(b-x)^2 + y^2 - 2(b-x)y\cos\theta]y^2,$$

care trece prin C.

D-l *I. I. Novac* a găsit ecuaţia locului exprimând dis tanţele unui punct de pe MC la MA şi MB.

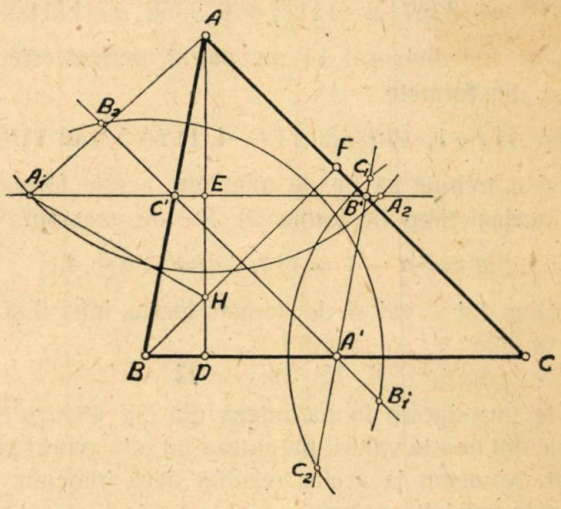
D-l *R. Beşchea* a rezolvat problema în cazul particular $\theta = 90^0$. Celelalte soluţii primite au vicii nepermise de calcul şi demonstraţie.

G-l Gh. B.

Problema 2451 — *Fie* A', B', C' *mijloacele laturilor triunghiului* ABC. *Din punctele* A, B, C *ca centre şi cu aceiaşi rază se descriu trei cercuri care întâlnesc respectiv laturile* B'C', C'A', A'B' *în grupele de puncte* (A_1, A_2), (B_1, B_2), C_1, C_2). *Să se arate că aceste puncte sunt situate pe acelaşi cerc având ca centru ortocentrul* H *al triunghiului* ABC.

N ABRAMESCU

Soluţia. I. Cercurile cu centrele în A şi B având razele egale au axa radicală perpendiculară pe mijlocul C' al liniei centrelor AB. Aceasta insemnează că $C'A_1 \cdot C'A_2 = C'B_1 \cdot C'B_2$ egalitate care spune că punctele A_1, A_2, B_1, B_2 sunt pe un cerc. Analog punctele B_1, B_2, C_1, C_2 şi C_1, C_2, A_1, A_2 sunt pe un cerc. *Nu rezultă de aci că punctele* $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ *sunt pe un cerc.* Pentru a arăta acest lucru trebue o demonstraţie spacială. Iată un mod de a demonstra acest lucru*) Primele două cercuri au punctele B_1, B_2 comune şi deci axa lor radicală este B_1B_2. Analog celelalte cercuri au respectiv axele radicale C_1C_2, A_1A_2. Ori, se ştie că trei cercuri distincte au axele radicale concurente În cazul nostru axele radicale formează un



triunghiu veritabil A' B' C' şi deci cele trei cercuri trebuesc să fie confundate.

Să demonstrăm că cercul Ω pe care se găsesc aceste şase puncte are centrul în ortocentrul triunghiului ABC. În adevăr, A_1A_2 fiind coardă în cercul de centru A, perpendiculara coborâtă din pe A_1A_2 o împarte în două părţi egale şi este perpendiculară pe ea, adică pe BC cu care este paralelă. Deci, perpendicularele ridicate pe mijloacele coardelor A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 în cercul (Ω) vor trebui să treacă prin centrul lui, şi cum ele sunt înălţimile triunghiului ABC, centrul cercului (Ω) este ortocentrul triunghiului ABC.

Soluţia II. Dacă E este punctul unde înălţimea AD taie pe B'C', atunci AE=ED. Din triunghiul AA_1H în care A_1E este înălţime, avem succesiv

$$AA_1^2 - A_1H^2 = (AE^2 + A_1E^2) - (A_1E^2 + EH^2) =$$
$$= (AE + EH)(AE - EH) = AH \cdot HD.$$

Dar, prin patrulaterul inscriptibil ABDF scoatem $AH \cdot HD = BH \cdot HF$, încât

$$AA_1^2 - A_1H^2 = BB_1^2 - B_1H^2.$$

Cum din ipoteză $AA_1 = BB_1$, rezultă $A_1H = B_1H$. Această relaţie spune că toate punctele $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ sunt egal depărtate de punctul H, adică sunt situate pe un cerc cu centrul în acest punct.

*) Atragem atenţia corespondenţilor asupra acestei demonstraţii.

D-nii *Munteanu T. Ioan* (Predeal) şi *Stan Petru* (Timişoara) au dat soluţii asemănătoare cu soluţia I, iar D-nii *Corudeanu C-tin* (Predeal) şi *Teodorescu P. P.* soluţii asemănătoare cu soluţia II calculând raza cercului Ω) pe cale trigonometrică.

S'au primit şi două soluţii greşite

Gh Th. Gh

Problema 2544. — *În raport cu două axe perpendiculare* Ox, Oy *se consideră punctele*

$$M(2a\operatorname{cotg}\alpha,\ 0),\quad N(a\operatorname{cotg}\alpha,\ a\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{cotg}\alpha)$$

unde a *este un parametru variabil. Se cere:* 1° *Să se arate că raza cercului înscris în triunghiul* OMN *este constantă.* 2° *Bisectoarea interioară a vârfului* M *trece printr'un punct fix* I. *Să se explice rezultatul geometric.* 3° *Fie* $A(0, 4a)$ *şi să se arate că dreapta* MN *rămâne tangentă la cercul de diametru* OA. *Să se explice rezultatul geometric.* 4° *Să se găsească locul geometric al centrului cercului exînscris triunghiului* OMN *relativ la latura* OM. *Să se spună ce este acest loc şi să i se găsească elementele importante.* 5° *Fie* M', N', O' *picioarele înălţimilor triunghiului* OMN *şi fie*

$$u = MM' + NN' + OO'.$$

Notând $\operatorname{tg}\alpha = t$, *atunci* u *este funcţie de* t. *Să se studieze variaţia acestei funcţii în cazul* $a = \frac{1}{4}$.

Gh Th. Gheorghiu

Soluţia Cumabscisa punctului N este jumătate din abscisa punctului M însemnează că în triunghiul OMN, NP este înălţime şi mediană, adică triunghiul este isoscel. Deci $ON = MN$.

1) Raza cercului înscris r este dată de formula: $S = pr$, unde S este suprafaţa triunghiului, iar p semiperimetrul. Avem:

$$OM = 2a\operatorname{cotg}\alpha,\quad MN' = a\operatorname{cotg}\alpha,\quad NN' = a\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{cotg}\alpha.$$

Din triunghiul dreptunghiu $N'NM$ scoatem:

$$MN^2 = N'M^2 + N'N^2 = a^2\operatorname{cotg}^2\alpha(1+\operatorname{tg}^2 2\alpha) = \frac{a^2\operatorname{cotg}^2\alpha}{\cos^2 2\alpha},$$

încât

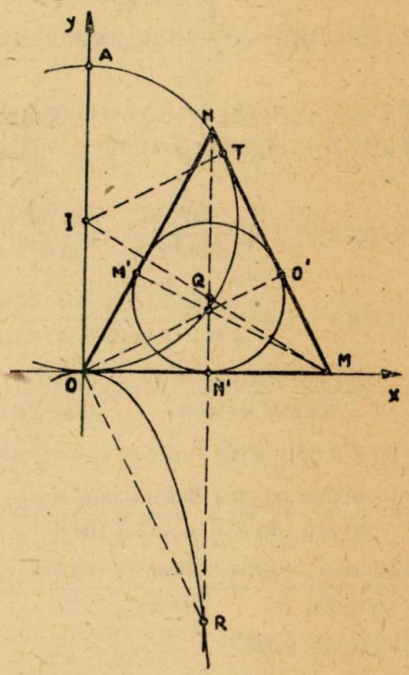
$$MN = ON = \frac{a\operatorname{cotg}\alpha}{\cos 2\alpha}.$$

Deci: $S = \frac{1}{2}OM \cdot NN' = a^2\operatorname{cotg}^2\alpha\operatorname{tg}2\alpha$, şi

$$2p = OM + 2MN = 2a\operatorname{cotg}\alpha\left(1+\frac{1}{\cos 2\alpha}\right) =$$

$$= \frac{2a\operatorname{cotg}\alpha(\cos 2\alpha + 1)}{\cos 2\alpha} = \frac{4a\operatorname{cotg}\alpha\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha} =$$

$$= 2a\operatorname{cotg}^2\alpha\operatorname{tg}2\alpha.$$



Înlocuind în formula care dă pe r se găseşte $r = a =$ constant când α variază.

2) Bisectoarea interioară a unghiului cu vârful în M, este dreapta ce uneşte acest punct cu centrul cercului înscris triunghiului, ale cărui coordonate, în baza rezultatului dela punctul precedent, sunt: $Q(a\operatorname{cotg}\alpha,\ a)$. Ecuaţia ei va fi

$$x + (y - 2a)\operatorname{cotg}\alpha = 0,$$

de unde se vede că oricare ar fi α, dreapta trece prin punctul I de coordonate $x=0$, $y=2a$ (situa pe Oy). Explicaţia geometrică este următoarea: în triunghiul OMI, $N'Q$ este paralelă cu latura OI şi trece prin mijlocul lui OM; deci $OI = 2N'Q = 2a =$ const.: punctul I este deci fix pe Oy.

3) Pentru a arăta proprietatea din enunţ vom intersecta cercul cu dreapta şi vom arâta că se taie în două puncte confundate. Cercul va avea centrul în punctul $I(0, 2a)$ şi raza $OI = 2a$, adică: are ecuaţia $x^2 + (y-2a)^2 = 4a^2$, $x^2 + y^2 - 4ay = 0$. Ecuaţia dreptei MN este

$$\begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ 2a\operatorname{cotg}\alpha, & 0, & 1 \\ a\operatorname{cotg}\alpha, & a\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{cotg}\alpha, & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$y = \operatorname{tg} 2\alpha\,(2a \operatorname{cotg}\alpha - x).$$

Abscisele punctelor de intersecţie dintre dreaptă şi cerc sunt date de ecuaţia:

$$x^2 + \operatorname{tg}^2 2\alpha\,(2a\operatorname{cotg}\alpha - x)^2 - 4a\operatorname{tg}2\alpha(2a\operatorname{cotg}\alpha - x) = 0,$$

sau

$$(1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha)\,x^2 - 4a\operatorname{tg}2\alpha\,(\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{cotg}\alpha - 1)\,x + 4a^2\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{cotg}\alpha\,(\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{cotg}\alpha - 2) = 0.$$

Dar,

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1 + \frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha} = \frac{1}{\cos^2 2\alpha},$$

$$\operatorname{tg}2\alpha(\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{cotg}\alpha - 1) = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}\left(\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - 1\right) =$$

$$= \frac{\sin 2\alpha \sin(2\alpha - \alpha)}{\cos^2 2\alpha \sin\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos^2 2\alpha},$$

$$\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{cotg}\alpha(\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{cotg}\alpha - 2) =$$

$$= \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left(\frac{2\sin\alpha\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha \sin\alpha} - 2\right)$$

$$= 2\frac{\sin 2\alpha\cos\alpha}{\cos 2\alpha \sin\alpha}\frac{\cos^2\alpha - (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}{\cos 2\alpha} = \frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}$$

încât ecuaţia se scrie

$$x^2 - 4a\sin 2\alpha \cdot x + 4a^2\sin^2 2\alpha = 0;\quad (x - 2a\sin 2\alpha)^2 = 0$$

adică dreapta taie cercul în două puncte confundate, adică este tangentă la cerc.

Explicaţia geometrică este simplă. Fie T piciorul perpendicularei coborâtă din I pe M N. Cum I este pe bisectoarea unghiului O M N, va fi egal depărtat de laturile unghiului, adică $I T = I O = 2a = \text{const.}$ Dreapta M N având aceiaşi distanţă faţă de un punct fix când α variază, rămâne tangentă la cercul având drept centru punctul fix, iar drept rază distanţa $2a$.

4) Punctul al cărui loc îl căutăm se găseşte la intersecţia bisectoarei N N′ cu bisectoarea exterioară O R. Locul se va găsi eliminând pe α între ecuaţiile acestor două drepte. Ecuaţia primei drepte este $x = a\operatorname{cotg}\alpha$, iar a celei de-a doua se găseşte ţinând seamă că trece prin origină şi este perpendiculară pe O Q. Cum coeficientul unghiular al lui OQ este tg α, ecuaţia dreptei OR este $y = -\operatorname{cotg}\alpha . x$. Eliminarea se face uşor şi se găseşte $x^2 = -ay$. Locul este deci o parabolă având drept axă pe Oy şi concavitatea îndreptată în jos (din cauza semnului). Vârful este în origină, focarul în punctul $F\left(0, -\frac{1}{4}a\right)$, iar directoarea are ecuaţia $y = \frac{1}{4}a$.

5) Avem $N N' = a\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{cotg}\alpha$; pe $OO' = NN'$ o calculăm observând că este distanţa dela origină la dreapta M N a cărei ecuaţie am găsit-o mai sus. Această distanţă este valoarea absolută a expresiei

$$\frac{2a\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{cotg}\alpha}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 2\alpha + 1}} = 2a\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{cotg}\alpha\cos 2\alpha =$$

$$= 2a\sin 2\alpha\operatorname{cotg}\alpha = 4a\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{cotg}\alpha = 4a\cos^2\alpha,$$

încât $O O' = N N' = 4a\cos^2\alpha$.

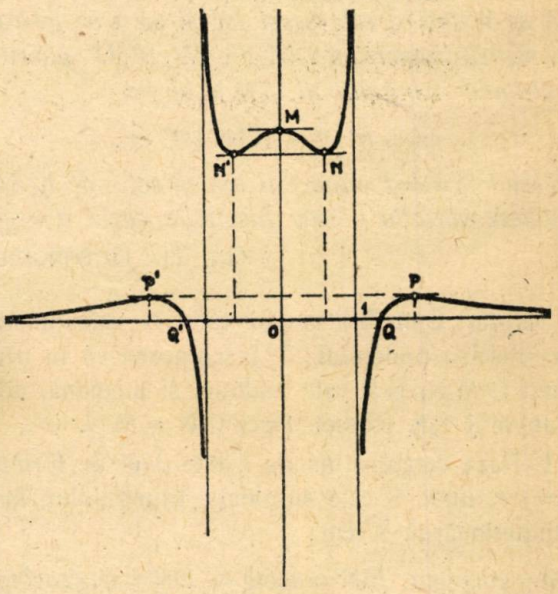
Deci: $u = a(\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{cotg}\alpha + 8\cos^2\alpha)$. Cum

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2t}{1 - t^2},\quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{t},$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{1 + t^2},$$

avem de studiat variaţia funcţiunei

$$u = \frac{5 - 3t^2}{2(1 - t^4)}.$$



Dela început facem observarea că schimbând pe t în $-t$, u nu se schimbă. Acest lucru se traduce geometric prin faptul că curba este simetrică faţă

t	0		$1/\sqrt{3}$		1		$\sqrt{15}/3$	$\sqrt{3}$	$+\infty$
u'	0	$-$	0	$+$		$+$	$+$	0	$-$
u	$5/2$	↘	$9/4$	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	0 ↗ $\frac{1}{4}$	↘	0

de axa Oy. Vom face deci studiul funcţiunei numai in intervalul $(0, +\infty)$ şi din curba astfel con-

struită vom deduce prin simetrie şi restul curbei. Cum u este o fracţie raţională, intervalul de existenţă al funcţiunei este $(0, +\infty)$. Funcţiunea se anulează pentru $t^2=\frac{5}{3}$, adică curba trece prin punctul $Q\left(\frac{1}{3}\sqrt{15}, 0\right)$, şi este discontinuă pentru valorile (reale) care anulează numitorul adică $t=1$. Curba are dreapta $t=1$ ca asimptotă. Derivata este

$$y'=\frac{-t(3t^4-10t^2+3)}{(1-t^4)^2}$$

care anulează pentru $t=0$, $t=\frac{1}{3}\sqrt{3}$, $t=\sqrt{3}$. Studiul semnului derivatei (care se găseşte în tablou) ne spune că funcţiunea are două maxime în punctul $M\left(0, \frac{5}{2}\right)$, $P\left(\sqrt{3}, \frac{1}{4}\right)$ şi un minim în punctul $N\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{9}{4}\right)$.

Observaţii. 1° A rezolvat foarte bine problema, D nii *Teodorescu P. P.* (cl. VIII, lic. Matei Basarab, Bucureşti). S'au mai primit încă 4 soluţii conţinând greşeli de calcul.

2° Problema a fost dată la examenul de admitere dela Politehnica din Timişoara în anul 1946. De aceia soluţia de mai sus se găseşte şi în cartea *„67 examene de admitere la Politehnicele din România"*, fasc, IV.

3° Problema 2544 este o problemă de geometrie analitică. După cum se vede nu s'a primit decât 5 soluţii dintre cari numai una bună, în timp ce la alte probleme de geometrie elementară se primesc o mulţime de soluţii prin geometrie analitică! Îi rugăm pe corespondenţii noştri să se gândească la acest lucru şi să vadă care este cauza.

Gh. Th. Gh.

Problema 2555. — *Să se găsească bipatratul de patru cifre de forma $abac$, ştiind că diferenţa $ab-ac$ este un pătrat perfect.*

IOAN I. NOVAC

Soluţia, Dacă N^4 este numărul căutat, atunci $1000<N^4<10000$, adică $32<N^2<100$, sau încă $5<N<10$. Soluţia problemei trebue deci căutată printre bipatratele: $6^4=1296$, $7^4=2401$, $8^4=4096$ $9^4 6561$ dintre cari singurul care răspunde problemei este ultimul 6561, deoarece $65-61=4=2^2$.

Au rezolvat problema D ra *Gârleşteanu El.* (Timişoara şi D-nii *Bâlă V. C.* (P. T.), *Banciu Gh.* (Beiuş), *Bota I V.* (P. T.), *Breazu M.* (Deva), *Cioara A.* (P. T.), *Deutsch Em.* (P. T.), *De Sabota I.* (Beiuş), *Gherlan I. V.* (P. T.), *Giurconiu M.* (P. T.), *Hurezeanu R.* (Tg.-Jiu), *Man I.* (P. T.), *Munteanu G.* (Braşov), *Neguţ A. I.* (Tg.-Jiu), *Pantea N. A.* (Beiuş), *Pisanca N. I.* (Timişoara), *Popa F. P.* (Oradea), *Purcea M. I.* (Caracal), *Roman I. C.* (Timişoara), *Stancu D. D.* (Cluj), *Stănescu D. C.* (Reşiţa), *Şuta I. M.* (Oradea), *Tibăr A.* (Constanţa), *Turbuţiu Gh.* (P. T.) şi *Zelingher N.* (P. T.).

Gh. Th. Gh.

Problema 2571. — *Să se calculeze suma*

$$1^3+5^3+9^3+\cdots+(4n-3)^3.$$

GH. TH. GHEORGHIU

Soluţia dată de D-l *Coţiu Aurel* (Cluj). Notând cu S suma dată, avem succesiv

$$S=\sum_{p=1}^{n}(4p-3)^3=\sum_{p=1}^{n}(64p^3-144p^2+108p-27)$$

$$=64\sum_{p=1}^{n}p^3-144\sum_{p=1}^{n}p^2+108\sum_{p=1}^{n}p-27n$$

şi ţinând seama de valorile cunoscute ale sumelor din dreapta, avem mai departe

$$S=16n^2(n+1)^2-24n(n+1)(2n+1)+54n(n+1)-27n$$
$$=n(16n^3-16n^2-2n+3)=n(2n-1)(8n^2-4n-3).$$

Au rezolvat deasemeni problema, fără a pune la rezultat în evidenţă factorul $2n-1$, D-nii *Banciu Gh.* (Beiuş), *Barbul V. V.* (Oradea), *Breazu M.* (Deva), *Cioara Alex.* (P. T.), *Cioca I. I.* (P. T.), *Deutsch Em.* (P. T.), *Gherlan I.V.* (P. T.), *Lăpuşanu Val.* (P. T.), *Man Iosif* (P. T.), *Morega V. Titus* (Tg.-Jiu), *Novac I. I.* (P. T.), *Păsărin Gh* (Tg.-Jiu). *Păunescu Şt. Gh.* (Bucureşti), *Pisanca N. I.* (P. T.), *Popa P.* (Oradea), *Radu D.* (Constanţa), *Roman I. C.* (Timişoara), *Sârbu I.* (P. T.), *Scondăcescu M.* (Constanţa), *Şefcate Ab.* (Constanţa), *Stancu D D.* (Cluj), *Stănescu D. C* (Reşiţa), *Stănilă D. G. B.* (Bucureşti) şi *Zelingher N.* (P. T.).

S'au primit 5 soluţii greşite ai căror autori au fost trecuţi pe copertă.

Gh. Th. Gh.

Problema 2574. — *Să se discute şi să se rezolve în cazurile de compatibilitate sistemul de ecuaţii*

$$\begin{cases} y=ax+b, \\ z=by+b, \\ x=az+b, \end{cases}$$

a şi b fiind nişte parametri reali.

EUGEN VISA

Soluţia. Determinantul coeficienţilor necunoscutelor este

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ 0 & a & -1 \\ -1 & 0 & a \end{vmatrix}=a^3-1.$$

Avem două cazuri: 1° $a\neq 1$. Sistemul este normal şi prin regula lui *Crammer* se găseşte soluţia

$$x=y=z=\frac{1}{1-a}.$$

2^0 $a=1$. În acest caz determinantul (1) este nul. Determinantul format cu coeficienții lui x și y din primele două ecuații este

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

deci poate fi luat ca determinant principal. Determinantul caracteristic corespunzător este

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -b \\ 0 & 1 & -b \\ -1 & 0 & -b \end{vmatrix} = -3b,$$

adică pentruca sistemul să fie compatibii este necesar ca $b=0$ În acest caz $x=y=z=k$ (oarecare). Dacă $b \neq 0$, sistemul este incompatibil.

Au rezolvat bine problema D-nii: *Barbul V. V.* (Oradea), *Cantili I. V.* (Slatina), *Hurezeanu M. R* (Tg-Jiu), *Neguț A. I.* (Tg.-Jiu), *Roman I. C.* (Timișoara), *Stăncu D. D.* (Cluj) și *Stănilă D. G. B.* (București).

Gh. Th. Gh.

PROBLEME PROPUSE

2595. — Să se găsească cubul de 11 cifre de forma $abc9225\,0abc$.

G-L GH. EUICLIU

2596. — Să se determine valorile lui x pentru care valorile corespunzătoare ale fracției

$$F\,x = \frac{x-1}{x+1}$$

sunt cuprinse între 2 și 3.

EUGEN VISA

2597. — Să se rezolve ecuația

$$(x+a+3b-2c)^4+(x-a+b-4c)^4=16\,a+b+c)^4.$$

SILAS GH.

2598. — Să se elimine u, v, w între ecuațiile

$$\begin{cases} A\,v^2-2B\,u\,v+C\,u^2=0 \\ A\,v\,w-B\,u\,w-D\,u\,v+E\,u^2=0 \\ A\,w^2-2D\,u\,w+F\,u^2=0 \end{cases}$$

și să se scrie rezultatul sub formă de determinant.

GH TH. GHEORGHIU

2599. — Fie M mijlocul ipotenuzei unui triunghiu dreptunghic ABC, iar D un punct oarecare pe ipotenuza BC. Fie N mijlocul segmentului AD, iar M_1 simetricul lui M în raport cu N. Dreapta M_1D taie catetele AC și AB respectiv în punctele P și Q.

Să se arate că segmentele PM_1 și M_1Q sunt egale.

MARIA NEUMANN

2600* — Să se construiască un triunghiu ABC, cunoscându-i centrul de greutate G, un punct M din planul său, precum și piciorul uneia din cevienele punctului M. Discuție.

M GHERMANESCU

2601. — Fie ABC un triunghiu dreptunghic ($A=90^0$), cercul cu centrul în O înscris acestuia și triunghiul MNP, având vârfurile M, N, P în punctele unde laturile triunghiului ABC sunt tangente cercului O. Să se arate că:

1^0 Triunghiul MNP este isoscel și să se afle suprafața în funcție de raza r a cercului O.

2^0 Suprafața lui ABC este produsul dintre semiperimetrul lui și raza r.

AL. ȚANȚEA

2602* — Să se stabilească identitatea

$$(n-1)\operatorname{arc\,tg}\,i\,x+\operatorname{arc\,tg}\,i\,\frac{(1-x)^{n-1}-2(1+x)^{n-1}}{(1-x)^{n-1}+2(1+x)^{n-1}}=\frac{\log\sqrt{2}}{i},$$

unde $i=\sqrt{-1}$, iar n întreg pozitiv

V. ALACI

2603. — Să se demonstreze că între unghiurile α, β, γ sub care cercul ABC taie cercurile exinscrise în unghiurile A, B, C și între elementele triunghiului, avem relațiile

$$\frac{\cos\alpha}{h_a}+\frac{\cos\beta}{h_b}+\frac{\cos\gamma}{h_c}=-\frac{1}{2R},$$

$$\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{r_a}+\frac{\cos^2\frac{\beta}{2}}{r_b}+\frac{\cos^2\frac{\gamma}{2}}{r_c}=\frac{3}{4R}.$$

ILIE CONSTANTINESCU

2604 — Să se arate că suprafața unui triunghiu oarecare ABC este dată de una din formulele

$$S=R\sin\omega\sqrt{h_a^2+h_b^2+h_c^2},$$

$$\frac{1}{S}=\operatorname{tg}\omega\left(\frac{1}{h_a^2}+\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}\right),$$

unde ω este unghiul lui *Brocard*.

P. TEODORESCU

INFORMAȚII

Până în prezent nu s'au publicat soluțiile următoarelor probleme:

69, 110, 21, 85, 94, 217, 75, 91, 317, 45, 76, 82, 411, 24, 35, 50, 60, 516, 19, 35, 62, 69, 606, 08, 16, 22, 35, 54, 68, 95, 762, 66, 69, 72, 860, 67, 79, 924, 54, 71, 84, 92, 1012, 60, 68, 77, 93, 1107, 15, 16, 19, 29, 33, 34, 40, 46, 49, 56, 57, 58, 60, 63, 66, 67, 73, 83, 87, 88, 98, 1205, 06, 13, 16, 18, 19, 20, 23, 24, 25, 28, 29, 34, 36, 43, 45, 48, 50, 53, 58, 62, 68, 70, 72, 75, 89, 95, 1306, 07, 08, 09, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 33, 41, 49, 50, 51, 54, 57, 63, 64, 65, 70, 77, 78, 79, 80, 85, 86, 89, 90, 91, 93, 95, 96, 1405, 13, 14, 22, 23, 27, 28, 30, 36, 38, 42, 43, 46, 47, 50, 60, 61, 72, 74, 75, 78, 82, 83, 85, 86, 90, 93, 98, 1501, 07, 14, 30, 31, 32, 34, 42, 45, 47, 48, 53, 57, 58, 60, 63, 64, 66, 71, 82, 88, 89, 93, 1600, 04, 13, 15, 21, 24, 27, 28, 32, 37, 40, 41, 45, 51, 54, 56, 70, 71, 72, 76, 78, 79, 85, 86, 87, 95, 1706, 09, 11, 15, 16, 22, 24, 25, 26, 28, 33, 37, 39, 40, 42, 44, 47, 55, 59, 62. 64, 67, 69, 72, 80, 81, 89, 92, 95, 96, 98, 1801, 02, 03, 05, 06, 08, 09, 12, 13, 14, 16, 20, 22, 24, 32, 38, 41, 42, 43, 47, 49, 52, 53, 57, 60, 61, 68, 73, 77, 78, 81, 82, 86, 89, 93, 94, 97, 98, 1901, 03, 05, 08, 09, 10, 17, 19, 20, 21, 22, 25, 26, 30, 32, 35, 37, 38, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 50, 52, 53, 54, 57, 58, 61, 64, 65, 66, 67, 68, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 82, 83, 84, 86, 89, 90, 95, 2000, 01, 03, 04, 09, 12, 15, 16, 17, 18, 19, 22, 24, 25, 26, 27, 32, 33, 35, 39, 40, 42, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 53, 55, 56, 58, 62, 63, 64, 65, 73, 74, 78, 80, 87, 90, 93, 94, 95, 96, 99, 2100, 02, 03, 04, 08, 10, 11, 17, 18, 19, 21, 26, 27, 28, 29, 33, 34, 35, 36, 37, 40, 42, 43, 47, 49, 53. 58, 59, 65, 66, 67, 79, 80, 83, 84, 89, 93, 94, 95, 99, 2200, 01, 02, 04, 05, 06, 08, 10, 11, 15, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 29, 30, 34, 35, 38, 39, 48, 51, 54, 55, 58, 59, 61, 62. 66, 68, 71, 74, 75, 76, 77, 78, 80, 81, 82, 83, 86, 87, 91, 92, 94, 95, 97, 2301, 03, 06, 07, 08, 14, 15, 16, 17, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33, 34, 36, 40, 41, 43, 44, 46, 48, 49, 51, 54, 56, 58, 62, 65, 68, 69, 70, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 82, 85, 86, 87, 92, 94, 98, 2402, 14, 15, 17, 21, 22, 25, 26, 28, 34, 36, 40, 41, 42, 44, 45, 46, 48, 49, 55, 57, 61, 63, 64, 65, 67, 68, 70, 71, 72, 74, 77, 78, 79, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 89, 91, 93, 94, 95, 96, 2500, 02, 03, 04, 07, 10, 11, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 45, 46, 47, 48, 51, 52, 53, 54, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 66, 67, 68, 69, 70, 72, 73, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94.

Sfătuim corespondenților noștrii să se ocupe cu rezolvarea acestor probleme.

Se găsesc de vânzare următoarele cărți:

V. Alaci: *Analiză infinitezimală*, Vol. I: Calculul diferențial, lei 350. Doritorii se vor adresa D-lui D-dor Iacob Lazăr, str. Napoleon 2, Timișoara I.

Gh. Th. Gheorghiu: *67 examene de admitere la Politehnicele din România*

fasc. I conține probleme de geometrie plană și în spațiu . . . . . 168 lei
fasc. II. conține probleme de algebră 140 lei
fasc. IV. conține probleme de geometrie analitică și de sinteză . . . . . 83 lei

Probleme de algebră și analiză matematică

vol. I. calcul diferențial . . . . . 300 lei
vol. II. calcul integral . . . . . 322 lei

Curs de Geometrie

vol. I geometrie plană elementară . . 200 lei

Doritorii se vor adresa autorului, adăugând la fiecare comandă 30 lei pentru expediție, trimițând banii prin mandat poștal sau prin CEC, Cont no. 86405.

1. Nu se publică în revistă decât manuscrise dela abonați.

2. Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise citeț (în special iscălitura) numai pe o parte a hârtiei. Probleme propuse trebuesc însoțite și de soluțiile lor, iar cele rezolvate, de enunț. Nu sunt luate în considerare probleme rezolvate iscălite de mai mulți corespondenți. Problemele rezolvate vor fi redactate îndependant una de alta, și nu în continuare.

3. Numele colaboratorilor dela cari s'au primit soluții la problemele publicate în acest număr și care au sosit la redacție după data de 15 a lunei precedente, nu mai pot fi trecute în corpul revistei. Numele lor este însă menționat pe copertă împreună cu numărul problemei rezolvate.

4. Rugăm pe corespondenții noștrii la orice schimbare de adresă sau lipsă din localitate fără a avea pe cineva să le primească revista, să ne anunțe din vreme. În caz contrar revista ne vine înapoi și cu regret anunțăm că a doua oară nu o mai putem expedia. Mai mult, se suspendă expedierea numerelor următoare până ce abonatul va reclama aceste numere.

5. *G-l Coatu* (Lipova). Vă rugăm mai trimiteți 50 lei pentru abonamente.

6. *Burche I.* (Tg.-Jiu). Trimiteți 300 lei pentru abonament.

7. *Coandă C. I.* (Tg.-Jiu). Nu putem să vă trimitem revista decât la achitarea complectă a abonamentului. Vă rezervăm un abonament.

8. *Gheorghe Filip* (Galați). Ne-ați trimes 720 lei fără a ne comunica ce să vă expediem.

9. *Soare V. M.* (București). Rugăm reclamați la poștă pentru neprimirea revistei deoarece noi o expediem regulat. V'am trimes odată cu no. 1/28 și no 12/27.

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 1 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

---

Alexa M. (2521, 2523, 2534, 2553, 2569); *Andronescu Longin* (1519, 2522, 2535, 2563, 2574); *Beu Dorin* (2565, 2566, 2571, 2574); *Boerescu P. G.* (N; P); *Ciobanu Ioan* (2587, 2593); *Constantinescu Gh.* (2449, 2496, 2517, 2555); *Constantinescu Ilie* (A; N; P.); *Dincă Nicolae* (2555, 2571, 2579); *Deutsch Emeric* (P; 1838, 1873, 2529, 2554, 2579, 2582, 2587, 2593); *Ghiriş Ioan* (2569, 2580, 2582, 2593); *Hurezeanu Romnlus* (2516, 2523, 2530, 2566, 2587, 2588); *Ionescu Gh. Dan* (P); *Man Iosif* (P; 2224, 2362, 2551, 2579, 2580, 2584, 2587); *Mihăileanu N. N.* (A; N; P.); *Neguţ Ioan* (2516, 2523, 2530, 2566, 2585); *Norbert Schlmink* (2579); *Pantea Alexandru* (1156, 1386, 1442, 2487, 2564, 2566, 2580, 2585, 2587, 2593); *Petcu Valeriu* (P; 2537, 2546, 2566, 2579, 2580); *Pisanca Ionel* (N; P; 1963, 2261, 2275, 2574, 2579, 3387); *Popa Pavel* (2546, 2574, 2580, 2585); *Purcea Ion* (2087, 2135, 2142, 2143, 2180, 2183); *Roman I. C.* (P; 1953, 2261, 2275, 2436, 2442, 2457, 2498, 2521, 2523, 2531, 2536. 2553, 2554, 2555, 2560, 2564, 2565, 2579, 2587, 2593); *Raţiu Maria* (2521, 2523, 2531, 2534, 2564, 2566, 2569, 2571, 2572); *Stancu D.* (P); *Stănescu D. C.* (P, 2440, 2488, 2498, 2553, 2564, 2565, 2580); *Teodorescu Petre* (N; P.).

ANUL XXVIII. APRILIE 1948. No. 2.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA
PREȚUL ABONAMENTULUI ESTE 300 LEI ANUAL PENTRU PARTICULARI
ȘI 600 LEI PENTRU INSTITUȚII
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRAINĂTATE ESTE DE 600 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **N. N. MIHAILEANU**: TETRAEDRUL ORTOCENTRIC SI GRUPUL ORTOCENTROIDAL.
2. **MARIA NEUMANN**: DISCUTIA SISTEMULUI FORMAT DE TREI ECUATII LINEARE CU TREI NECUNOSCUTE PRIN CONS DERATIUNI GEOMETRICE
3. NOTE MATEMATICE 2, 3, 4.
4. INSTIINTARE.
5. BIBLIOGRAFIE.
6. PROBLEME REZOLVATE: 110, 569, 2306, 2331, 2387, 2477, 2537, 2548, 2553, 2564, 2579.
7. PROBLEME PROPUSE: 2605-2614.
8. INFORMATII.

„Tipografia Românească", Timișoara.
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebue să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă"

G. ŢIŢEICA

Incepând cu numărul de faţă D-ra Prof *Maria Neumann* (Timişoara) şi D-l Ing. *Ştefan Tilică* (com. Tâmna, jud. Mehedinţi) fac parte din Comitetul de Colaborare al revistei.

ERATĂ. Printre membrii Comitetului de Colaborare publicaţi în no. 1. trebueşte trecuţi şi D-l *Bal Lascu*, asistent Universitatea Cluj.

Mulţumim D-lui Ing. *Murgu Marţian* (Anina) pentru donaţia de 700 lei precum şi D-lui *Soare V. Mircea* (student, Bucureşti) pentru donaţia de 500 lei.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara, conţinând articole, note, probleme propuse şi rezolvate, vor fi trimise pe adresa: Prof. V. Alaci, Politehnica, Timişoara.

Administraţia revistei aduce la cunoştinţa generală următoarele:

1. Abonamentul pe anul XXVIII (15 Martie 1948 — 15 Februarie 1949) este 300 lei pentru particulari şi 600 pentru instituţii.

2. Taxa de membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este de 200 lei.

3. Volumele I, XXIII, XXV, XXVI şi XXVII sunt epuizate. Celelalte volume broşate se găsesc de vânzare cu preţul de 300 lei fiecare. La această sumă se va adăoga 50 lei costul expediţiei. In caz că se comandă mai multe volume se va adăoga la taxa de 26 lei pentru recomandat, câte 20 lei pentru fiecare volum.

4. Se găsesc de vânzare numere izolate din colecţie chiar din volumele epuizate. Preţul unu număr este de 30 lei la care se adaogă 2 lei expediţia. Din vol. XXVII se găsesc de vânzare no 1, 4—12.

5. Se primesc reclamaţii că se pierde revista prin poştă. Aceste reclamaţii sunt adunate în ordinea sosirii lor şi vor fi sătisfăcute la 15 Februarie 1949 când se vor vedea ce numere rămân descomplectate după legarea volumelor întregi. Orice reclamaţie de pierderea unui număr nu este luată în seamă decât la o lună dela data apariţiei acelui număr.

6. Tot ce priveşte administraţia se va adresa D-lui Prof. **Gh. Th. Gheorghiu** str. Voltaire Nr. 1, Timişoara I. Reclamaţiile ce necesită răspuns vor fi însoţite de o carte poştală timbrată legal.

7. Orice sumă destinată revistei se poate trimite prin CEC sub contul n-rul 85208 sau prin mandat poştal D-lui Prof. **Gh. Th. Gheorghiu** pe adresa de mai sus.

ANUL XXVIII — No 2. TIMISOARA, 1948 APRILIE 15

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

Prețul abonamentului este 300 lei pentru particulari și 600 lei pentru instituții.

Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica Timișoara.

ADMINISTRAȚIA: Prof. GH. TH. GHEORGHIU
Timișoara I, Str. Voltaire, No. 1.

TETRAEDRUL ORTOCENTRIC ȘI GRUPUL ORTOCENTROIDAL

DE

N. N. MIHĂILEANU

1. Putem extinde la tetraedru, multe proprietăți din geometria triunghiului. Astfel putem vorbi de centrul unei sfere circumscrise tetraedrului, de centrul unei sfere înscrise, de centrul de greutate al tetraedrului. Tetraedrul oarecare nu are însă ortocentru. Dacă aceasta se întâmplă, atunci avem un tetraedru special: tetraedrul ortocentric. Deci, *numim tetraedru ortocentric, tetraedrul în care înălțimile sunt concurente.*

Tetraedrul ortocentric se bucură de multe proprietăți; cele mai importante dintre ele sunt următoarele[1]:

a) *Perechile de muchi opuse sunt perpendiculare.*

b) *Suma patratelor muchilor opuse este aceeași, pentru oricare pereche.*

c) *Bimedianele sunt egale.*

d) *Orice vârf al tetraedrului se proiectează în ortocentrul feței opuse.*

Aceste însușiri sunt caracteristice tetraedrului ortocentric. Obișnuit luăm pe *a*) ca punct de plecare, pentru a le deduce pe celelalte.

În cele ce urmează voiu prezenta tetraedul ortocentric prin însușirea *c*), respectiv *d*) și voiu face apoi o aplicație într'un caz de degenerare.

2. În tetraedrul ABCD notăm $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AB}=c$, $\overline{DA}=\alpha$, $\overline{DB}=\beta$, $\overline{DC}=\gamma$. Fie A_1 și M mijloacele muchilor opuse BC și AD iar B_1, C_1, N, P notații analoage. Segmentele A_1M, B_1N, C_1P sunt *bimedianele tetraedrului* și știm că ele *sunt concurente în centrul de greutate* G, *care le divide în părți egale*[2].

Știm de asemenea că *lungimea bimedianelor este:*[3]

$$(1)\qquad \overline{A_1M}^2=\tfrac{1}{4}(b^2+c^2-a^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)$$

și celelalte analoage. Rezultă că *în orice tetraedru avem relația*

$$(2)\quad 2\cdot\overline{A_1M}^2+\overline{BC}^2+\overline{DA}^2=\cdots \text{ (expresiile anal.)}$$

3. Pentruca într'un tetraedru, bimedianele A_1M, B_1N, C_1P să fie egale, relația (2) arată că trebue să avem

$$(3)\qquad a^2+\alpha^2=b^2+\beta^2=c^2+\gamma^2.$$

Fie acum U proecția lui A pe muchea BC și U' proecția lui D pe BC; avem

$$\overline{UB}^2-\overline{UC}^2=c^2-b^2=\beta^2-\gamma^2=\overline{U'B}^2-\overline{U'C}^2$$

deci $U\equiv U'$. UA și UD fiind perpendiculare în același punct pe BC, planul AUD este perpendicular pe BC, deci AD este perpendiculară pe BC. Deci *în tetraedrul considerat, cu bimedianele egale, muchile opuse sunt perpendiculare*[4].

---

[1]) Indicăm câteva surse: *G. Țițeica: Culegere de probleme de Geometrie*, Cap. XVI, ex. 16—21; *E. Rouché* et *Ch. de Comberousse: Traité de géométrie, géométrie dans l'espace*, note IV, pag. 659; *Gazeta Matematică, Supliment cu Exerciții*, Anul XII, nr. 3.

[2]) Presupunem că patru forțe paralele, egale și de același sens sunt așezate în vârfurile tetraedrului. Putem să le compunem astfel: forțele din B și C dau o rezultantă în A, dublă ca mărime; cele din A și D, o rezultantă dublă în M. Rămân două forțe egale în A_1 și M, care se compun în mijlocul G al segmentului A_1M și poziția lui G este intrinsecă, adică nu depinde de bimediana dela care plecăm.

[3]) Aplicăm succesiv teorema medianei în triunghiurile BDC, BAC și AA_1D:

$$\overline{DA_1}^2=\frac{\beta^2+\gamma^2}{2}-\frac{a^2}{4},$$

$$\overline{AA_1}^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4},\quad \overline{MA_1}^2=\frac{\overline{DA_1}^2+\overline{AA_1}^2}{2}-\frac{\overline{AD}^2}{4}.$$

[4]) *Dacă două perechi de muchi opuse sunt perpendiculare și a treia pereche este formată din muchi opuse perpendiculare;* în adevăr, primele două condiții cer $c^2-b^2=\beta^2-\gamma^2$, $a^2-c^2=\gamma^2-\alpha^2$, deci și $a^2-b^2=\beta^2-\alpha^2$.

Deci tetraedrul ortocentric poate fi introdus prin însuşirea *c*).

4. Fie H ortocentrul unui triunghiu ABC; ducem perpendiculara în H pe planul A B C şi luăm un punct D pe această perpendiculară. Vom arăta că tetraedrul A B C D este ortocentric[5] şi cu ajutorul acestei definiţii (însuşirea *d*) îi vom regăsi proprietăţile esenţiale.

Dreptele A H, D H fiind perpendiculare pe muchea B C, planul A D H este perpendicular pe muchea, BC deci muchile opuse AD, BC sunt perpendiculare; analog deducem că şi perechile de muchi opuse (D B, C A) şi (D C, A B) sunt perpendiculare. Rezultă de aici că definiţia este simetrică, adică şi vârful A al tetraedrului se proiectează în ortocentrul feţei opuse. Fie $A' = (AH, BC)$; înălţimile din A şi D ale tetraedrului sunt înălţimi în triunghiul ADA', deci concurente. Două înălţimi oarecare fiind concurente, toate sunt concurente şi în acelaşi punct fiindcă altfel ar trebui să fie într'un plan. Am justificat astfel că tetraedrul considerat este ortocentric.

Dacă în relaţia cunoscută

$$4)\quad \overline{AH}^2+\overline{BC}^2=\overline{BH}^2+\overline{CA}^2=\overline{CH}^2+\overline{AB}^2$$

adăugăm în fiecare parte pe $\overline{DH}^2$, obţinem

$$(5)\quad \overline{AD}^2+\overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{CA}^2=\overline{CD}^2+\overline{AB}^2=4\,\overline{A_1M}^2=4\,\overline{B_1N}^2=4\,\overline{C_1P}^2.$$

Am ţinut seama şi de relaţia (1). Însuşirile *a*), *b*), *c*) sunt astfel justificate.

5. Dacă D este situat în planul A B C, propoziţiile precedente trebue să subsiste[6]. Plecând dela tetraedrul ortocentric şi folosind nota 4) rezultă că dacă două perechi de muchi opuse AD, BC şi BD, AC sunt perpendiculare, atunci şi muchiile C D, A B sunt perpendiculare; aceasta constitue o nouă justificare că înălţimile unui triunghiu sunt concurente. În acest caz D se confundă cu H şi spunem că *punctele* A, B, C, H *formează un grup ortocentroidal.* Insuşirea *b*), devine relaţia (4); însuşirea *c* devine: *segmentele ce unesc mijloacele segmentelor* A H, B C *şi analoagele sunt egale.* Se ştie că ele sunt diametre în cercul *Euler*, deci egale cu raza cercului circumscris.

6. Menţionăm încă următoarele proprietăţi ale tetraedrului ortocentric:

e) *Centrul de greutate se proiectează în centrele cercurilor Euler ale feţelor.*

f) *Ortocentrul, centrul de greutate şi centrul sferei circumscrise sunt aliniate.*

g) *Dacă* U *şi* X *sunt picioarele perpendicularelor comune ale muchilor opuse* BC, AD *avem relaţia*

$$\overline{UB}\cdot\overline{UC}+\overline{XA}\cdot\overline{XD}=\overline{UX}^2.$$

h) *Mijloacele muchilor şi picioarele perpendicularelor comune sunt 12 puncte ale unei sfere de centru* G (prima sferă a lui *Euler*).

Adaptându-le grupului ortocentric regăsim proprietăţile: *segmentele* $A_1M,\ldots$ *care unesc mijloacele laturilor cu mijloacele segmentelor dintre vârfuri şi ortocentru se taie în părţi egale, în centrul cercului lui Euler; centrul cercului lui Euler,* ω, *este centrul mediilor distanţe al patrulaterului* A B C H[7]; *ortocentrul, centrul cercului Euler şi al cercului circumscris sunt pe o dreaptă* (dreapta *Euler*); *fie* A' *piciorul înălţimei* A H *pe* B C $(A' \equiv U \equiv X)$; *avem relaţia*

$$\overline{A'B}\cdot\overline{A'C}+\overline{A'A}\cdot\overline{A'D}=0;$$

punctele A_1, B_1, C_1; M, N, P; A', B', C' *sunt pe un cerc* (cercul *Euler*).

7. Grupul ortocentric se bucură încă de proprietăţi, dintre care cele mai însemnate sunt:

i) *Oricare din vârfuri este ortocentrul triunghiului format de celelalte trei.*

j) *Cercurile circumscrise celor patru triunghiuri, ce se pot forma sunt egale,*

h) *Cele patru triunghiuri au toate acelaşi cerc al lui Euler.*

Interpretarea lor spaţială este: *dacă în tetraedrul* A B C D *muchea* A D *este perpendiculară pe planul*

---

[5]) Un aspect mai general se poate vedea în interesantul articol „*Asupra unor tetraedre*“ de *C. Ionescu Bujor, Gazeta Matematică* XL, 304.

[6]) Deci, într'un patrulater ABCD avem relaţia (1) (relaţia *Euler*) şi relaţia (2). Dacă M şi A_1 se confundă patrulaterul devine un paralelogram şi (1) devine

$$a^2+\alpha^2=b^2+c^2+\beta^2+\gamma^2;$$

suma patratelor diagonalelor este egală cu suma patratelor laturilor. Pentru dreptunghiu relaţia se reduce la teorema *Pitagora.*

[7]) Cu consecinţele: *dacă d este o dreaptă oarecare din plan, suma distanţelor punctelor* A, B, C, H *la d este de patru ori distanţa lui* ω *la aceeaşi dreaptă; suma distanţelor punctelor* A, B, C, H *la un diametru al cercului Euler este nulă.*

riunghiului ABC *de ortocentru* H, *atunci tetraedrul* DBCH *este ortocentric; dacă* R_1, R_2, R_3, R_4 *sunt razele circumscrise feţelor tetraedrului ortocentric şi* h_1, h_2, h_3, h_4 *înălţimile tetraedrului ce corespund acestor feţe avem relaţia*

(6) $$4R_1^2 + h_1^2 = 4R_2^2 + h_2^2 = 4R_3^2 + h_3^2 = 4R_4^2 + h_4^2$$

obţinută din (5), deoarece $\overline{AH}^2 + \overline{BC}^2 = 4R^2, \ldots$ Pentru grupul ortocentric facem $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = 0$.

8. Asimilarea grupului ortocentric cu tetraedrul ortocentric poate fi urmărită mai departe. Astfel, de exemplu

$$bc \cos BAC + \beta\gamma \cos BDC = \alpha^2,$$
$$\beta c \cos ABD + b\gamma \cos ACD = \alpha^2$$

care devin pentru grupul ortocentric

$$\cos A\,(bc - \beta\gamma) = \alpha^2, \quad \sin A\,(\beta c + b\gamma) = \alpha^2$$

şi care pot fi verificate direct.

DISCUŢIA SISTEMULUI FORMAT DE TREI ECUAŢII LINEARE CU TREI NECUNOSCUTE, PRIN CONSIDERAŢIUNI GEOMETRICE.

DE

MARIA NEUMANN

În cursurile de liceu, ecuaţiile lineare cu două necunoscute sunt prezentate sub aspectul lor geometric, dar cele cu trei necunoscute nu se reprezintă geometric, pentrucă programul nu prevede nici introducerea noţiunilor de geometrie analitică în spaţiu, nici aplicaţiile lor.

Se ştie, că rezultatele discuţiei unui sistem linear format de două ecuaţii cu două necunoscute se obţin imediat, dacă în loc de ecuaţii considerăm drepte.

Ne propunem să arătăm, că putem proceda analog pentru sistemul linear format de trei ecuaţii cu trei necunoscute, dacă asociăm sistemului, configuraţia a trei plane. Vom deduce, în cele ce urmează, fără calcule, rezultatele cunoscute ale discuţiei, folosindu-ne de câteva teoreme din geometria în spaţiu. Cărţile de Geometrie analitică în spaţiu procedează invers, ele tratează problema intersecţiei a trei plane cu ajutorul rezultatelor găsite în Algebră.

Având în vedere, că ne adresăm în primul rând elevilor dela secţia ştiinţifică, care nu s'au ocupat cu Geometria Analitică în spaţiu, vom presupune ca fiind cunoscute numai următoarele noţiuni: noţiunea sistemului de coordonate în spaţiu, faptul, că ecuaţia $f(x, y, z) = 0$ reprezintă o suprafaţă, în care, dacă punem $z = 0$, se obţine intersecţia ei cu planul $z = 0$ şi că prin eliminarea variabilei z între ecuaţiile a două suprafeţe se obţine ecuaţia proecţiei intersecţiei lor pe planul $z = 0$.

1°. Iată noţiunile de Geometrie Analitică în spaţiu, de care ne vom folosi în cadrul articolului nostru:

a) O expresie lineară cu trei variabile reprezintă un plan. Prin eliminarea necunoscutelor y şi z din ecuaţiile a două plane, se obţin ecuaţiile proecţiilor intersecţiei lor pe două plane de coordonate. Dar intersecţia a două plane este o dreaptă, deci şi proecţiile intersecţiei lor, sunt drepte. Dacă ecuaţia planului n'ar fi de gradul întâi, atunci cel puţin una dintre ecuaţiile, care reprezintă proecţiile intersecţiei a două plane, ar fi de un grad mai mare ca unu.

b) Coeficienţii variabilelor din ecuaţiile a două plane paralele sunt proporţionali.

Două plane sunt paralele, dacă intersecţiile lor cu două plane oarecare sunt paralele două câte două. Intersecţiile planelor,

$$A_i x + B_i y + C_i z = D_i$$

unde $i = 1, 2$ cu planele $y = 0$ şi $z = 0$ sunt paralele, două câte două, dacă:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \text{ şi } \frac{A_1}{A_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Dacă numai una dintre aceste două condiţii este îndeplinită, planele date nu sunt paralele. În acest caz numai intersecţiile lor cu unul dintre planele de coordonate sunt paralele. Dar dacă intersecţiile a două plane cu un al treilea plan sunt paralele, atunci aceste intersecţii sunt paralele şi cu intersecţia planelor.

Rezultă deci că intersecţia a două plane este paralelă cu unul dintre planele de coordonate, dacă unul dintre determinanţii formaţi de coeficienţii necunoscutelor este egal cu zero.

c) Două plane sunt confundate, dacă toţi determinanţii formaţi de coeficienţii necunoscutelor şi de termenii liberi sunt nuli.

2°. Teoremele din Geometrie în spaţiu, de care ne vom folosi în cele ce urmează sunt următoarele:

a) Intersecţiile a trei plane distincte, care trec prin aceeaşi dreaptă situată la distanţa finită, cu un al patrulea plan, care nu este paralel cu intersecţia planelor date, sunt trei drepte concurente într'un punct finit al dreptei de intersecţie al celor trei plane date.

b) Dacă intersecţiile a trei plane care nu trec prin aceeaşi dreaptă situată la distanţă finită sau prin acelaş punct situat la distanţă finită, cu un al patrulea plan, sunt trei drepte paralele între ele, planele date sunt sau paralele între ele, sau sunt toate trei paralele la aceeaşi dreaptă, fără a fi paralele şi între ele şi formează feţele unei prisme veritabile.

c) Dacă intersecţiile a trei plane cu un al patrulea plan sunt două drepte paralele, tăiate de o a treia dreaptă, atunci două dintre planele date sunt paralele între ele şi sunt tăiate de un al treilea plan sau planul al patrulea este paralel cu intersecţia a două plane, fără să fie paralelă şi cu al treilea plan. În acest al doilea caz planele date au un punct comun.

d) Intersecţiile a trei plane, care au un punct comun situat la distanţă finită, sau la infinit, cu un al patrulea plan, care nu este paralel cu niciuna dintre intersecţiile planelor, formează un triunghiu.

3°. În cele ce urmează ne vom folosi de mai multe ori de condiţia de concurenţă a trei drepte. Dat fiind caracterul articolului, care şi-a fixat ca scop, să deducă prin consideraţii geometrice câteva formule de algebră, e clar că nu putem să ne folosim de eliminantul sistemului format de trei ecuaţii cu două necunoscute, fără a-l fi găsit şi pe cale geometrică.

Notând cu M_i şi N_i punctele, unde dreapta reprezentată de ecuaţia

$$\frac{x}{a_i}+\frac{y}{b_i}=1$$

unde $i=1,2,3$, taie axele de coordonate, avem prin considerarea suprafeţelor triunghiurilor PM_1M_2, PM_2M_3, PN_1N_2 şi PN_2N_3 unde prezintă intersecţia dreptelor date, care au respectiv înălţimi egale şi câte un unghiu egal cuprins între laturi neegale,

$$(1)\qquad \frac{M_1M_2}{M_2M_3}\cdot\frac{OM_1}{OM_3}=\frac{N_1N_2}{N_2N_3}\cdot\frac{ON_1}{ON_3}.$$

Relaţia obţinută exprimă, că rapoartele anarmonice ale punctelor determinate de dreptele date pe axele de coordonate şi originea sunt egale. Relaţia obţinută se mai scrie şi astfel, dacă notăm segmentele OM_i şi ON_i respectiv cu a_i şi b_i:

$$\frac{\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}}{\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_2}}=\frac{\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_2}}{\frac{1}{b_3}-\frac{1}{b_2}}$$

proporţia obţinută putându-se scrie şi sub formă de determinant, numit în algebră eliminantul sistemului dat. Relaţia (1) subsistă şi în cazurile particulare, când dreptele sunt sau toate paralele între ele, sau când ele se confundă într'o singură dreaptă, sau când două dintre ele se confundă.

4°. Noţiunile de Geometrie Analitică în spaţiu şi teoremele din Geometria în spaţiu fiind expuse, vom începe să tratăm chestiunea propusă.

Cu trei plane distincte ce pot forma în total cinci configuraţii diferite, iar dacă două dintre cele trei plane date coincid, se mai obţin încă două configuraţii diferite. Configuraţia a opta se obţine dacă toate cele trei plane coincid. Rezultă că există opt categorii de sisteme lineare cu trei necunoscute, dintre care sistemul corespunzător la un triedru veritabil admite o soluţie unică. Sistemul corespunzător la trei plane care trec prin aceeaşi dreaptă este nedeterminat, dar compatibil. Avem un alt caz, când două dintre cele trei plane care au o dreaptă comună coincid. Sistemul este incompatibil, când ecuaţiile reprezintă sau feţele unor prisme veritabile sau două plane paralele tăiate de un al treilea plan, sau când planele date sunt paralele toate între ele. Sistemul mai este incompatibil şi în cazul când două dintre plane coincid şi al treilea plan este paralel cu ele. Dacă toate trei planele coincid, sistemul corespunzător este nedeterminat şi admite o dublă infinitate de soluţii.

a) Vom considera mai întâi cazul particular, când planele date sunt distincte şi trec prin originea axelor de coordonate. Ele se reprezintă prin ecuaţiile omogene:

$$A_i x+B_i y+C_i z=0$$

unde $i = 1, 2, 3$. Intersectându-le cu planul $z=1$, se obţin dreptele

$$A_i x + B_i y + C_i = 0$$

care formează un triunghiu, dacă determinantul

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

este diferit de zero.

În acest caz planele date formează conform celor expuse în d) din 2°, un triedru veritabil, deoarece ele, având prin ipoteză un punct comun în origină, nu pot forma o prizmă.

Dacă determinantul (2) este egal cu zero, planele nu mai formează un triedru cu vârful în origină. Planele prin ipoteză sunt distincte şi trec prin origină. Rezultă că în acest caz, au o dreaptă comună ce trece prin origină.

b) Ne propunem să găsim condiţia ca trei plane distincte reprezentate de ecuaţiile

$$A_i x + B_i y + C_i y = D_i$$

unde $i = 1, 2, 3$, să aibă un punct comun situat la distanţă finită.

Considerăm planele:

$$(3) \qquad A_i x + B_i y + C_i z = 0,$$

care trec prin origină şi care conform celor expuse în 1° suni paralele cu planele date. Dacă planele date formează un triedru veritabil, atunci şi planele (3), care sunt paralele cu ele şi care trec prin origină formează cu triedru veritabil. Dar în acest caz, conform celor spuse în a) din 4° determinantul (2) numit în algebră determinantul sistemului este diferit de zero. Am dedus deci următoarea proprietate cunoscută: *Sistemul format de trei ecuaţii cu trei necunoscute admite o soluţie unică, dacă determinantul sistemului este diferit de zero.*

c) Să considerăm cazul când sistemul nu admite o soluţie unică. În acest caz determinantul sistemului ne mai putând fi diferit de zero, este egal cu zero, iar planele corespunzătoare ecuaţiilor nu formează un triedru veritabil.

Să presupunem că planele sunt distincte şi nu sunt toate trei paralele între ele. Intersectându-le cu planul $z = 0$ se obţin dreptele

$$(4) \qquad A_i x + B_i y = D_i$$

unde $i = 1, 2, 3$.

Dacă aceste drepte ar fi toate trei paralele între ele, sau ar fi toate trei confundate, toţi determinanţii formaţi din coeficienţii variabilelor x şi y ar fi egali cu zero. În acest caz, conform celor expuse în 1°, intersecţiile planelor sunt două câte două paralele cu o dreaptă situată în planul $z = 0$, sau planele date au o dreaptă comună paralelă sau conţinută în planul $z = 0$. Rezultă că în acest caz, planele date formează sau o prizmă, având muchiile paralele cu o dreaptă din planul $z = 0$, sau trec toate trei prin aceeaşi dreaptă paralelă cu planul $z = 0$ sau conţinută în planul $z = 0$. Determinantul

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix}$$

numit în algebră, determinantul caracteristic este nul în acest caz. Dar vedem că nu putem decide, dacă sistemul dat este compatibil sau incompatibil şi vedem că determinantul caracteristic s'a format prin bordarea unui minor egal cu zero.

Dar putem presupune, fără a restrânge generalitatea problemei, că în cazul când planele trec prin aceeaşi dreaptă, dreapta lor comună să nu fie paralelă cu planul $z = 0$ şi să nu fie nici conţinută în acest plan, pentrucă ştim că o dreaptă oarecare este cel mult paralelă cu două plane de proecţie, iar în cazul prismei vom presupune că planele să nu fie paralele cu dreapta din planul $z = 0$.

Vom presupune că planele sunt distincte şi că intersecţiile lor cu planul $z = 0$ nu sunt nici toate trei paralele, nici confundate între ele.

1) Dacă dreptele (4) formează un triunghiu, toţi determinanţii formaţi de coeficienţii x şi y sunt diferiţi de zero. Determinantul (5) este diferit de zero. Planele formează conform celor expuse în d) din 2° o prizmă, deoarece ele prin ipoteză, nu pot forma un triedru veritabil, iar sistemul corespunzător este incompatibil.

2) Dacă două dintre dreptele (4) sunt paralele, atunci unul dintre determinanţii formaţi de coeficienţii lui x şi y, este nul. Conform celor expuse în c) din 2°, în acest caz, două dintre planele date sunt paralele şi sunt tăiate de un al treilea plan, deoarece ele prin ipoteză nu pot forma un triedru.

Determinantul (5) este diferit de zero.

3) Dacă determinantul (5) este egal cu zero, dreptele din (4) sunt concurente pentrucă am presupus că ele nu sunt, nici confundate, nici paralele. În acest caz toți determinanții formați din coeficienții variabilelor x și y sunt diferiți de zero. Conform celor expuse în a) din 2°, planele au în acest caz o dreaptă comună și sistemul corespunzător planelor este compatibil, dar nedeterminat

d) Urmează, să examinăm cazul când două dintre planele date se confundă.

În acest cnz se confundă și două dintre dreptele (4). Rezultă că unul dintre determinanții formați din coeficienții variabilelor x și y este nul. Determinantul (5) este zero și sistemul corespunzător este compatibil și nedeterminat, planul al treilea având cu unul dintre planele confundate o dreaptă comună.

e) Rămâne să examinăm cazurile când planele sunt toate trei paralele între ele și când două sau toate trei dintre ele coincid. În acest caz toți minorii formați din coeficienții tuturor variabilelor sunt nuli, deoarece intersecțiile planelor date cu planele de coordonate sunt paralele două câte două. În cazul când planele sunt distincte determinanții

$$\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \text{ și } \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

sunt conform celor expuse în 1°, amândoi diferiți de zero. Dacă numai unul dintre aceștí determinanți este zero, două dintre cele trei plane coincid și sistemul rămâne incompatibil. Dacă ei sunt amândoi egalî cu zero, planele se confundă și sistemul este compatibil dar nedeterminat.

5° Am văzut în cele precedente, că prezentarea sub aspectul ei geometric a problemei, discuția sistemului linear format de trei ecuații cu trei necunoscute, ne-a sugerat rezolvarea ei prin considerațiuni geometrice și că prin interpretările geometrice obținute pentru diferiți determinanți, s'a mărit gradul de pătrundere în această abstractă problemă de algebră. Metoda urmată de noi nu poate fi extinsă și pentru cazul unui sistem cu mai multe decât trei necunoscute, pentrucă posibilitățile geometriei, de a asocia noțiunilor abstracte de algebră, imagini intuitive, sunt limitate, din cauza particularităților inerente sistemului nostru sensorial. Dacă numărul variabilelor devine mai mare decât trei, funcțiunile nu mai pot fi reprezentate prin curbe și suprafețe.

NOTE MATEMATICE

2. — *Asupra unei note* — În nota nr. 18 Vol. XXVI, 7, pag. 82. R. M. T., am încercat să dau o nouă metodă de demonstrare a divergenței seriei armonice.

Deși concluziile sunt logic trase, iar rezultatul cel adevărat, cu toate acestea metoda de a deduce suma S a unei serii date prin rezolvarea unei ecuații cu rădăcina S, formată cu ajutorul seriei date sau a altor serii, nu este de recomandat întrucât ea poate să ne conducă la rezultate false, precum a arătat D-l Prof. *Gh. Th. Gheorghiu* într'un exemplu din „Articol de metodologie", R M.T. XXVIII, nr. 7, pag. 81.

VIRGIL GHITESCU

3. — *Asupra problemei 2366.* — Construim figura după indicațiile din enunțul problemei, considerând *un sistem de axe oblice oarecare.*

1° Observăm că s'au format *două fascicole omografice*, de vârfuri A și B. Într'adevăr, dreptei A N îi corespunde succesiv și univoc punctul N, dreapta N P, punctul M, dreapta B M. Și invers.

Deci, *locul lui* Q(A N, B M) *este o conică ce trece prin* A *și* B, conform reciprocei teoremei lui *Chasles*. Se vede ușor că ea trece și prin O, considerând poziția particulară PO a dreptei variabile.

2°. Dreapta A N taie conica în două puncte: A și Q. Dacă Q ≡ A atunci AN≡PA și P A *devine tangentă la conică*, deoarece o taie în două puncte confundate. Analog P B e tangentă la conica (C).

În felul acesta, *conica* (C) *e perfect determinată prin cinci condițiuni.*

3°. M $(m, 0)$; N $(0, n)$. Conica (C) are un punct la infinit când A N || B M.

Sau:

$$(1) \qquad \frac{b}{m} = \frac{n}{a} \quad \therefore \quad mn = ab.$$

Fie P′ punctul în care paralela din P la Ox taie pe Oy. Din $\Delta NPP' \sim \Delta NMO$, obținem

$$\frac{n}{n-q} = \frac{m}{p} \quad \therefore \quad n = \frac{mq}{m-p}.$$

Condiția (1) devine

$$\frac{m^2 q}{m-p} = ab \quad \therefore \quad q m^2 - ab\, m + ab\, p = 0.$$

a) Pentru ca (C) să fie o parabolă, trebuie să aibă puncte la infinit într'o singură direcție. Deci, realizantul ecuației în m să fie nul.

$$a^2 b^2 - 4\, ab\, pq = 0 \quad \therefore \quad ab(ab - 4pq) = 0$$
$$\therefore \quad ab = 4pq.$$

Deci P(p, q) trebue să se găsească pe iperbola (echilateră în cazul axelor rectangulare.

(2) $$4xy = ab.$$

b) Pentru

$$ab(ab - 4pq) < 0$$

deci P(p, q) în interiorul ramurilor iperbolei (2), locul lui Q e o elipsă (care nu poate fi niciodată cerc, deoarece nu putem avea încontinuu

$$\sphericalangle AQO = \sphericalangle ABO).$$

c) Pentru

$$ab(ab - 4pq) > 0$$

deci P(p, q) în exteriorul ramurilor iperbolei (2), locul lui Q e o iperbolă.

4°. Când A și B tind către infinit suntem în cazul c). Se vede imediat că centrul iperbolei este P(p, q) și direcțiunile asimptotice sunt axele de coordonate. (Observăm pozițiile particulare când dreapta variabilă prin P e paralelă cu axele de coordonate).

Când axele sunt rectangulare, iperbola este echilateră.

5. Dacă a sau $b = 0$ locul lui Q este axa ordonatelor, sau axa absciselor. Dacă p sau $q = 0$, locul lui P este format din dreptele AP și OP, sau din dreptele BP și OP. Dacă P se găsește pe dreapta AB, locul lui Q e o dreaptă ce trece prin O (cele două fascicole omografice de vârfuri A și B au o rază omoloagă comună).

P. P. TEODORESCU

---

4. — **Studiul unei functii simplu-discontinue.** *Se cere graficul funcției*

(1) $$y = D(sp\, x + cp\, x)$$

unde D *este simbolul de derivare după Cauchy.*

Funcția (1) este periodică, de perioadă 2π, astfel că o vom construi numai în intervalul închis $(0, 2\pi)$. Pentru aceasta ținem seamă de formula fundamentală din *Trigonometria patratică,* anume:

(2) $$|sp\, x| + |cp\, x| = 1.$$

Cercetăm acum următoarele cazuri:

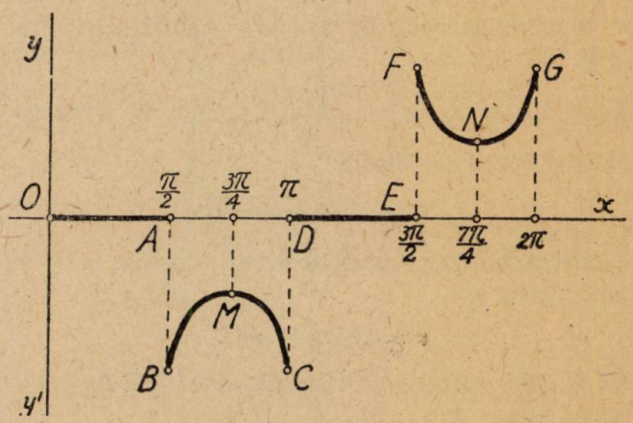
1°. *Cazul* $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. În acest caz formula (2) devenind

$$sp\, x + cp\, x = 1,$$

rezultă că derivata din (1) este zero, deci avem

$$y = 0,$$

care reprezintă axa Ox, din care vom reține numai segmentul O A.



2°. *Cazul* $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$. Formula (2) pentru cadranul al 2-lea ne dă

$$sp\, x - cp\, x = 1$$

și înlocuind valoarea lui $cp\, x$ scoasă de aci, în funcția (1), obținem

(3) $$y = D(2\, sp\, x - 1).$$

Dacă efectuăm derivata din membrul al 2-lea având în vedere formula de derivare a lui $sp\, x$ din *Trig. patratică,* găsim

(4) $$y = -2(sp^2 x + cp^2 x).$$

Derivata acestei funcții este

(5) $$y' = 4(sp\, x + cp\, x)(sp^2 x + cp^2 x).$$

Construim acum următorul tablou de variație:

x	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
y'		+	0	−	
y	−2	creşt.	−1	descr.	−2

Graficul ce rezultă din acest tablou este format din arcul BMC, care porneşte din punctul $B\left(\frac{\pi}{2}, -2\right)$ creşte până în punctul de maxim $M\left(\frac{3\pi}{4}, -1\right)$, apoi descreşte până în punctul $C(\pi, -2)$.

3°. *Cazul* $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$. În al 3-lea cadran formula (2) fiind echivalentă cu relaţia

$$sp\,x + cp\,x = -1,$$

rezultă că funcţia (1) devine

$$y = 0.$$

Vom reţine deci din axa Ox numai segmentul DE.

4°. *Cazul* $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$. Cum în al 4-lea cadran formula (2) devine

$$sp\,x - cp\,x = -1,$$

valoarea lui $cp\,x$ scoasă de aci şi înlocuită în (1) ne dă pentru y,

$$y = D(2\,sp\,x + 1).$$

Efectuând derivata din membrul al 2-lea, putem scrie încă,

(6) $$y = 2(sp^2 x + cp^2 x).$$

Derivata acestei funcţii este

(7) $$y' = 4(sp\,x + cp\,x)(sp^2 x + cp^2 x)$$

Cu ajutorul relaţiilor (6) şi (7) putem construi următorul tablou de variaţie:

x	$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
y'		−	0	+	
y	2	desc.	1	creşt.	2

.

Graficul ce rezultă din acest tablou este format din arcul FNG, care pleacă din punctul $F\left(\frac{3\pi}{2}, 2\right)$, descreşte până în punctul de minim $N\left(\frac{7\pi}{4}, 1\right)$ şi apoi iar creşte până în punctul $G(2\pi, 2)$.

Graficul complect al funcţiei (1) din intervalul $(0, 2\pi)$ *este simplu-discontinu, format din segmentele lineare* OA, DE *şi din arcele de curbă* BMC *şi* FNG, *astfel cum se văd în figură.*

Ţinem să relevăm acest exemplu simplu de funcţie simplă — discontinuă.

V. ALACI

INŞTIINŢARE

La sfârşitul articolului *„Câteva teoreme de Algebră“*, publicat în „R.M.T.“ Vol. XXVII, N-rile 1 şi 2, s'a propus un premiu pentru rezolvarea *pe cale directă* a identităţilor unei cuadruple identităţi care face tocmai obiectul problemei 2548 publicată în acest număr.

Comitetul „R.M.T.“ cercetând cu atenţie soluţiile primite până la 1 Martie c. la problema 2548, a constatat cu plăcere că d-nii *Constantinescu N. Ilie* şi *Teodorescu Petre* au trimes soluţii satisfăcând pe deplin condiţiile cerute şi în consecinţă le acordă fiecăruia, drept premiu, câte 1000 (una mie) lei.

Relevăm cu acest prilej că pe ambii premiaţi, îi cunoaştem ca fiind elemente harnice şi pricepute ce lucrează cu mult entuziasm în ogorul matematicilor.

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul LIII, No. 7, Martie 1948. Asupra focarelor elipsei lui *Steiner*, de *Em. E. Marinescu*. Raport pentru decernarea premiului *„Nicolae G. Botea“*, de *I. S. Antoniu*, *E. Botea* şi *Ş. Gheorghiu*. Raport pentru premiul de aritmetică *„Ion Ionescu“*, de G-l *G. Buiciu* şi *N. Georgescu-Roegen*. Note matematice. Probleme rezolvate şi propuse.

2. *Colloquium Mathematicum*. Vol. I, Fasc. 1. Wroclaw 1947. Sur un théorème de M. *V. Jarnik*, par *H. Steinhaus*. Sur une extension du théorème de convexité de M. *Marcel Riesz*, par *R. Salem*. Remarque sur une hipothèse de chinois concernant les nombres $\frac{2^n - 2}{n}$, par *W. Sierpinski*. Sur les relations symétriques dans l'ensemble fini, par *K. Zarankievicz*. Sur la convergence uniforme et la mesurabilité relative, par *E. Marczewski* et *M. Nosarzewka*. Sur deux notions de fonctions indépendantes, par *S. Hartman*. Sur la cubature des troncs de bois, par *H. Steinhaus*.

3. *Quarterly of Applied Mathematics*. Vol. V, No. 4, 1948. Relations between the transmitting and receiving properties of antennas, by *A. F. Stevenson*. Distribution of the sum of randomly phasend components, by *W. R. Bennett*. Concerning a new transcendent, its tabulation and application in antenna theory, by *C. J. Bouwkamp*. The cylindrical antenne with gap, by *Ronald King* and *T. W. Winternitz*. Aerodynamics of thin quadrilateral wings at super-

sonic speeds, by *Robert S. Snow*. On axially symmetric flows, by *Alexander Weinstein*. Some general results in the theory of moyse through non-linear devices, by *David Middleton*. Notes.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 110. — *Cu câți condensatori de capacitate* K *și cum grupați se obține capacitatea* $\frac{18}{13}$K?

I. D. CERNATESCU

Soluție. Când grupăm mai mulți condensatori în paralel, capacitatea rezultantă este

$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

iar dacă-i grupăm în serie avem:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}.$$

Capacitatea dorită $\frac{18}{13}$K, nu va putea fi formată numai din condensatori în paralel, căci n fiind numărul condensatorilor, ar trebui să avem:

$$\frac{18}{13}K = nK; \quad n = \frac{18}{13}$$

ceeace nu se poate.

La fel nu poate fi formată numai din condensatori în serie, deoarece ar trebui să avem:

$$\frac{1}{\frac{18}{13}K} = \frac{n}{K}; \quad n = \frac{13}{18},$$

ceea ce nu se poate.

Gruparea condensatorilor trebue să fie mixtă. Din acest punct de vedere problema este multiplu nedeterminată. Într'adevăr, cu 3 condensatori se pot face 4 grupări mixte obținând 4 capacități noui diferite. Cu 4 condensatori se pot face 10 grupări mixte, dar se obțin numai 8 capacități noi diferite ș a. m. d. Partea importantă este faptul că există grupări diferite cari ne dau aceeaș capacitate. Aici este nedeterminarea problemei, deoarece soluția depinde de modul de grupare ales și moduri de grupare mixtă sunt foarte multe.

Gruparea aleasă de mine va fi următoarea:

Formez o capacitate cu x_1 condensatori legați în serie, valoarea ei fiind $\frac{K}{x_1}$. Un număr de y_1 din aceste noui capacități le leg în paralel și obțin o nouă capacitate cu valoarea $\frac{Ky_1}{x_1}$.

În mod analog voiu forma capacitățile:

$$\frac{Ky_2}{x_2}, \frac{Ky_3}{x_3}, \ldots, \frac{Ky_n}{x_n}.$$

Capacitățile finale obținute legate în serie trebue să-mi dea capacitatea dorită, atunci obțin ecuația:

$$\frac{1}{\frac{18}{13}K} = \frac{1}{\frac{y_1}{x_1}K} + \frac{1}{\frac{y_2}{x_2}K} + \cdots + \frac{1}{\frac{y_n}{x_n}K},$$

sau

$$(1) \qquad \frac{13}{18} = \frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \cdots + \frac{x_n}{y_n}.$$

În caz că aș fi vrut să grupez ultimele cantități în paralel, aș fi obținut ecuația:

$$(2) \qquad \frac{18}{13} = \frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2} + \cdots + \frac{y_n}{x_n}.$$

Se observă deci că ecuațiile ce le obținem depind de modul de grupare ales, mod care este foarte variat. Aceste ecuații trebue rezolvate în numere întregi și pozitive. Să rezolvăm ecuația (1). Vom avea:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{13\,y_2\,y_3 \ldots y_n - 18(x_2\,y_3\,y_4 \ldots y_n + x_3\,y_2\,y_4 \ldots y_n + \cdots + x_n\,y_2\,y_3 \ldots y_{n-1})}{18\,y_2\,y_3\,y_4 \ldots y_n}.$$

Vom lua numerele întregi și pozitive: $x_2, x_3, \ldots, x_n, y_2, y_3, \ldots$ în mod arbitrar cu condiția ca numărătorul fracției să fie în pozitiv. În acest caz vom obține:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{a}{b} = \frac{da'}{db'} = \frac{a'}{b'}$$

a' și b' fiind prime între ele. De aici vom deduce și valorile lui x_1 și y_1:

$$x_1 = K\,a'; \quad y_1 = K\,b',$$

K fiind întreg și pozitiv arbitrar.

Numărul de condensatori întrebuințați va fi

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n .$$

Nici-un corespondent n'a sesizat generalitatea problemei, ajungând doar la ecuaţia:

$$\frac{13}{18} = \frac{x_1}{y_1}, \text{ cu } x_1 = 13\,K;\ y_2 = 18\,K$$

şi scoţând concluzia că minimul de condensatori este $13 \times 18 = 234$, ceeace este fals. N'am decât să folosesc ecuaţia:

$$\frac{13}{18} = \frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2}, \text{ cu } \frac{x_1}{y_1} = \frac{13 y_2 - 18 x_2}{18 y_2} .$$

Aleg $x_2 = 1$ şi $y_2 = 2$, vom avea

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9} .$$

Pot să iau $x_1 = 2$ şi $y_1 = 9$ şi numărul de condensatori folosiţi va fi

$x_1 y_1 + x_2 y_2 = 20$, deci un număr mult mai redus de condensatori.

Au rezolvat numai ecuaţia $\frac{x_1}{y_1} = \frac{13}{18}$ D-nii: *Margulius Marius* (Bucureşti), *Râmniceanu Constantin* (Iaşi) şi *Tilică C. Ştefan* (Bucureşti).

Silaş Gh.

Problema 569*) — *Să se calculeze suma*

$$\sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{arc\,tg} \frac{r}{1 + \alpha^2 + (2n - 2k - 1)\alpha r + (n-k)(n-k-1) r^2}$$

Să se arate ca aplicaţie că avem

$$\sum_{k=1}^{n=1} \operatorname{arc\,tg} \frac{(n-1)(1-\alpha)}{k^2(\alpha^2+1) - k[\alpha^2 + 2\alpha(n-1) + 2n - 1] + (n-1)(\alpha + 2n - 1} = \frac{\pi}{4}$$

EMIL STEFANESCU

Soluţia. Vom folosi formula cunoscută

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{a-b}{1+ab} = \operatorname{arc\,tg} a - \operatorname{arc\,tg} b .$$

Observăm că termenul general al sumei din enunţ se poate scrie

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{[\alpha + (n-k) r] - [\alpha + (n-k-1) r]}{1 + [\alpha + (n-k-1) r][\alpha + (n-k) r]}$$
$$= \operatorname{arc\,tg} [\alpha + (n-k) r] - \operatorname{arc\,tg} [\alpha + (n-k-1) r].$$

Aceasta însemnează că suma dată va fi egală cu

$$\sum_{k=1}^{n-1} \{ \operatorname{arc\,tg} [\alpha + (n-k) r] - \operatorname{arc\,tg} [\alpha + (n-k-1) r] \}$$
$$= \operatorname{arc\,tg} [\alpha + (n-1) r] - \operatorname{arc\,tg} \alpha$$
$$= \operatorname{arc\,tg} \frac{(n-1) r}{1 + \alpha [\alpha + (n-1) r]}$$

în baza formulei citată mai sus. Aşa dar avem

$$\sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{arc\,tg} \frac{r}{1 + \alpha^2 + (2n - 2k - 1)\alpha r + (n-k)(n-k-1) r^2}$$
$$= \operatorname{arc\,tg} \frac{(n-1) r}{\alpha^2 + (n-1)\alpha r + 1} .$$

Punând condiţia

$$\frac{(n-1) r}{\alpha^2 + (n-1)\alpha r + 1} = 1,$$

adică luând

$$r = \frac{1 + \alpha^2}{(n-1)(1-\alpha)},$$

partea dreaptă a acestei formule va face $\frac{1}{4}\pi$. Înlocuind şi în partea dreaptă pe r prin această valoare, după ce se fac toate calculele, se găseşte tocmai formula din enunţ.

Gh. Th. Gh.

Problema 2306. — *Să se demonstreze că dacă*

$$\alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$$

atunci suma

$$[\beta^2 r^2 - [r^2 - a\alpha)^2] x^2 + 2a\beta(r^2 - a\alpha) x y$$
$$+ \beta^2 (r^2 - a^2) y^2 - 2a\beta^2 r^2 x - 2\beta(r^2 - a\alpha) r^2 y$$
$$+ a^2 \beta^2 r^2 + (r^2 - a\alpha)^2 r^2$$

se divide prin

$$\alpha x + \beta y - r^2 .$$

G-L. GH. BUICLIU

Soluţia. Prima ecuaţie din enunţ arată că punctul B de coordonate (α, β) se află pe cercul

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0 \qquad (1)$$

iar ultima sumă egalată cu zero reprezintă ecuaţia tangentei în $B(\alpha, \beta)$ la cercul (1). Căutând intersecţia acestei tangente cu dreapta

$$x - a = 0$$

se găseşte punctul

$$A\left[a, \frac{r^2 - a\alpha}{\beta}\right].$$

---

*) Enunţ corectat şi complectat.

Ecuaţia patratică a tangentelor din A la cercul (1) după formula

$$(xf'_{x_1}+yf'_{y_1}+zf'_{z_1})-4f(x,y,z)f(x_1,y_1,z_1)=0$$

este tocmai prima sumă din enunţ, care trebue să cuprindă în factor membrul întâi al ecuaţiei tangentei AB, adică pe

$$\alpha x+\beta y-r^2.$$

Notă. Soluţia precedentă este chiar calea care a condus la compunerea problemei. Problema se poate rezolva şi fără consideraţiuni geometrice, desvoltând suma şi ţinând seamă de prima relaţie din enunţ.

D-ra *Maria Neumann* singura care a rezolvat problema, a aplicat la rezolvarea acestei probleme rezultatele cuprinse în problema 2308, propusă de D-sa la pag. 11 Vol. XXV în acelaş număr cu problema de faţă 2306.

G-l Gh. B.

Problema 2331. — *Să se discute ecuaţiile*

$$x\pm\sqrt{3mx+4(m^2-25)}=0,$$

unde m este un parametru real.

EUGEN VISA

Soluţia. Dacă notăm cu (I) ecuaţia în care se ia semnul + în faţa radicalului, şi cu (II) ceailaltă ecuaţie, înmulţindu-le între ele obţinem ecuaţia raţională

$$(III)\qquad f(x)\equiv x^2-[3mx+4(m^2-25)]=0.$$

Problema se desparte în două. a) Discuţia rădăcinilor ecuaţiei (III) care este o discuţie clasică şi se face cu ajutorul realizantului, sumei şi produsului rădăcinilor

$$R=25(m^2-16),\ S=3m,\ P=-4(m^2-25).$$

b) Valorile reale găsite vor fi acceptabile pentru ecuaţiile noastre numai în cazul când radicalul din enunţ va fi real, adică expresia de sub radical va fi pozitivă. Ori acest lucru este asigurat, deoarece ecuaţia (III) nu poate avea rădăcini reale decât numai dacă paranteza mare este pozitivă (în caz contrar prima parte este suma a două cantităţi pozitive cari nu se pot anula în acelaş timp pentru aceiaşi valoare a lui x).

Mai facem observarea că deoarece radicalul este aritmetic, ecuaţia (I) nu poate avea decât rădăcini negative, pe când ecuaţia (II) numai rădăcini pozitive. Discuţia se găseşte în tabloul următor:

m	R	P	S	I	II
$-\infty$					
	+	−	−	1 răd.	1 răd.
−5	+	0	−	$x=-15, x=0$	$x=0$
	+	+	−	2 răd.	
−4	0	+	−	$x=-6$	
	−	+	−		
0	−	+	0		
	−	+	+		
4	0	+	+		$x=6$
	+	+	+		2 răd.
5	+	0	+	$x=0$	$x=0, x=15$
	+	−	+	1 răd.	1 răd.
$+\infty$					

Unde nu este scris nimic însemnează că nu avem rădăcini reale.

Au rezolvat problema fără a face observarea dela b). D-ra *Costin Alexandrina* (P. T.) şi D-nii: *Coţiu Gh. Aurel* (Cluj), *Gligor N. Ion* (Cluj) şi *Teodorescu P. P.* (Bucureşti).

Celelalte soluţii n'au discutat decât ecuaţia (III).

Gh. Th. Gh.

Problema 2387. — *Să se găsească valorile lui a pentru cari avem*

$$(1)\quad \sqrt{1+\sqrt{a(2-a)}}+\sqrt{1-\sqrt{a(2-a)}}=\sqrt{2(2-a)},$$

şi valorile lui a pentru cari avem

$$(2)\quad \sqrt{1+\sqrt{a(2-a)}}-\sqrt{1-\sqrt{a(2-a)}}=\sqrt{2(2-a)}.$$

CAP. C. IONESCU-TIU

Soluţia. Din forma pe care o au relaţiile din enunţ rezultă că autorul le-a considerat în numere reale, iar radicalii aritmetici. In aceste ipoteze, va trebui ca numerele $2-a$ şi $a(2-a)$ să fie pozitive sau nule, adică

$$0\leq a\leq 2.\ \text{Cum:}\ 1-a(2-a)=(a-1)^2$$

rezultă că toate radicalele suprapuse se vor reduce la radicale simple. Distingem două cazuri

$1^0\ 0\leq a\leq 1$. Atunci $\sqrt{(a-1)^2}=1-a$ şi

$$\sqrt{1\pm\sqrt{a(2-a)}}=\sqrt{\tfrac{1}{2}(2-a)}\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}a},$$

încât relaţiile din enunţ se reduc la

(1′) $$2\sqrt{\tfrac{1}{2}(2-a)}=\sqrt{2(2-a)}$$

(2′) $$2\sqrt{\tfrac{1}{2}a}=\sqrt{2(2-a)}.$$

Prima este o identitate, iar a doua prin ridicare la pătrat se constată că nu este valabilă decât pentru $a=1$.

2° $1\leq a\leq 2$. Atunci $\sqrt{(a-1)^2}=a-1$ şi

$$\sqrt{1\pm\sqrt{a(2-a)}}=\sqrt{\tfrac{1}{2}a}\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(2-a)}$$

iar relaţiile din enunţ se reduc la

(1″) $$2\sqrt{\tfrac{1}{2}a}=\sqrt{2(2-a)},$$

(2″) $$2\sqrt{\tfrac{1}{2}(2-a)}=\sqrt{2(2-a)}.$$

Prima este valabilă pentru $a=1$ iar a doua este o identitate.

In concluzie relaţia (1) este valabilă pentru

$$0\leq a\leq 1,$$

iar (2) pentru

$$1\leq a\leq 2.$$

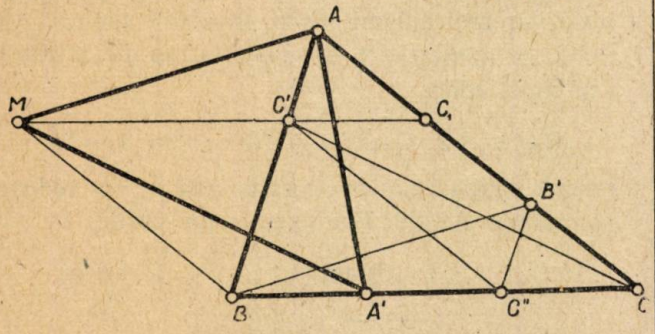
Dintre soluţiile primite, singurele care au putut fi luate în considerare, deşi şi ele parţiale, au fost ale D-lor *Constantinescu N. Ilie* (P. T.), *Novac I. I.* (P. T.), *Popa D. V.* (P. T.) şi *Teodorescu P. P.* (Bucureşti).

Gh. Th. Gh.

Problema 2477. — *Să se demonstreze că, dacă împărţim laturile unui triunghiu oarecare* ABC *prin punctele* A′, B′, C′ *în acelaş sens, şi în acelaşi raport, atunci dreptele* AA′, BB′ CC′ *sunt întotdeauna laturile unui triunghiu.*

ION C. SCHILERU-DILY

Soluţie dată de D-l *Haret Sp. Radu* (Bucureşti). Fie M intersecţia paralelei dusă din A la BB′ cu paralela dusă din C′ la BC; C″ intersecţia paralelei dusă din C′ la AC cu BC şi C_1 punctul unde MC′ taie pe AC.



Cum patrulaterul $C'C_1$ CC″ este un paralelogram având laturile opuse paralele, rezultă $C'C_1 = C''C$. Dar şi (1) $AC_1 = B'C$ deoarece $C'C_1$ fiind paralelă cu BC împarte latura AC în acelaşi raport ca şi pe AB, adică în acelaşi raport ca B′ pe AC, fiindcă prin ipoteză $B'C\,|\,B'A = C'A\,|\,C'B$; deci $B'C|B'A = C_1A\,|\,C_1C$, de unde $B'C\,|\,CA = C_1C\,|\,AC$.

Rezultă egalitatea triunghiurilor $AC'C_1$ şi B′C″C având două laturi egale şi paralele, deci unghiul cuprins egal. Din egalitatea lor rezultă că B′C″ = =AC′ şi paralele. De aci rezultă că şi triunghiurile AMC′ şi BB′C″ sunt egale având o latură omoloagă egală şi toate laturile paralele. Deci (2) AM=BB′. Pe de altă parte egalitatea ultimelor două triunghiuri spune că MC′=BC″=A′C, pentru acelaşi motiv pentru care avem egalitatea (1). Deci, patrulaterul MC′CA′ este un paralelogram având două laturi egale şi paralele. Rezultă (3) MA′ = CC′. Existenţa triunghiului MAA′ care în baza relaţiilor (2) şi (3) are drept laturi lungimile AA′, BB′, CC′, rezolvă problema.

Observări. 1° Ţinem să subliniem frumuseţea soluţiei dată de D-l *Haret* care pe lângă că demonstrează faptul că lungimile AA′, BB′, CC′ pot fi laturile unui triunghiu, totodată îl şi construieşte.

2° Tot D-l *Haret* a mai dat şi o soluţie vectorială problemei, care însă e mai puţin interesantă.

3° S'au primit mai multe soluţii în care s'a considerat A′ pe AB, B′ pe BC şi C′ pe CA în care caz problema se simplifică mult deoarece lungimile AA′, BB′ şi CC′ se deduc din laturile triunghiului iniţial prin înmulţirea cu o constantă. Evident că nu aceasta a fost intenţia autorului.

Gh. Th. Gh.

Problema 2537. — *Se cere pătratul de şase cifre cu primele două cifre egale, ştiind că numărul format de primele două cifre divide numărul format de ultimele două cifre.*

P. TEODORESCU

Soluţia. Cum primele două cifre sunt egale, înseamnă că numărul format de ultimele două cifre trebue să se dividă cu 11, şi cum este terminaţie de pătrat, nu poate fi decât 00 sau 44. Deci numărul căutat poate avea una din formele:

a) *aa bc 00*, b) *11 bc 44*, c) *22 bc 44*, d) *44 bc 44*. Să examinăm pe rând aceste posibilităţi.

a) Avem $\overline{aa\,bc00} = 10^2 \cdot \overline{aa\,bc}$ unde ultimul număr trebue să fie un pătrat perfect. Examinând o tablă de pătrate cu patru cifre, se găsesc soluţiile:

$125600 = 340^2$, $220900 = 470^2$, $336400 = 580^2$, $448900 = 670^2$, $774400 = 880^2$ şi $883600 = 940^2$.

b) Cum $332^2 = 110224$ şi $346^2 = 119716$, şi cum numărul nostru trebue să se termine cu 2 sau cu 8, nu poate fi decât 338 sau 342 dintre cari numai primul corespunde problemei deoarece $338^2 = 114244$.

c) Cum $470^2 = 220900$ şi $479^2 = 229.441$, numai numerele 472 şi 478 pot da soluţii, dar pătratele lor nu au terminaţia 44.

d) Analog, cum $664^2 = 440896$ şi $670^2 = 448900$ singura soluţie ar putea fi dată de numărul 668 dar pătratul lui nu se termină cu 44.

Au dat numai soluţia 114244, D-nii; *Breazu M* (Deva), *Cănescu Tr.* (Craiova), *Cioara A.* (P.T.), *Ciucescu P.* (Slatina), *Constantinescu I Gh.* (Slatina), *De Sabota I.* (Beiuş), *Giurconiu M.* (P.T.). *Man I.* (P.T.), *Morega V. T.* (Târgu-Jiu), *Munteanu G.* (Braşov), *Neguţ I.* (Tg.-Jiu), *Novac I.I.* (P.T.), *Pantea A.* (Beiuş), *Păsărin Gh.* (Tg.-Jiu), *Petcu Val.* (Bucureşti), *Pisanca N. I.* (Timişoara), *Popa P.* (Oradea), *Stancu D. D.* (Cluj), *Stănescu D. C.* (Reşiţa), *Şuta M.* (Oradea), *Tibăr A.* (Constanţa) şi *Toderaşc I. V.* (P.T.).

Gh. Th. Gh.

Problema 2548. — *Să se stabilească următoarea cuadruplă identitate*

$$c \operatorname{arc\,tg} i \frac{\sqrt[c]{A} - \sqrt[c]{Y}}{\sqrt[c]{A} + \sqrt[c]{Y}} = a \operatorname{arc\,tg} i \frac{\sqrt[a]{A(1+iX)^b} - \sqrt[a]{Y(1-iX)^b}}{\sqrt[a]{A(1+iX)^b} + \sqrt[a]{Y(1-iX)^b}} + b \operatorname{arc\,tg} X$$

$$= m \operatorname{arc\,sin} \frac{1}{2i}\left(\sqrt[2m]{\frac{Y}{A}} - \sqrt[2m]{\frac{A}{Y}}\right) = n \operatorname{arc} \frac{1}{2}\left(\sqrt[2n]{\frac{Y}{A}} + \sqrt[2n]{\frac{A}{Y}}\right) = \frac{1}{2i} \log \frac{Y}{A}^{1)},$$

unde $i = \sqrt{-1}$; $a, b, c, m, n,$ A *sunt constante date, iar* X, Y *funcţii oarecare, derivabile, de variabila* x.

V. Alaci

Soluţie dată de d-l *Constantinescu N. Ilie* (P.T.) şi *Teodorescu Petru* (Lic. Matei Basarab Bucureşti). În acest scop, pornim de la următoarele relaţii evidente:

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{i} \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{e^{iu} + e^{-iu}} = u,$$

$$(1) \qquad \operatorname{arc\,sin} \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2i} = u$$

$$\operatorname{arc\,cos} \frac{e^{iu} + e^{-iu}}{2} = u.$$

În prima relaţie făcând substituţia

$$e^{2iu} = \varphi, \quad \text{deci} \quad u = \frac{1}{2i} \log \varphi,$$

iar în celelalte relaţii luând

$$e^{iu} = \psi, \quad \text{deci} \quad u = \frac{1}{i} \log \psi,$$

rezultă că relaţiile (1) se mai pot scrie

$$\operatorname{arc\,tg} i \frac{1-\varphi}{1+\varphi} = \frac{1}{2i} \log \varphi$$

$$(1') \qquad \operatorname{arc\,sin} \frac{\psi - \frac{1}{\psi}}{2i} = \frac{1}{i} \log \psi$$

$$\operatorname{arc\,cos} \frac{\psi + \frac{1}{\psi}}{2} = \frac{1}{i} \log \psi.$$

La aceste relaţii mai alăturăm relaţia

$$(2) \qquad \operatorname{arc\,tg} X = \frac{1}{2i} \log \frac{1+iX}{1-iX},$$

dedusă din prima din relaţiile (1') în care luăm

$$i \frac{1-\varphi}{1+\varphi} = X, \quad \text{deci} \quad \varphi = \frac{1+iX}{1-iX}.$$

Având în vedere relaţiile (1') şi (2), să trecem la stabilirea identităţilor cerute. In adevăr, putem scrie succesiv, în virtutea primei relaţii din (1'):

$$c \operatorname{arc\,tg} i \frac{\sqrt[c]{A} - \sqrt[c]{Y}}{\sqrt[c]{A} + \sqrt[c]{Y}} = c \operatorname{arc\,tg} i \frac{1 - \sqrt[c]{\frac{Y}{A}}}{1 + \sqrt[c]{\frac{Y}{A}}} = \frac{c}{2i} \log \sqrt[c]{\frac{Y}{A}},$$

---

[1]) In enunţ s'a trecut din eroare $\frac{1}{2i} \log AY$, în loc de $\frac{1}{2i} \log \frac{Y}{A}$.

sau

$$c \operatorname{arc\,tg} i \frac{\sqrt[c]{A} - \sqrt[c]{Y}}{\sqrt[c]{A} + \sqrt[c]{Y}} = \frac{1}{2i} \log \frac{Y}{A}. \tag{3}$$

Apoi în baza primei relații din (1′) și a relației (2), putem scrie succesiv,

$$a \operatorname{arc\,tg} i \frac{\sqrt[a]{A(1+iX)^b} - \sqrt[a]{Y(1-iX)^b}}{\sqrt[a]{A(1+iX)^b} + \sqrt[a]{Y(1-iX)^b}} + b \operatorname{arc\,tg} X = a \operatorname{arc\,tg} i \frac{1 - \sqrt[a]{\frac{Y}{A}\left(\frac{1-iX}{1+iX}\right)^b}}{1 + \sqrt[a]{\frac{Y}{A}\left(\frac{1-iX}{1+iX}\right)^b}} +$$

$$\frac{b}{2i} \log \frac{1+iX}{1-iX} = \frac{a}{2i} \log \sqrt[a]{\frac{Y}{A}\left(\frac{1-iX}{1+iX}\right)^b} + \frac{b}{2i} \log \frac{1+iX}{1-iX} = \frac{1}{2i} \log \frac{Y}{A}\left(\frac{1-iX}{1+iX}\right)^b + \frac{b}{2i} \log \frac{1+iX}{1-iX}$$

$$= \frac{1}{2i} \log \frac{Y}{A} + \frac{b}{2i}\left(\log \frac{1-iX}{1+iX} + \log \frac{1+iX}{1-iX}\right) = \frac{1}{2i} \log \frac{Y}{A} + \frac{b}{2i} \log 1,$$

prin urmare

$$a \operatorname{arc\,tg} i \frac{\sqrt[a]{A(1+iX)^b} - \sqrt[a]{Y(1-iX)^b}}{\sqrt[a]{A(1+iX)^b} + \sqrt[a]{Y(1-iX)^b}} + b \operatorname{arc\,tg} X = \frac{1}{2i} \log \frac{Y}{A}. \tag{4}$$

Trecem mai departe și observăm că în virtutea relației a 2-a din (1′) putem scrie

$$m \operatorname{arc\,sin} \frac{1}{2i}\left(\sqrt[2m]{\frac{Y}{A}} - \sqrt[2m]{\frac{A}{Y}}\right) = \frac{m}{i} \log \sqrt[2m]{\frac{Y}{A}} = \frac{i}{2i} \log \frac{Y}{A}. \tag{5}$$

În fine, în baza celei de a 3-a relații din (1′) putem scrie

$$n \operatorname{arc\,cos} \frac{1}{2}\left(\sqrt[2n]{\frac{Y}{A}} + \sqrt[2n]{\frac{A}{Y}}\right) = \frac{n}{i} \log \sqrt[2n]{\frac{Y}{A}} = \frac{1}{2i} \log \frac{Y}{A}. \tag{6}$$

Observăm că ultimii membri din relațiile (3), (4), (5), (6) sunt egali, atunci rezultă că și primii membrii ai acestor relații sunt egali între ei și egali cu ultimul membru, ceeace ne dă tocmai cuadrupla identitate cerută.

Au mai trimis soluții bune d-ra *Crăciun Sylvia* (P. T.) și D-nii: *Gherlan Vasile* (P. T) și *Purcea Ion* (Lic. Caracal), dar folosind cunoștință dint'run articol al autorului, publicat în „R. M. T.", Vol. XXVII N-rile 1 și 2

Observare. Rezolvitorii menționați la începutul soluției, au dat și unele extinderi interesante, dintre care citățm: D-l *Constantinescu Ilie*, bazându-se pe formulele (1′) a stabilit între altele, identitățile interesante:

$$a \operatorname{arc\,tg} i \frac{1 - \sqrt[a]{x}}{1 + \sqrt[a]{x}} - b \operatorname{arc\,tg} i \frac{1 - \sqrt[b]{y}}{1 + \sqrt[b]{y}} = c \operatorname{arc\,tg} i \frac{\sqrt[c]{y} - \sqrt[c]{x}}{\sqrt[c]{y} + \sqrt[c]{x}};$$

$$a \operatorname{arc\,tg} i \frac{\sqrt[a]{a} - \sqrt[a]{x}}{\sqrt[a]{a} + \sqrt[a]{x}} + b \operatorname{arc\,tg} i \frac{\sqrt[b]{b} - \sqrt[b]{y}}{\sqrt[b]{b} + \sqrt[b]{y}} = c \operatorname{arc\,tg} i \frac{\sqrt[c]{ab} - \sqrt[c]{xy}}{\sqrt[c]{ab} - \sqrt[c]{xy}};$$

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{arc\,tg} i \frac{a_k - b_k}{a_k + b_k} = \operatorname{arc\,tg} i \frac{\sqrt{\prod_{k=1}^{n} a_k} - \sqrt{\prod_{k=1}^{n} b_k}}{\sqrt{\prod_{k=1}^{n} b_k} + \sqrt{\prod_{k=1}^{n} b_k}};$$

$$\operatorname{arc\,sin} \frac{1}{2i}\left(\sqrt{\frac{1+ix}{1-ix}} - \sqrt{\frac{1-ix}{1+ix}}\right) \pm \operatorname{arc\,sin} \frac{1}{2i}\left(\sqrt{\frac{1+iy}{1-iy}} - \sqrt{\frac{1-iy}{1+iy}}\right) = \operatorname{arc\,tg} \frac{x \pm y}{1 \mp xy};$$

iar d-l *Teodorescu Petre* a stabilit între alte identităţi şi următoarele:

$$c \operatorname{arc\,tg} i\frac{\sqrt[c]{A}-\sqrt[c]{Y}}{\sqrt[c]{A}+\sqrt[c]{Y}} = a \operatorname{arc\,tg} i\frac{\sqrt[a]{A\prod_{k=1}^{n}(1+iX_k)^{a_k}}-\sqrt[a]{Y\prod_{k=1}^{n}(1-iX_k)^{a_k}}}{\sqrt[a]{A\prod_{k=1}^{n}(1+iX_k)^{a_k}}+\sqrt[a]{Y\prod_{k=1}^{n}(1-iX_k)^{a_k}}}+\sum_{k=1}^{n}a_k \operatorname{arc\,tg} X_k;$$

$$a \operatorname{arc\,sin}\frac{1}{2i}\left[\sqrt[2a]{\frac{Y}{A\prod_{k=1}^{n}(iX_k+\sqrt{1-X_k^2})^{2a_k}}}-\sqrt[2a]{\frac{A\prod_{k=2}^{n}(iX_k+\sqrt{1-X_k^2})^{2a_k}}{Y}}\right]+\sum_{k=1}^{n}a_k \operatorname{arc\,sin} X_k=\frac{1}{2i}\log\frac{Y}{A}.$$

Problema 2553. — *Să se elimine x între ecuaţiile*

$$\begin{cases} A\sin^2 x + B\sin x + C = 0, \\ \sin^3 x - D = 0. \end{cases}$$

L-T. Col. Eug. St. Iacob

Soluţie dată de D-nii *Breazu M.* (Deva) *Gongu Th.* (P. T.) şi *Roman I. C.* (Timişoara). Punând $u = \sin x$ sistemul devine

$$A u^2 + B u = -C,\ u^3 - D = 0.$$

Ridicând prima la cub şi scriind-o sub forma

$$A^3 u^6 + 3AB u^3 (A u^2 + B u) + B^3 u^3 = -C^3$$

şi ţinând seamă de sistemul dat, avem rezultatul eliminării

$$A^3 D^2 - 3ABCD + B^3 D + C^3 = 0.$$

Alte soluţii date de D-ra *Raţiu M.* (P. T.) şi de D-nii: *Cândea M. V.* (Satu-Mare), *Cioara Gh. Alex.* (P. T.), *Constantinescu I. Gh.* (Slatina), *Gherlan I. V.* (P. T.), *Hurezeanu R.* (Tg.-Jiu), *Neguţ A. I* (Tg.-Jiu), *Novac I. I.* (P. T.), *Pisanca N. I.* (Timişoara), *Purcea M. I.* (Caracal), *Roman I. C.* (Timişoara), *Stancu D. D* (Cluj), *Stănescu D.* (Reşiţa). *Teodorescu P. P.* (Bucureşti) şi *Zbarcea I. I.* (P. T.).

Gh. Th. Gh.

Problema 2564. — *Să se arate că expresia*

$$125.27^{3n+1}.5^{9n} - 4^{3n+1}.11^{2(3n+1)}$$

se divide cu 2891.

Mihai Giurconiu

Soluţia. Expresia dată se mai poate scrie

$$3^{3(3n+1)}.5^{3(3n+1)} - 4^{3n+1}.11^{2(3n+1)}$$
$$= (27.125)^{3n+1} - (4.121)^{3n+1} = 3375^{3n+1} - 484^{3n+1}.$$

Dar, în general $x^p - y^p$ se divide cu $x - y$; deci expresia dată se va divide cu 3375—484=2891.

Au rezolvat problema D-rele *Alexa M.* (P. T.), *Funt C.* (P. T.) *Gârleşteanu M. El.* (Timişoara), şi *Raţiu Maria* (P. T.), precum şi dnii: *Bălă V. C.* (P. T.), *Bălăuţă M.* (Deva), *Breazu M* (Deva), *Cioara Gh. A.* (P. T.), *Gherlan I. V.* (P. T.), *Man O.* (Cluj), *Morega V. T,* (Tg.-Jiu), *Neguţ A. I.* (Tg.-Jiu), *Novac I. I.* (P. T.), *Pantea Alex.* (Beiuş), *Păsărin Gr. Gh.* (Tg.-Jiu), *Păunescu Şt. Gh.* (Bucureşti), *Pisanca N. I.* (P. T.), *Popa G.* (Oradea), *Purcea M. I.* (Caracal), *Roman C.* (Timişoara), *Seracin E.* (P. T.), *Simeon L.* (P. T.), *Stancu D. D.* (Cluj), *Stănescu D. C.* (Reşiţa) şi *Turbuţiu Gh. Gh.*

Gh. Th. Gh.

Problema 2579. — *În anul $abcd$, luna d ziua ab, un grup de n binevoitori au subscris pentru fondul „R M.T." o sumă de bani. Care este data subscrierii şi numărul celor care au subscris, ştiind că $abcd - aa = (cc)^2$, iar $n^2 = ede$.*

C. D. Stanescu

Soluţia. Cum „R.M T." a fost fondată în 1921, rezultă $a=1$, $b=9$, încât prima relaţie din enunţ se scrie $19\,cd - 11 = (cc)^2$. Dar singurul pătrat care începe cu 19 este $1936 = 44^2$, încât anul este 1947, iar data 19. VII. 1947. A doua relaţie din enunţ se scrie $n^2 = e7e$ pentru care avem singura soluţie $n^2 = 26^2 = 676$. Au fost deci 26 de subscriitori.

Au rezolvat problema D-nii: *Banciu N. Gh.* (Beiuş), *Breazu M,* (Deva), *Coţiu A.* (Cluj), *De Sabata I.* (Beiuş), *Deutsch E* (P. T.) *Dincă I. N.* (R. Sărat), *Hurezeanu M. R.* (Tg.-Jiu), *Man I.* (P. T.), *Mihăilescu C. Const.* (cl. 4, Bucureşti), *Morega V. T.* (Tg.-Jiu), *Neguţ A. I.* (Tg.-Jiu), *Pantea N. Alex.* (Beiuş), *Păsărin Gh.* (Tg.-Jiu), *Petcu Al. Val.* (Bucureşti), *Pisanca N. I.* (Timişoara), *Popa F. P.* (Oradea), *Radu D.* (Constanţa), *Roman I. C.* (Timişoara), *Schlomiuk N.* (Sibiu), *Stancu D. D.* (Cluj), *Şuta M.* (Oradea), *Tibăr A.* (Constanţa) şi *Ţintariu Em.* (cl. V, Tim.).

Gh. Th. Gh

PROBLEME PROPUSE

2605. — Să se găsească un patrat perfect de de patru cifre semnificative şi diferite,

$$\overline{abcd} = (\overline{ef})^2,$$

astfel ca numărul $\overline{bc}$ să fie un submultiplu al numerilor $\overline{ad}$ şi $\overline{ef}$.

PETRE TEODORESCU

2606. — Pentru o lucrare care trebue terminată în 6 zile au fost tocmiţi m lucrători. În primele două zile au fost prezenţi la muncă toţi lucrătorii în următoarele trei zile au lipsit în fiecare zi doi lucrători. Câţi lucrători trebue să mai fie tocmiţi suplimentar în ajunul ultimei zile pentru ca lucrarea să fie isprăvită în termen? (Se presupune pentru fiecare din ei aceiaşi putere de muncă constantă tot timpul lucrării).

VIRGIL GHITESCU

2607. — Să se calculeze modulul expresiei imaginare

$$\frac{1+e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{i+e^{i\theta}+e^{-i\theta}},$$

unde $i=\sqrt{-1}$, iar θ real.

V. ALACI

2608*. — Să se demonstreze că dacă polinomul

$$f(x,y,z)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dxz+2Eyz+Fz^2$$

este un patrat perfect, atunci expresia

$$E=(\alpha f'_x+\beta f'_y+\gamma f'_z)^2-4f(\alpha,\beta,\gamma)\,f(x,y,z)$$

este identic nulă oricare ar fi α, β, γ.

GH. TH. GHEORGHIU

2609. — Tangenta în punctul A la cercul ABC întâlneşte pe BC în A'. Fie B_a şi C_a proecţiile lui A' pe AC şi AB. Dacă S, S_a sunt suprafeţele triunghiurilor ABC şi $A'B_aC_a$, atunci avem

$$\frac{S_a}{S}-\frac{4S^2}{(b^2-c^2)^2}=0,$$

unde b, c sunt laturile AC şi AB ale triunghiului ABC.

G-L. GH. BUICLIU

2610. — Fiind dat un triunghiu ABC, precum şi două puncte M_1, M_2 în planul său, să se determine al patrulea punct comun conicelor celor nouă puncte ale patru punctelor $ABCM_1$, $ABCM_2$, precum şi eventualele proprietăţi ale acestuia.

M. GHERMANESCU

2611. — Să se calculeze unghiurile pe care le face mediana corespunzătoare uneia din laturile unui triunghiu cu celelalte două, cunoscând exclusiv unghiurile acelui triunghiu.

EUGEN VISA

2612*. — Fie două paralelipipede dreptunghice asemenea. Primul are ca lungimi ale muchilor a_1, b_1, c_1 şi diagonala d_1; al doilea are muchile a_2, b_2, c_2 şi diagonala d_2.

Să se demonstreze relaţia:

$$d_1 d_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2,$$

elementele omoloage fiind următoarele: (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2).

GH. DUMITRESCU

2613. — Să se arate că într'un triunghiu oarecare ABC, notaţiile fiind obicinuite, avem relaţiile:

$$\frac{\sin B}{\sin(A+B)}=\frac{p(p-a)}{c^2\cos^2\frac{A}{2}},$$

$$\frac{\sin\left(\frac{A}{2}+B\right)}{\sin(A+B)}=\frac{\left(p+c\cos\frac{A}{2}\right)\left(p-a+c\cos\frac{A}{2}\right)}{4c^2\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{4}}.$$

EMERIC DEUTSCH

2614. — Să se arate că într'un triunghiu ABC, avem

$$\operatorname{tg}^2A\operatorname{tg}^2B\operatorname{tg}^2C-\Sigma\operatorname{tg}^2A=2\left(\frac{4R_1}{r_1}+1\right),$$

R_1 şi r_1 fiind respectiv raza cercului circumscris şi înscris triunghiului ortic al triunghiului ABC.

C. I. ROMAN

ERATĂ. 1° Enunţul pr. 2569 se va complecta astfel: *Se cere:* 1° *Cota vârfurilor* C *şi* B. 2° *Distanţa între vârfurile* C *şi* B.

2° In enunţul problemei 2601, în loc de *„un triunghiu dreptunghic"* trebuie complectat, adăogând *„isoscel"*.

INFORMAȚII

1. Nu se publică în revistă decât manuscrise dela abonați.

2. Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol, trebuesc scrise citeț (în special iscălitura) numai pe o parte a hârtiei. Probleme propuse trebuesc însoțite și de soluțiile lor, iar cele rezolvate, de enunț. Nu sunt luate în considerare probleme rezolvate iscălite de mai mulți corespondenți. Problemele rezolvate vor fi redactate îndependent una de alta, și nu în continuare.

3. Numele colaboratorilor dela cari s'au primit soluții la problemele publicate în acest număr și care au sosit la redacție după data de 15 a lunei precedente, nu mai pot fi trecute în corpul revistei. Numele lor este însă menționat pe copertă împreună cu numărul problemei rezolvate.

4. Rugăm pe corespondenții noștrii la orice schimbare de adresă sau lipsă din localitate fără a avea pe cineva să le primească revista, să ne anunțe din vreme. În caz contrar revista ne vine înapoi și cu regret anunțăm că a doua oară nu o mai putem expedia. Mai mult, se suspendă expedierea numerelor următoare până ce abonatul va reclama aceste numere.

5. *Memetcea R.* (Constanța). Nu putem să vă trimitem revista până nu vă achitați complect abonamentul. Pentru no. 6/XXVII citiți pe pag. 2-a a copertei.

6. Maior *Boerescu Gh.* No. 1/XXVI este epuizat.

7. Cine are de vânzare exerciții de Geometrie sau Trigonometrie de F. G. M. se poate adresa D-lui Ing. *D. Stănescu*, U. D. R., Reșița.

8. *Râmboiu N. S.* (Cluj), Pentru no. 3/XXVII rog trimiteți 32 lei.

9. *Bonea Anton* (București). Depe mandat un se poate înțelege adresa. Rugăm mai trimiteți 50 lei pentru a vă putea trimite revista.

Manuscrise primite de la corespondenții noștrii până la 1 a lunei curente și anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) și probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

---

Alexa M. (2521, 2523, 2534, 2553, 2559, 2581, 2591, 2592). *Bălă C-tin* (1975, 1982, 2574, 2582, 2587, 2593); *Blaga Ovidiu* (2487, 2531, 2554, 2564, 2587); *Coșniță Cezar* (A); *Deutsch Emeric* (N; P; 1250, 1808, 1832, 1843, 1873, 1917, 1919, 2033, 2394, 2417, 2446, 2502, 2531, 2575, 2593); *Funt Carmen* (2571, 2579, 2587, 2589, 2593); *Gârleșteanu E.* (2579, 2580, 2596, 2601); *Gherlan Vasile* (P; 1140, 1198, 1250, 1357, 1413, 1558, 1561, 1957, 1974, 2001, 2018, 2268, 2275, 2468, 2487, 2554, 2557, 2560, 2579, 2580, 2587, 2588, 2592, 2593, 2596, 2599, 2601, 2602); *Neguț Ion* (2217, 2219, 2230, 2287, 2588, 2596, 2597, 2598, 2602). *Nicoară Mircea* (2571. 2596, 2599); *Pantea Alex.* (1593, 2018, 2596, 2599, 2602); *Păsărin Gheorghe* (1971, 2025, 2087, 2323, 2531); *Pisanca Ionel* (N; P; 2421, 2434, 2511, 2521, 2528, 2531, 2536, 2587, 2596, 2604); *Purcea Ion* (2025, 2047, 2063, 2096, 2103, 2110, 2572, 2587, 2591, 2592, 2596, 2597, 2598, 2599); *De Sabata Ion* (2553, 2554, 2564, 2571, 2574, 2587, 2593); *Schlomiuk Norberth* (2587): *Tămășescu Virgil* (2523, 2537, 2555, 2566, 2574, 2579, 2587).

ANUL XXVIII. MAI 1948. No. 3.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA
PREȚUL ABONAMENTULUI ESTE 300 LEI ANUAL PENTRU PARTICULARI
ȘI 600 LEI PENTRU INSTITUȚII
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRĂINĂTATE ESTE DE 600 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **VINCENZO G. CAVALLARO**: LA GÉNÉRATION PLUS NATURELLE DES CERCLES DE NEUBERG PAR LES SEGMENTS TORRICELLIENS, ETC.
2. NOTA MATEMATICA 5.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 460, 1405, 1413, 1925. 1953, 2417, 2428, 2442, 2444, 2491, 2530, 2568, 2580, 2593.
5. PROBLEME PROPUSE: 2615-2704.
6. INFORMATII.

„Tipografia Românească", Timişoara.
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebue să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Am primit 17 abonamente dela elevii lic. „Mircea cel Bătrân" din Constanţa. Le urăm spor la lucru.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara, conţinând articole, note, probleme propuse şi rezolvate, vor fi trimise pe adresa: Prof. V. Alaci, Politehnica, Timişoara.

Administraţia revistei aduce la cunoştinţa generală următoarele:

1. Abonamentul pe anul XXVIII (15 Martie 1948 — 15 Februarie 1949) este 300 lei pentru particulari şi 600 pentru instituţii.

2. Taxa de membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este de 200 lei.

3. Volumele I, XXIII, XXV, XXVI şi XXVII sunt epuizate. Celelalte volume broşate se găsesc de vânzare cu preţul de 300 lei fiecare. La această sumă se va adăoga 50 lei costul expediţiei. In caz că se comandă mai multe volume se va adăoga la taxa de 26 lei pentru recomandat, câte 20 lei pentru fiecare volum.

4. Se găsesc de vânzare numere izolate din colecţie chiar din volumele epuizate. Preţul unu număr este de 30 lei la care se adaogă 2 lei expediţia. Din vol. XXVII se găsesc de vânzare no 1, 4—12.

5. Se primesc reclamaţii că se pierde revista prin poştă. Aceste reclamaţii sunt adunate în ordinea sosirii lor şi vor fi sătisfăcute la 15 Februarie 1949 când se vor vedea ce numere rămân descomplectate după legarea volumelor întregi. Orice reclamaţie de pierderea unui număr nu este luată în seamă decât la o lună dela data apariţiei acelui număr.

6. Tot ce priveşte administraţia se va adresa D-lui Prof. **Gh. Th. Gheorghiu** str. Voltaire Nr. 1, Timişoara I. Reclamaţiile ce necesită răspuns vor fi însoţite de o carte poştală timbrată legal.

7. Orice sumă destinată revistei se poate trimite prin CEC sub contul n-rul 85208 sau prin mandat postal D-lui Prof. **Gh. Th. Gheorghiu** pe adresa de mai sus.

ANUL XXVIII — No 3. TIMISOARA, 1948 MAI 15

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

Prețul abonamentului este 300 lei pentru particulari și 600 lei pentru instituții.
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. GH. TH. GHEORGHIU
Timișoara I, Str. Voltaire, No. 1.

LA GÉNÉRATION PLUS NATURELLE DES CERCLES DE NEUBERG PAR LES SEGMENTS TORRICELLIENS, ETC.

PAR
M. VINCENZO G. CAVALLARO
(Cefalu, Sicile)

I. Préliminaires.

Soient $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ les côtés d'un triangle fondamental d'aire Δ. On sait que les droites joignant les sommets A, B, C aux sommets (L, M, N) et (L', M', N') des triangles équilatéraux construits extérieurement et intérieurement sur les côtés BC, CA, AB se coupent aux *centres isogones* Z, Z' du triangle et que les distances (AL, BM, CN) sont égales ainsi que les distances (AL', BM', CN').

La figure ainsi construite est nommée *figure de Torricelli.*

Posons $AL=BM=CN=T$; $AL'=BM'=CN'=T'$. Dans deux Notes publiées en *Giornale di Mathematiche di Battaglini*, (Napoli, 1927) et *Mathesis* (Bruxelles, 1938) j'ai nommé *segments torricelliens*, les segments (T, T') immédiatement construibles et *invariables* en chaque sommet du triangle.

On sait que les triangles ayant les sommets aux centres des triangles équilatéraux (BCL, CAM, ABN); (BCL', CAM', ABN') sont aussi équilatéraux. Soient l et l' leurs côtés, respectivement Si G est le centre de gravité du triangle ABC, posons

$$GZ'=\lambda; \quad GZ=\lambda' \qquad (\lambda>\lambda')$$

et l'on a (*V. G. Cavallaro. Giorn. di Battaglini*, 1927, Napoli)

$$(1) \qquad \frac{l}{l'}=\frac{\lambda}{\lambda'}=\frac{T}{T'}.$$

II. Formules fondamentales.

Soit: V l'*angle de Brocard* et V_1 et V_2 *le premier* et *le second angle de Steiner* du triangle fondamental (pour tels angles on peut voir le traité de Géométrie de *E. Rouché — Ch. De Comberousse*, I, 1935, p. 477, Gauthier Villars, Paris).

C'est (*Vinc. G. Cavallaro Mathesis*, 1938, p. 174).

$$(2) \qquad \operatorname{tang} V=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{T^2-T'^2}{T^2+T'^2};$$

$$\operatorname{tang} V_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{T-T'}{T+T'}; \quad \operatorname{tang} V_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{T+T'}{T-T'}.$$

Remarque. Le (2) donnent facilement

$$V_1<V<V_2; \quad \operatorname{tang}(V_1+V_2)=\operatorname{cotg} V;$$
$$V+V_1+V_2=90^0.$$

Remarque. En vertu de la relation (1), on peuvent substituer à T et T' dans les formules (2) soit l et l' que λ et λ'.

III. Considérations généalogique.

Dit l'Encyclopédie des Mathem. (Vol. II, première partie, p. 201, Hoepli, Milano 1937) et M. *C. Alasia* dans son livre „La récente Géometria del triangle" (*S. Lapi*, Città di Castello, 1900, pp. 60, 203, 269) que M. *J. Neuberg* a trouvé trois cercles notables correspondants respectivement aux côtés BC, CA, AB du triangle et tels que chacun d'eux a la propriété cardinale que le triangle ayant pour base, par exemple le coté BC du triangle fondamental et pour sommet opposé un point quelconque X du cercle de *Neuberg* correspodant à BC, est *équibrocardien* avec le triangle fondamental, c'est-à-dire ABC et BCX ont *même angle de Brocard*, V. Je n'ai pu examiner les travaux de *M. Neuberg* cités par l'encyclopédie indiquée et publiées dans *Mathesis* (2), 1882, p. 99 et „Comptes Rendus de l'Ass. Franc." Congrès d'Orano 1888,

p. 135—144, deuxième partie, et donc je ne sais pas *le processus psychologique et historique* suivi par M. *Neuberg* pour trouver les cercles que aujourd'hui portent son nom. Or est important d'observer que ma méthode pour le retrouver vient presque spontanément à l'aide de mes formules (2) que'employent explicitement les segments torricelliens et que telle méthode est la plus naturelle possible Allons, en effet à le voir.

IV. Théorème fondamental

Si nous voulons que le triangle DEF, ayant pour segments torricelliens les segments τ, τ', soit *équibrocardien* au triangle fondamental ABC, est nécessaire que l'on ait, en vertu des formules (2):

$$(s) \qquad \frac{T^2 - T'^2}{T^2 + T'^2} = \frac{\tau^2 - \tau'^2}{\tau^2 + \tau'^2}$$

d'où

$$(s') \qquad \frac{T}{T'} = \frac{\tau}{\tau'}.$$

Réciproquement, si a lieu (s') on déduit (s) et en vertu des (2), on a donc la *Théorème fondamental*: *Pourque deux triangles aient même angle de Brocard il faut et il suffit que le rapport des deux segments torricelliens correspondants à l'un d'eux soit égal au rapport des deux segments torricelliens correspondant à l'autre triangle.*

Et à cause des (2), on a le *Corrollaire*: *Si deux triangles sont équibrocardiens (ont même angle de Brocard) ils sont aussi equisteineriens (les deux angles de Steiner de l'un d'eux sont égaux respectivement aux deux angles de Steiner de l'autre). Et réciproquement.*

V. Les cercles dits de Neuberg.

Donc, étant AL=T, AL'=T' les segments torricelliens du triangle fondamental ABC, si nous voulons construire un triangle DEF équibrocardien à ABC, il suffit à construire DEF de manière que, dits τ, τ' les segments torricelliens correspondants à DEF, on ait:

$$\frac{T}{T'} = \frac{\tau}{\tau'}.$$

Mais si nous tirons la bissectrice intérieure et extérieure de l'angle A du *triangle torricellien* ALL' et nous disons respectivement P_a et Q_a les points de rencontre avec la droite LL', qu'est perpendiculaire à $BC = a$ dans son point moyen A_0 et si sur le segment $P_a\,Q_a$, pris comme diamètre, décrivons le cercle $\{N_a\}$, de centre N_a, tel cercle est *le cercle d'Appllonio du triangle torricellien* ALL' *par rapport au côté* LL'; et, comme on sait, est le lieu des points X tels que chacun d'eux a de L et L' distances proportionnelles aux côtés AL=T, AL'=T'. Les points P_a et Q_a divisent harmoniquement le segment LL' dans le rapport donné. Puisque tout triangle BCX a pour segments torricelliens les segments $XL = \tau$, $XL' = \tau'$ et on a $\frac{T}{T'} = \frac{\tau}{\tau'}$, le triangle BCX est équibrocardien à ABC.

Le cercle $\{N_a\}$ on appelle *cercle de Neuberg correspondant au côté* $BC = a$ *du triangle* ABC.

Comme le raisonement fait par rapport au côté $BC = a$, on peut répéter par rapport aux côtés $CA = b$, $AB = c$, nous avons ainsi trois cercles de *Neuberg* $\{N_a\}$, $\{N_b\}$, $\{N_c\}$ correspondants aux côtés BC=*a*, CA=*b*, AB=*c* du triangle ABC. On a donc la suivante

Proposition. Les trois cercles de Neuberg $\{N_a\}$, $\{N_b\}$, $\{N_c\}$ *d'un triangle* ABC *ne sont pas autre chose que les trois cercles d'Apollonius des triangles torricelliens* ALL', BMN' CNN', *ces cercles pris par rapport aux côtés* LL', MM', NN' qui sont sur les axes des cotés BC, CA, AB, *aux points* A_0, B_0, C_0.

Remarque. Les cercles ayant pour diamètres les segments LL', MM', NN' *sont orthogonals aux cercles* $\{N_a\}$, $\{N_b\}$, $N_c\}$, *respectivement.*

VI. Formulaire

Étant $LL' = a\sqrt{3}$; $MM' = b\sqrt{3}$; $NN = c\sqrt{3}$, on a

$$(I)\begin{cases} P_aL = a\sqrt{3}\frac{T}{T+T'},\ P_bM = b\sqrt{3}\frac{T}{T+T'},\ P_cN = c\sqrt{3}\frac{T}{T+T'} \\ Q_aL = a\sqrt{3}\frac{T}{T-T'},\ Q_bM = b\sqrt{3}\frac{T}{T-T'},\ Q_cN = c\sqrt{3}\frac{T}{T-T'} \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_aL' = a\sqrt{3}\frac{T'}{T+T'},\ P_bM' = b\sqrt{3}\frac{T'}{T+T'},\ P_cN' = c\sqrt{3}\frac{T'}{T+T'} \\ Q_aL' = a\sqrt{3}\frac{T'}{T-T'},\ Q_bM' = b\sqrt{3}\frac{T'}{T-T'},\ Q_cN' = c\sqrt{3}\frac{T'}{T-T'} \end{cases}$$

Si ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c sont les rayons des cercles $\{N_a\}$, $\{N_b\}$ $\{N_c\}$, puisque $P_aQ_a=2\varrho_a=P_aL'+Q_aL'$; et analogues, nous avons

$$(II)\quad \begin{cases} \varrho_a=a\sqrt{3}\,\dfrac{T\,T'}{T^2-T'^2}; \quad \varrho_b=b\sqrt{3}\,\dfrac{T\,T'}{T^2-T'^2}; \\ \varrho_c=c\sqrt{3}\,\dfrac{T\,T'}{T^2-T'^2}. \end{cases}$$

Puis, en vertu de la première formule (2) (§ II)

$$(II')\quad \begin{matrix} \varrho_a=\frac{1}{2}\,a\,\sqrt{\cotg^2V-3}; & \varrho_b=\frac{1}{2}\,b\,\sqrt{\cotg^2V-3}; \\ \varrho_c=\frac{1}{2}\,c\,\sqrt{\cotg^2V-3}. \end{matrix}$$

Les formules (I) et (2) donnent

$$(III)\quad \begin{cases} \dfrac{P_aL'}{Q_aL'}=\dfrac{P_bM'}{Q_bM'}=\dfrac{P_cN'}{Q_cN'}=\dfrac{T-T'}{T+T'}=\sqrt{3}\,.\,\tang V_1 \\ \dfrac{Q_aL}{P_aL}=\dfrac{Q_bM}{P_bM}=\dfrac{Q_cN}{P_cN}=\dfrac{T+T'}{T-T'}=\sqrt{3}\,.\,\tang V_2 \end{cases}$$

Nous avons aussi, étant

$$A_0P_a=A_0L'-P_aL';\ A_0Q_a=A_0L'+Q_aL';\ \ldots$$

(et analogues) et en cause des formules (I) et (2):

$$\begin{cases} A_0P_a=\frac{1}{2}\,a\sqrt{3}\,\dfrac{T-T'}{T+T'}=\dfrac{1}{2}\,a\cotg V_2=\dfrac{3}{2}\,a\tang V_1 \\ A_0Q_a=\dfrac{1}{2}\,a\,\sqrt{3}\,\dfrac{T+T'}{T-T'}=\dfrac{1}{2}\,a\cotg V_1=\dfrac{3}{2}\,a\tang V_2 \end{cases}$$

$$(IV)\quad \begin{cases} B_0P_b=\dfrac{1}{2}\,b\,\sqrt{3}\dfrac{T-T'}{T+T'}=\dfrac{1}{2}\,b\cotg V_2=\dfrac{3}{2}\,b\tang V_1 \\ B_0Q_b=\dfrac{1}{2}\,b\,\sqrt{3}\dfrac{T+T'}{T-T'}=\dfrac{1}{2}\,b\cotg V_1=\dfrac{3}{2}\,b\tang V_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_0P_c=\dfrac{1}{2}\,c\,\sqrt{3}\,\dfrac{T-T'}{T+T'}=\dfrac{1}{2}\,c\cotg V_2=\dfrac{3}{2}\,c\tang V_1 \\ C_0Q_c=\dfrac{1}{2}\,c\,\sqrt{3}\,\dfrac{T+T'}{T-T'}=\dfrac{1}{2}\,c\cotg V_1=\dfrac{3}{2}\,c\tang V_2 \end{cases}$$

Puis

$$(V)\quad \frac{A_0P_a}{A_0Q_a}=\frac{B_0P_b}{B_0Q_b}=\frac{C_0P_c}{C_0Q_c}=\left(\frac{T-T'}{T+T'}\right)^2=3\,.\,\tang^2V_1$$

Pour les segments $A_0N_a=A_0P_a+\varrho_a$; $B_0N_b=B_0P_b+\varrho_b$; $C_0N_c=C_0P_c+\varrho_c$ obtenons, en cause des (IV), (II) et de la remarque du § II:

$$(VI)\quad \begin{cases} A_cN_a=\dfrac{1}{2}\,a\sqrt{3}\dfrac{T^2+T'^2}{T^2-T'^2}=\dfrac{1}{2}\,a\cotg V=\dfrac{1}{2}\,a\tang(V_1+V_2) \\ B_0N_b=\dfrac{1}{2}\,b\sqrt{3}\dfrac{T^2+T'^2}{T^2-T'^2}=\dfrac{1}{2}\,b\cotg V=\dfrac{1}{2}\,c\tang(V_1+V_2) \\ C_0N_c=\dfrac{1}{2}\,c\,\sqrt{3}\dfrac{T^2+T'^2}{T^2-T'^2}=\dfrac{1}{2}\,c\cotg V=\dfrac{1}{2}\,c\tang(V_1+V_2) \end{cases}$$

tandis que en vertu des formules (IV) et (VI), vient demontré que

$$(VII)\quad \begin{cases} \text{angle } BQ_aC=CQ_bA=AQ_cB=2V_1 \\ \text{angle } BP_aC=CP_bA=AP_cB=2V_2 \\ \text{angle } BN_aC=CN_bA=AN_cB=2V. \end{cases}$$

Et aussi *si prolongeons par exemple* $BC=a$, *d'un segment* $CS=BC=a$, *les droites joignant le point* S *avec les deux points* P_a *et* Q_a *forment avec la droite* BCS *les deux angles de Steiner* V_1 *et* V_2 *correspondant au triangle* ABC.

Remarque. Ayant

$$(VIII)\quad \begin{matrix} A_0P_a\,.\,A_0Q_a=\frac{3}{4}\,a^2; & B_0P_b.B_0Q_b=\frac{3}{4}\,b^2; \\ & C_0P_c\ C_0Q_c=\frac{3}{4}\,c^2 \end{matrix}$$

on voit que *la somme des puissances des points moyens* A_0, B_0, C_0 *des côtés* BC, CA, AB *par rapport aux cercles des Neuberg correspondants, est égale à la somme des carrés des medianes du triangle fondamental:*

$$\Sigma A_0P_a\,.\,A_0Q_a=\tfrac{3}{4}\,(a^2+b^2+c^2)=m_a^2+m_b^2+m_c^2.$$

Remarque. A cause de la relation (1) du § 1, on peut substituer dans les formules précédentes aux lettres T et T′ soit l et l' que λ et λ', respectivement.

VII. Formules radiales notables, etc.

Si p_a, p_b, p_c sont les distances du point de *Lemoine*, K, du triangle ABC aux côtés $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, on sait que

$$(i)\qquad \cotg V=\frac{a}{2\,p_a}=\frac{b}{2\,p_b}=\frac{c}{2\,p_a}$$

et aûsi les (II′) donnent

$$(IX)\qquad \begin{cases} \varrho_a = \dfrac{a}{4p_a}\sqrt{a^2 - 12p_a^2} \\ \varrho_b = \dfrac{b}{4p_b}\sqrt{b^2 - 12p_b^2} \\ \varrho_c = \dfrac{c}{4p_c}\sqrt{c^2 - 12p_c^2}. \end{cases}$$

Soient: σ le rayon du cercle de *Brocard;* ϱ_1 et ϱ_2 les rayons du premier et du second cercle de *Lemoine;* Ω et Ω_1 les foyers de l'ellipse de *Brocard* et 2α et 2β les longueurs des correspondants axes (par rapport au triangle fondamental). On sait (*Vinc. G. Cavallaro Bullet. l'École Polytech. de Timişoara,* 1941) que si R est le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC, on a;

$$(j)\qquad \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\varrho_1}{\varrho_2};\quad \varrho_1^2 = \varrho_2^2 + \sigma^2; \\ R^2 = 3\varrho_1^2 + \sigma^2 = 3\varrho_2^2 + 4\sigma^2 = 4\varrho_1^2 - \varrho_2^2; \\ \operatorname{cotg} V = \dfrac{R}{\varrho_2};\ \dfrac{\Omega\Omega'}{2\alpha} = \dfrac{\sigma}{\varrho_1};\ \dfrac{\Omega\Omega'}{2\beta} = \dfrac{\sigma}{\varrho_2}; \end{cases}$$

et les (VI), (i), (j) donnent

$$(X)\qquad \begin{cases} A_0N_a = \dfrac{a^2}{4p_a} = \dfrac{1}{2}a\dfrac{R^2}{\varrho_2} = \dfrac{R^2}{\varrho_2}\sin A \\ B_0N_b = \dfrac{b^2}{4p_b} = \dfrac{1}{2}b\dfrac{R^2}{\varrho_2} = \dfrac{R^2}{\varrho_2}\sin B \\ C_0N_c = \dfrac{c^2}{4p_c} = \dfrac{1}{2}c\dfrac{R}{\varrho_2} = \dfrac{R^2}{\varrho_2}\sin B \end{cases}$$

tandis que les (II') en vertu des (j) fournissent

$$(XI)\qquad \begin{cases} \varrho_a = a\sqrt{\left(\dfrac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^2 - 1} = a\sqrt{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 1} = \dfrac{a\sigma}{\varrho_2} = a\dfrac{\Omega\Omega'}{2\beta} \\ \varrho_b = b\sqrt{\left(\dfrac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^2 - 1} = b\sqrt{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 1} = \dfrac{b\sigma}{\varrho_2} = b\dfrac{\Omega\Omega'}{2\beta} \\ \varrho_c = c\sqrt{\left(\dfrac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^2 - 1} = c\sqrt{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 1} = \dfrac{c\sigma}{\varrho_2} = c\dfrac{\Omega\Omega'}{2\beta} \end{cases}$$

Remarque. Des formules (II), (XI) on a

$$\frac{\varrho_2}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{T}{T'} - \frac{T'}{T}\right) = \frac{a}{\varrho_a} = \frac{b}{\varrho_b} = \frac{c}{\varrho_c}$$

et des (XI)

$$\frac{\varrho_a\varrho_b\varrho_c}{\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c} = \frac{abc}{a+b+c}\left(\frac{\sigma}{\varrho_2}\right)^2 = 2R\tau\left(\frac{\sigma}{\varrho_2}\right)^3$$

où τ est le rayon du cercle inscrit au triangle ABC.

VIII. Une notable propriété du triangle spécial ayant maximum la distance brocardienne $\Omega\Omega'$.

On sait *Vinc. G. Cavallaro, Mathesis,* 1939, p. 155...) que dans. le triangle ayant maximum la distance brocardienne $\Omega\Omega$, est

$$\varrho_2 = \sigma$$

et par suite, en cause des formules générales (XI), on a le *Théorème: Dans le triangle où est maximum la distance brocardienne* $\Omega\Omega'$, les rayons des cercles de *Neuberg* correspondants aux côtés du triangle sont égaux respectivement aux mêmes côtés

$$\varrho_a = a;\quad \varrho_b = b;\quad \varrho_c = c.$$

Dans ce triangle spécial est, en cause des formules (IX),

$$a = \varrho_a = p_a\sqrt{28};\ b = \varrho_b = p_b\sqrt{28};\ c = \varrho_c = p_c\sqrt{28}.$$

(Pour autres propriétés voir ma Note de *Mathesis,* 1939).

IX. **Remarque.** Considerons, par exemple, le cercle de *Neuberg* $\{N_a\}$ correspondant au côté $BC = a$ du triangle quelconque ABC et un point genérique X de la circonférence $\{N_a\}$. Comme les triangles ABC, BCX ont même angle de *Brocard,* on voit, en vertu de formules (i) de § VII, que le lieu géométrique du point de *Lemoine* du triangle variable BCX, lorsque X varie sur $\{N_a\}$, est un segment s de droite parallèle au côté BC, en passant par le point de *Lemoine* K du triangle ABC. Tel segment s rencontre l'axe de BC en un point A_1, moyen de s, sommet du *premier triangle de Brocard* et point de *Lemoine* commune des triangles isosceles BCP_a, BCQ_a.

X. Démonstrations de formules connues.

Il vient de donner une plus simple demonstration de quelques relations connues qu'on trouvent demontrées par la Géometrie analityque dans le livre cité de M *C. Alasia,* p. 269, et où il y a quelques coquilles.

Soient O et R le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC. Si ABC est aigutangle, on a, comme on sait

$$A_0O=\frac{1}{2}a\operatorname{cotg}A,\quad B_0O=\frac{1}{2}b\operatorname{cotg}B;$$

(m)

$$C_0O=\frac{1}{2}c\operatorname{cotg}C$$

et si ABC est quelconque

(n) $$\operatorname{cotg}V=\operatorname{cotg}A+\operatorname{cotg}B+\operatorname{cotg}C.$$

Il est facile à exprimer les distances de O aux centres N_a, N_b, N_c. En vertu des (VI) et des (m), (n) on a

$$ON_a=A_0N_a-A_0O=\frac{1}{2}a(\operatorname{cotg}V-\operatorname{cotg}A)=$$

$$=\frac{1}{2}a(\operatorname{cotg}B+\operatorname{cotg}C)=\frac{1}{2}a\frac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C}=$$

$$\frac{1}{2}a\frac{\sin A}{\sin B\sin C}$$

mais, $a=2R\sin A$, $\Delta=2R^2\sin A\sin B\sin C$, donc

$$ON_a=\frac{a^3}{4\Delta}.$$

Ainsi

$$ON_a=\frac{1}{2}a(\operatorname{cotg}B+\operatorname{cotg}C)=\frac{a^3}{4\Delta}$$

(p) $$ON_b=\frac{1}{2}b(\operatorname{cotg}C+\operatorname{cotg}A)=\frac{b^3}{4\Delta}$$

$$ON_c=\frac{1}{2}c(\operatorname{cotg}C+\operatorname{cotg}B)=\frac{c^3}{4\Delta}$$

et $$\frac{ON_a}{a}=\frac{ON_b}{b^3}=\frac{ON_c}{c^3}=\frac{1}{4\Delta}$$

$$\frac{ON_a}{a}+\frac{ON_b}{b}+\frac{ON_c}{c}=\frac{a^2+b^2+c^2}{4\Delta}=\operatorname{cotg}V$$

$$ON_a\cdot ON_b\cdot ON_c=\left(\frac{abc}{4\Delta}\right)^3=R^3.$$

Si le triangle A B C est obtusangle, par exemples au sommet A, sera $ON_a=A_0N_a+A_0O$; mais $A_0O=-\frac{1}{2}a\operatorname{cotg}A$ et ainsi les formules (p) restent invariables.

Souvenir de propriété classiques.

Les triangles isosceles (BCP_a, CAP_b, ABP_c,) étant semblables et ainsi les triangles isosceles (BCQ_a, CAQ_b, ABQ_c) et (BCN_a, CAN_b, ABN_c), les droites (AP_a, BP_b, CP_c) concourent en un même point et ainsi les droites (AQ_a, BQ_b, CQ_c) et (AN_a, BN_b, CN_c). Ces trois points sont sur l'hyperbole de *Kiepert* du triangle ABC. Les droites (AN_a, BN_b, CN_c) passent par le point de *Tarry* du triangle ABC (*Alasia lieu cité*, p. 204; *Encyclopédie citée* p. 201).

Les tangentes en A,B,C aux cercles $\{N_a\}$, $N_b\}$, $\{N_c\}$, concourent dans le point de *Steiner* du triangle fondamental. Comme on sait les points de *Tarry* et de *Steiner* sont sur le cercle circonscrit au triangle ABC et diamétralement opposés.

Les droites (AN_a, BN_b, CN_c) sont perpendiculaires aux côtés correspondants du premier triangle de *Brocard*. Le cercle $\{N_a\}$ est orthogonal aux deux cercles de rayon $BC=a$ ayant leurs centres en les points B et C. De même pour les cercles $\{N_b\}$, $\{N_c\}$ (*Encycl* p. 202). Les droites AA_1, BB_1, CC_1, joignant les sommets A,B,C du triangle ABC aux sommets A_1, B_1, C_1 de son premier triangle de *Brocard* $A_1B_1C_1$ concourent en un même point de l'hyperbole de *Kiepert* et sont respectivement perpendiculaires aux côtés correspondants du triangle $N_aN_bN_c$ ayant ses sommets aux centres des cercles de *Neuberg*. (*Alasia*, p. 204). Etc.

NOTA MATEMATICA

5. — *Dezvoltarea în serie a funcţiei*

$$f(x)=\operatorname{arc}sp\,x,\quad 0\leqslant\operatorname{arc}sp\,x\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

Vom folosi cunoscuta dezvoltare în serie *Maclaurin*

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f_{(0)}^{(n-1)}+\cdots$$

Trebuesc deci calculate derivatele succesive ale funcţiei date.

Prima derivată a funcţiei date, în ipoteza din enunţ, este

$$f'(x)=\frac{1}{2x^2-2x+1}=\frac{2}{(2x-1)^2+1}$$

(*Trigonometria patratică*, p. 38).

Mai putem scrie evident

$$f'(x)=\frac{1}{i}\left(\frac{1}{2x-1-i}-\frac{1}{2x-1+i}\right)=$$

$$\frac{1}{i}[(2x-1-i)^{-1}-(2x-1+i)^{-1}],\quad (i=\sqrt{-1}).$$

Derivatele succesive sunt următoarele,

$$f''(x)=(-1)\frac{2}{i}[(2x-1-i)^{-2}-(2x-1+i)^{-2}],$$

$$f'''(x)=(-2)^2\frac{2!}{i}2^2[(2x-1-i)^{-3}-(2x-1+i)^{-3}],$$

. . . . . .

(2) $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{i}2^{n-1}[(2x-1-i)^{n-1}-(2x-1+i)^{-n}]$

. . . . . .

Toate aceste derivate, pentru $x=0$, sunt cuprinse în formula

(3) $f^{(n)}(0)=\frac{(n-1)!2^{n-1}}{i}[(1-i)^{-n}-(1+i)^{-n}]$, $(n=1,2,...)$.

Cum

$$1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right),\quad 1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right),$$

şi prin urmare,

$$(1-i)^{-n}=\frac{1}{(\sqrt{2})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right),$$

$$(1+i)^{-n}=\frac{1}{(\sqrt{2})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\right),$$

rezultă că expresia (3), după unele simplificări devine

(4) $f^{(n)}(0)=(n-1!(\sqrt{2})^n\sin\frac{n\pi}{4}$, $(n=1,2,...)$.

Având astfel derivatele succesive pentru $x=0$ şi observând că $f(0)=0$, dezvoltarea (1) devine

$$\text{arc}sp\,x=\frac{\sqrt{2}\,x}{1}\sin\frac{\pi}{4}+\frac{(\sqrt{2}\,x)^2}{2}\sin\frac{\pi}{2}+\frac{(\sqrt{2}\,x)^3}{3}\sin\frac{3\pi}{4}+$$

$$\cdots+\frac{(\sqrt{2}\,x)^{n-1}}{n-1}\sin\frac{(n-1)\pi}{4}+\cdots$$

sau încă

(5) $$\text{arc}\,sp\,x=x+x^2+\frac{2}{3}x^3-\frac{4}{5}x^5-\cdots$$
$$+\frac{(\sqrt{2}\,x)^{n-1}}{n-1}\sin\frac{(n-1)\pi}{4}+\cdots$$

termenii care conţin pe $\sin\frac{n\pi}{4}$ cu n=mult. 4, fiind nuli.

Aceasta este dezvoltarea cerută, dar rămâne să arătăm convergenţa seriei (5), să găsim intervalul ei de convergenţă şi dacă în acest interval restul R_n pentru $n=\infty$ tinde la zero.

Convergenţa şi intervalul de convergenţă al seriei (5).

Observăm că termenii seriei (5) sunt respectiv mai mici, sau cel mult egali decât acei ai seriei cu termenul general

(6) $$u_n=\frac{(\sqrt{2}\,x)^n}{n}.$$

Cum avem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2}\,x\frac{n}{n-1}=\sqrt{2}\,x,$$

rezultă că, dacă

$$|\sqrt{2}\,x|<1,\quad\text{deci}\quad |x|<\frac{\sqrt{2}}{2},$$

seria (6), conform teoremei lui *Abel* este absolut convergentă în intervalul simetric $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Deducem de aci că seria (5) admite intervalul de convergenţă $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, fiindcă prima formulă de derivare ce am folosit-o la început este valabilă numai dacă $0<\text{arc}\,sp\,x\leq\frac{\pi}{2}$.

Studiul restului R_n. Expresia restului după *Lagrange* este,

$$R_n=\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x),\qquad 0<\theta<1.$$

În cazul nostru, ţinând seamă de relaţia (2), putem scrie

(7) $R_n=(-1)^{n-1}\frac{2^{n-1}}{i}\cdot\frac{x^n}{n}[(2\theta x-1-i)^{-n}(2\theta x-1+i)^{-n}]$

Determinând un unghiu φ astfel ca să avem

$$2\theta x-1=\text{cotg}\,\varphi,$$

expresia (7) devine

$$R_n=(-1)^{n-1}\frac{(2x)^n}{2in}\cdot\frac{(\cos\varphi-i\sin\varphi)^{-n}-(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{-n}}{\sin^{-n}\varphi},$$

sau

$$R_n=(-1)^{n-1}\cdot\frac{(2x)^n}{n}\cdot\sin n\varphi\sin^n\varphi.$$

Rezultă de aci, că

$$\lim_{n\to\infty}R_n=0,\quad\text{pentru}\quad |x|<\frac{1}{2},$$

fiindcă factorul $\frac{(2x)^n}{n}$, pentru $|x|<\frac{1}{2}$, este termenul general al uneii serii convergente, deci tinde la zero apoi $\sin n\varphi$ este finit pentru $n\to\infty$, iar factorul $\sin^n\varphi$ tinde la zero pentru $n=\infty$.

Dar noi am arătat mai sus că seria (5) este convergentă în intervalul $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, acum însă vedem că dezvoltarea (5) nu este valabilă, decât pentru intervalul $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, adică pentru $0<\text{arc}\,sp\,x<45^0$.

V. ALACI

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul LIII, No. 8, Aprilie 1948. Despre poligoane armonice, de *V Thébault*. O problemă de actualitate, de *R. Bădescu*. Raportul comisiunei pentru premiul „Ing. *Al. Roşu*", de *A. D. Bunescu*, *Al. A. Roşu*, *D. Stan*. Raport pentru premiul „*Gh. Em. Filipescu*", de *I. S. Antoniu*, *N. Petrulian*, *D. Stan*, *C. C. Teodorescu*. Note matematice. Probleme rezolvate şi propuse.

2. *I. G. Murgulescu*, und *E. Latiu*: Die konduktometrische Bestimmung und der freien Säure im Aluminiumsulfat. (Sonderabdruck aus der „Zeitschrift für analytische Chimie" 1948).

3. *I. G Murgulescu* und *E. Latiu:* Refraktometrische Methoden für die Analyse von Lösungen (Id.).

4. *I. G. Murgulescu* und *Filofteia Dobrescu:* Die quantitative Fällung von Blei als basisches Bleisalicylat. (Id.).

PROBLEME REZOLVATE

Problema 460. — *Punând*

$$\alpha=(y^2-a^2)(z^2-a^2),\quad \beta=(z^2-a^2)(x^2-a^2),$$
$$\gamma=(x^2-a^2)(y^2-a^2),$$

să se demonstreze identităţile

$$yz\alpha^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=zx\beta^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=$$
$$xy\gamma^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=a^2u(2u^2-1),$$

funcţia u fiind dată de relaţia

$$au=\frac{xyz}{a^2-\alpha^{\frac{1}{2}}-\beta^{\frac{1}{2}}-\gamma^{\frac{1}{2}}}.$$

V. VALCOVICI.

Soluţia. Scriem ultima relaţie sub forma

$$(1)\qquad (a^2-\alpha^{\frac{1}{2}}-\beta^{\frac{1}{2}}-\gamma^{\frac{1}{2}})au=xyz$$

şi o derivăm în raport cu y. Găsim

$$[-y(z^2-a^2)\alpha^{-\frac{1}{2}}-y(x^2-a^2)\beta^{-\frac{1}{2}}]au+$$
$$(a^2-\alpha^{\frac{1}{2}}-\beta^{\frac{1}{2}}-\gamma^{\frac{1}{2}})a\frac{\partial u}{\partial y}=xz,$$

sau, ţinând seama de (1),

$$(2)\qquad xyz\frac{\partial u}{\partial y}=xzu+y[(z^2-a^2)\alpha^{-\frac{1}{2}}+$$
$$(x^2-a^2)\gamma^{-\frac{1}{2}}]au^2.$$

In mod analog vom avea

$$(3)\qquad xyz\frac{\partial u}{\partial z}=xyu+z[(y^2-a^2)\alpha^{-\frac{1}{2}}+$$
$$(x^2-a^2)\beta^{-\frac{1}{2}}]au^2.$$

Relaţia (2) derivată în raport cu z, dă

$$xy\frac{\partial u}{\partial y}+xyz\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=xu+xz\frac{\partial u}{\partial z}+$$
$$yz\alpha^{-\frac{1}{2}}au^2+y[(z^2-a^2)\alpha^{-\frac{1}{2}}+(x^2-a^2)\gamma^{-\frac{1}{2}}]2au\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Această relaţie rezolvată în raport cu $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}$ şi ţinând seamă de (2) şi (3) duce la următoarea identitate

$$x^2y^2z^2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=xy^2[(z^2-a^2)\alpha^{-\frac{1}{2}}+$$
$$(x^2-a^2)\gamma^{-\frac{1}{2}}]au^2+xz^2[(y^2-a^2)\alpha^{-\frac{1}{2}}+$$
$$(x^2-a^2)\beta^{-\frac{1}{2}}]au^2+xy^2z^2\alpha^{-\frac{1}{2}}au^2+$$
$$x^2yzu+2yza^2u^3[1+(x^2-a^2)\beta^{-\frac{1}{2}}+$$
$$(x^2-a^2)\gamma^{-\frac{1}{2}}+(x^2-a^2)\alpha^{-\frac{1}{2}}],$$

care înmulţită cu $\alpha^{\frac{1}{2}}$ conduce mai departe.

$$(4)\qquad xy^2z^2\alpha^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=2xyza^2u^3+$$
$$[y^2z^2-a^2(y^2+z^2)+y^2\beta^{\frac{1}{2}}+z^2\gamma^{\frac{1}{2}}]au^2+xyz\alpha^{\frac{1}{2}}u.$$

Dar, înmulţind pe (1) cu $\alpha^{\frac{1}{2}}$ avem identitatea

$$[a^2\alpha^{\frac{1}{2}}-(y^2-a^2)(z^2-a^2)-(z^2-a^2)\gamma^{\frac{1}{2}}-$$
$$(y^2-a^2)\beta^{\frac{1}{2}}]au=xyz\alpha^{\frac{1}{2}},$$

încât putem scrie

$$[y^2z^2-a^2(y^2+z^2)+y^2\beta^{\frac{1}{2}}]au+xyz\beta^{\frac{1}{2}}=$$
$$(\alpha^{\frac{1}{2}}+\beta^{\frac{1}{2}}+\gamma^{\frac{1}{2}}-a^4)a^3u=-a^2xyz.$$

In baza acestei egalităţi, (4) se scrie

$$yz\alpha^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=a^2u(2u^2-1).$$

Analog se demonstrează celelalte identităţi din enunţ.

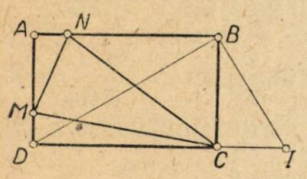
Observare. Forma sub care a apărut iniţial enunţul acestei probleme a fost puţin modificată din motive tehnice

Gh. Th. Gh.

Problema 1405. — *Se dă un dreptunghiu* ABCD. *Perpendiculara în* B *pe* DB *întâlneşte pe* DC *în* I. *Se ia pe* DA *şi* AB *segmentele* DM = AN = $\frac{1}{2}$CI. *Să se demonstreze că triunghiul* CMN *este isoscel.*

D. V. IONESCU.

Soluţia. Trebue să arătăm că MC = NC. Într'adevăr, în triunghiurile BNC şi MDC avem:



$$MC^2 = MD^2 + CD^2 = \frac{1}{4}CI^2 + CD^2,$$

$$NC^2 = NB^2 + BC^2 = (AB - \frac{1}{2}CI)^2 + BC^2$$

$$= \frac{1}{4}CI^2 - AC \cdot CI + AB^2 + BC^2 = \frac{1}{4}CI^2 + AB^2,$$

deoarece: AB . CI = CD . CI = BC^2. Cum CD = AB, rezultă MC = NC, adică ceiace trebuia arătat.

Au rezolvat problema Dra *Manolach El* şi Dnii *Amărăşteanu F. M., Apostol R., Arsenescu I., Bakonyi C., Bal Lascu, Bejenaru V., Bogza M., Cazanacli V. P., Constantinescu C. V., Deiculescu D. Gh., Enăchescu Gr. I., Florescu V., Godeanu V., Herman C., Ionescu F. P., Jidanu I. C., Kivu C. M., Lăzărescu St., Loziciu D. I., Lupescu Gh. Cor., Marica I. H., Marin-Gall P. T., Marţian V. M., Matei D. D., Milu I. N., Moisă I. Gh., Moisovici M. Şt., Negrea A. M., Negulescu D. Şt., Nicolaescu Const., Novac I. I., Pădureţ A. V., Pasăre I. Em., Petrescu An., Popa N., Popescu M. N., Postelnicescu C. M., Predoescu I. M., Rădulescu Gh. Oct., Rosenberg I., Săruleşteanu I. Em., Sechel T. M., Ştefănescu C., Ştefănescu D. N., Theodorescu N. Dor., Tincu C. C., Toma N. N., Wegener E. şi Zagaican I.*

Gh. Th. Gh.

Problema 1413. — *Se dă un triunghiu* ABC *dreptunghic în* A. *Pe cateta* AC *ca diametru, se construieşte un cerc care taie ipotenuza* BC *în* M; *se duce tangenta la cerc în* M, *ea taie a doua catetă în* M'. *Să se arate că dacă* $\sphericalangle B = 30^0$: 1° *Triunghiul* BMM' *este isoscel.* 2° *Triunghiul* BMA *este dreptunghiu.* 3° *Să se rezolve triunghiurile* ABC, BMM' şi BMA *cunoscând* AC = *b.*

MIHAIL BOTEZ

Soluţia 1° Cum unghiul AMC este drept fiind înscris într'un semicerc, $\sphericalangle MAC = \sphericalangle ABC = 30^0$. Dar, $\sphericalangle M'MB = \frac{1}{2}$ arc MC = $\sphericalangle MAC = 30^0$, adică triunghiul BMM' este isoscel.

2° AM fiind perpendiculară pe BC, triunghiul BMA este dreptunghiu.

3° Triunghiul ABC este jumătate dintr'un triunghiu echilateral, încât: AC = *b*, BC = 2*b*, AB = $b\sqrt{3}$. Pentru triunghiul BMM' observăm că şi triunghiul MM'A este isoscel (chiar echilateral) aşa că

$$MM' = BM' = M'A = \frac{1}{2}AB.$$

Deci:

$$BM' = MM' = \frac{1}{2}\sqrt{3}b, \quad BM = AB^2/BC = \frac{3}{2}b.$$

Infine pentru triunghiul ABM avem:

$$AB = b\sqrt{3}, \quad BM = \frac{3}{2}b, \quad AM = MM' = \frac{1}{2}\sqrt{3}b.$$

Au rezolvat problema D-ra *Naneş Cor.* şi Dnii *Amărăşteanu F. M., Andrievici N., Andrunachievici Vl., Apostol R., Bakonyi C., Bejenaru V., Bogza M., Cazanacli V. P., Chirvai I. V., Constantinescu C. V., Cristea I. N., Dimitriu A. P., Florescu L. L., Godeanu Ig. V., Herman Victor, Kivu C. M., Lăzărescu St., Lupescu Gh. Cor., Marica I. H., Matei D. D., Mihalcea V. V., Milu I. N., Moisă I. Gh., Moisovici M. Şt., Negrea A. Mircea, Negulescu D. Şt., Novac I. I., Pădureţ I. V., Pambucdjian K., Pasăre I. Em., Petrescu An., Popovici I. Gan., Postelnicu C. M., Rădulescu Gh. O., Sâmbotiu Gh., Sâruleşteanu I. Em., Secară M. D., Ştefănescu C., Ştefănescu D. N., Stoenescu D. M., Stoian S. I., Theodorescu N. Dorin, Tincu C. C., Vasiliu Gh. D., Wegener E. şi Zagaican I.*

Gh. Th. Gh.

Problema 1925. — *Se consideră şirul cu termenul general* u_n, *astfel ca*

$$u_n = p\,u_{n-1} + u_{n-2}, \quad u_0 = 1. \quad u_1 = p,$$

p fiind număr real dat.

Să se demonstreze că seria

$$\frac{1}{u_0 u_2} + \frac{1}{u_1 u_3} + \cdots + \frac{1}{u_n u_{n+2}} + \cdots$$

este convergentă şi să i se găsească suma.

M. GHERMANESCU

Soluţia. Dacă *u* şi *v* sunt rădăcinile ecuaţiei *caracteristice*

$$f(r) = r^2 - pr - 1 = 0,$$

atunci avem $u_n = A\,u^n + B\,v^n$. Scriind că $u_0 = 1$, iar $u_1 = p_1$ găsim pe A şi B obţinem

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{p^2+4}}\left[\left(\frac{p+\sqrt{p^2+4}}{2}\right)^{n+1} -\right.$$

$$\left(\frac{p-\sqrt{p^2+4}}{2}\right)^{n+1}\Bigg] = \frac{u^{n+1}-v^{n+1}}{\sqrt{p^2+4}}.$$

Ecuația $f(r)=0$ are o rădăcină pozitivă u și una negativă v: dacă $p>0$, rădăcina pozitivă u este mai mare decât valoarea absolută a rădăcinei negative v, deci $u_n>0$, iar seria dată are termenii pozitivi; dacă $p<0$, rădăcina negativă este mai mare în valoare absolută decât cea pozitivă, $u_n \gtrless 0$, după paritatea lui n, însă totdeauna $u_n u_{n+2}>0$, astfel că seria dată este, în toate cazurile, cu termenii pozitivi.

Ar mai fi de luat în considerare cazul $p=0$, pentru care $u_{2k}=u_0=1$, $u_{2k+1}=u_1=0$, iar seria dată are termeni infiniți, deci este divergentă.

În cazurile $p\neq 0$, având o serie cu termenii pozitivi, putem aplica unul oarecare din criteriile de convergență cunoscute; putem să ne dispensăm însă de aceasta, calculând direct suma primilor n termeni, din care va rezulta și convergența. Putem scrie, în adevăr,

$$p\,u_{n+1} = u_{n+2} - u_n$$

sau, împărțind ambii membrii prin produsul

$$u_n u_{n+1} u_{n+2},$$

$$\frac{p}{u_n u_{n+2}} = \frac{1}{u_n u_{n+1}} - \frac{1}{u_{n+1} u_{n+2}}.$$

In această egalitate, dăm lui n valorile $0, 1, 2, \ldots n$ și adunăm, găsim

$$(\alpha) \qquad p\sum_0^n \frac{1}{u_k u_{k+2}} = \frac{1}{u_0 u_1} - \frac{1}{u_{n+1} u_{n+2}}.$$

Observăm însă că — deoarece $u>|v|$, pentru $p>0$ — avem

$$\lim u_n = \frac{\lim u^{n+1}}{\sqrt{p^2+4}}\left[1-\left(\frac{v}{u}\right)^{n+1}\right] = \frac{\lim u^{n+1}}{\sqrt{p^2+4}} = \infty,$$

căci $u>1$, pentru $p>0$. Aceiaș limită găsim când $p<0$ deci, în ambele cazuri

$$\lim\left(\frac{1}{u_{n+1}u_{n+2}}\right)=0,$$

astfel că suma seriei propuse este $\frac{1}{p\,u_0 u_1} = \frac{1}{p^2}$.

Problema se tratează la fel dacă p este imaginar.

Notă. 1° La această problemă, singurul care a trimis o soluție este D. *Joh. Mahrenholz* care, după ce stabilește relația (α), conchide că suma seriei este $\frac{1}{p^2}$, fără a arăta însă că termenul complimentar tinde către zero, adică relația (β).

2°. Soluția dată presupune că numerele u_n sunt diferite de zero, ceia ce nu s'ar putea întâmpla, eventual, când $p>0$. Discuția acestui caz ne-ar duce însă prea departe, astfel că recomandăm consultarea articolului nostru „Asupra problemei 3209", G. M. v. XLVI, p. 453-57.

M. G.

Problema 1953. — *Să se rezolve ecuația*

$$\operatorname{arc\,cosec}\frac{6-2x}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} + \operatorname{arc\,sec}\frac{6x-2}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \pi.$$

C. V. AMAN

Soluția. Punem

$$(1) \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{6-2x}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}, \quad \sec\beta = \frac{6x-2}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

și ecuația din enunț devine: $\alpha+\beta=\pi$ care scrisă sub forma $\alpha=\pi-\beta$ ne dă

$$\sin\alpha = \sin\beta$$

sau, prin ridicare la pătrat,

$$\sin^2\alpha + \cos^2\beta = 1.$$

În baza relațiilor (1) ecuația precedentă se mai scrie

$$\frac{2-\sqrt{3}}{(3-x)^2} + \frac{2+\sqrt{3}}{(3x-1)^2} = 1,$$

care sub formă întreagă este

$$9x^4-60x^3+98x^2-36x-11+8\sqrt{3}(x^2-1)=0$$

Această ecuație are rădăcina $x=1$. Împărțind cu $x-1$, ecuația se reduce la

$$(2) \quad f(x)=9x^3-51x^2+(47+8\sqrt{3})x+(11+8\sqrt{3})=0.$$

Problema s'a redus astfel la a cerceta dacă ecuația (2) admite o rădăcină care să ne dea pentru arcele α și β, definite prin ecuațiile (1), valori reale. Să studiem în primul loc natura rădăcinilor acestei ecuații. Acest lucru se face, în general, cu ajutorul *teoremei lui Rolle* sau aducând ecuația (2) la *forma canonică*

$$x^3+px+q=0$$

al cărui studiu este cunoscut și se găsește în toate cărțile de liceu de cl. 8-a. În general, putem a aduce ecuația generală

$$A_0x^3+A_1x^2+A_2x+A_3=0.$$

la forma canonică, prin substituția

$$x = \frac{y - A_1}{3A_0}$$

și se găsesc pentru p și q valorile

$$p = 3(3A_0A_2 - A_1^2),$$
$$q = 2A_1^3 - 9A_0A_1A_2 + 27A_0^2A_3.$$

În cazul ecuației noastre găsim

$$p = -4.27(37 - 6\sqrt{3}),$$
$$q = -16.27(109 - 117\sqrt{3}),$$

încât

$$\left(\tfrac{1}{4}q\right)^2 + \left(\tfrac{1}{3}p\right)^3 = -2^6.3^6(9693 + 216\sqrt{3}) < 0,$$

adică ecuația (2) are *trei rădăcini reale.*

Separarea rădăcinilor se face cu ajutorul șirului *Rolle,* dar se poate evita acest șir când numerele ce-l formează sunt complicate, cum este cazul nostru, căutând să separăm rădăcinile prin numere întregi. Se găsește astfel că

$$f(-1),\ f(0),\ f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4)$$
$$-\quad +\quad +\quad +\quad -\quad +$$

adică ecuația are câte o rădăcină cuprinsă în intervalele $(-1, 0)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$. Să vedem dacă aceste rădăcini convin problemei. Pentruca α și β dați de (1) să fie reali, este necesar ca fracțiile să aibă valori mai mari decât $+1$ sau mai mici decât -1. Punându-se aceste condiții se găsește că trebue să avem

$$x < x_1 = \tfrac{1}{6}(2 - \sqrt{6} - \sqrt{2}),\ \tfrac{1}{6}(2 + \sqrt{6} + \sqrt{2}) =$$
$$x_2 < x < x_3 = \tfrac{1}{2}(6 - \sqrt{6} + \sqrt{2}),\ x > x_4 = \tfrac{1}{2}(6 + \sqrt{6} - \sqrt{2})$$

Combinând între ele întervalele în care se găsesc rădăcinile ecuației (2) cu aceste inegalități se constată că rădăcina cuprinsă între -1 și zero nu poate fi luată în considerare. Mai departe, cum

$$f(x_3) = \tfrac{1}{2}(-8 - 3\sqrt{6} + 5\sqrt{2} + 4\sqrt{3}) < 0,$$
$$f(x_4) = \tfrac{1}{2}(-8 + 3\sqrt{6} - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{3}) < 0,$$

avem $f(2)f(x_3) < 0$ și $f(x_4)f(4) < 0$ adică ambele rădăcini sunt bune.

Valorile acestor rădăcini cu o zecimală exactă este 2, 3 și 3, 6. Problema admite în total *trei* soluții.

Autorul precum și D-nii *Grozescu L.* (Beiuș), *Roman I. C.* (Timișoara) și *Wegener Eugen* (București), au găsit numai soluția $x = 1$ fără a face discuția.

Gh. Th. Gh.

Problema 2491. — *Să se găsească un grup de patru numere întregi care satisfac ecuația*

$$x^3 + y^3 + z^3 = A^3$$

GL. GH. COATU.

I. *Soluția autorului.* Plecăm dela identitatea

$$x^3 + (3x^2 + 3x) + 1 = (x + 1)^3$$

și ne propunem să găsim pe x întreg astfel ca

$$3x^2 + 3x = h^3,$$

în cazul acesta o soluție a ecuației este $(x, h, 1, x + 1)$. Din ecuația precedentă scoatem

$$x = \tfrac{1}{6}\left[-3 \pm \sqrt{3(3 + 4h^3)}\right];$$

această relație cere ca $h = 3k$, și

$$x = \tfrac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1 + 36p^3}).$$

Prin încercări se costată că cea mai mică valoare a lui p pentru care $1 + 36p^3$ este un pătrat perfect, este $p = 2$, în care caz

$$x = 8 \quad \text{sau} \quad x = -9$$

și care dau respectiv grupele de valori (8, 6, 1, 9 și $(-9, 6, 1, -8)$, care în fond este una și aceiași soluție.

II. *Soluție* dată de D-l *Teodorescu P. P.* (București). Soluția generală, în numere întregi a ecuației date, este

$$x = (r + 3s)(r^2 + 3s^2) - 1,\quad y = -(r - 3s)(r^2 + 3s) + 1,$$
$$z = -(r + 3s) + (r^2 + 3s^2)^2,\quad A = r - 3s - (r^2 + 3s^2)^2$$

unde r și s sunt numere întregi (a se vedea G. M., vol. 45, pag. 298).

Au găsit soluția (8, 6, 1, 9) prin încercări, D-nii *Cioară Gh. Alex.* (Beiuș), *De Sabata I.* (Beiuș), *Gherlan I. V.* (Beiuș), *Man Oct.* (Cluj), *Pantea Alex.* (Beiuș), *Pisanca N. I.* (Timișoara) și *Popa Gh. S.*

Tot prin încercări, au găsit soluția (3, 4, 5, 6) Dnii *Cârciu I.* (P. T), *Hurezeanu R.* (T.-Jiu), *Neguț A. I.* (Tg.-Jiu), *Ștefănescu I. S* (Timișoara).

Gh. Tn. Gh.

Problema 2417. — *Intr'un triunghiu în care notațiile sunt cele obicinuite, să se verifice relațiile:*

$$(a + c)\cos\frac{B}{4} + b\cos\left(A + \frac{3B}{4}\right) = 2c\cos\frac{B}{2}\cos\frac{B}{4},$$

$$b = \left(a + c + 2c\cos\frac{B}{2}\right)\cos C$$

$$+4\cos\frac{B}{2}\cos\frac{B}{4}\cos\left(A+\frac{3B}{4}\right).$$

V. ALACI

Prima soluție. 1°. Notând cu E primul membru al primei relații, putem scrie succesiv, efectuând unele transformări ușor de urmărit:

$$E=a\cos\frac{B}{4}+c\cos\frac{B}{4}+b\cos\left(A+\frac{3B}{4}\right)$$

$$=c\cos\frac{B}{4}+a\cos\left(B-\frac{3B}{4}\right)+b\cos\left(A+\frac{3B}{4}\right)$$

$$=c\cos\frac{B}{4}+a\left(\cos B\cos\frac{3B}{4}+\sin B\sin\frac{3B}{4}\right)$$

$$+b\left(c\cos A\cos\frac{3B}{4}-\sin A\sin\frac{3B}{4}\right)=c\cos\frac{B}{4}$$

$$+\cos\frac{3B}{4}(a\cos B+b\cos A)+\sin\frac{3B}{4}(a\sin B-b\sin A).$$

Cum, $a\cos B+b\cos C=c$, $a\sin B-b\sin A=0$' rezultă

$$E=c\cos\frac{B}{4}+c\cos\frac{3B}{4}=c\left(\cos\frac{B}{4}+\cos\frac{3B}{4}\right)$$

$$=2c\cos\frac{B}{2}\cos\frac{B}{4},$$

astfel că prima relație este verificată.

2°. Notând cu E_1 al 2-lea membru al relației a 2-a, putem scrie succesiv:

$$E_2=(a+c)\cos C+2c\cos\frac{B}{2}\cos C$$

$$+4c\cos\frac{B}{2}\cos\frac{B}{4}\cos\left(A+\frac{3B}{4}\right)=(a+c)\cos C$$

$$+2c\cos\frac{B}{2}\left[\cos C+2\cos\frac{B}{4}\cos\left(A+\frac{3B}{4}\right)\right]$$

$$=(a+c)\cos C+2c\cos\frac{B}{2}\left[-\cos(A+B)\right.$$

$$\left.+\cos(A+B)+\cos\left(A+\frac{B}{2}\right)\right]=(a+c)\cos C$$

$$+2c\cos\frac{B}{2}\cos\left(A+\frac{B}{2}\right)=a\cos C+c\cos C$$

$$+c[\cos(A+B)+\cos A]=a\cos C+c\cos C$$

$$-c\cos C+c\cos A=a\cos C+c\cos A=b.$$

A 2-*a* relație este și ea verificată

Soluții date de d-nii: *Beșchea Radu* (P. B.), *Chiriac C.* (Brăila), *Ciuceseu Paul* (lic. Slatina), *Constantinescn Virgil* (lic. Slatina). *Crăcea D-tru* (Lic. Slatina), *Diaconu Vasile* (Colegiul Milit., N. Filipescu), *Gheţu Eugen* (Lic. Brăila), *Haret Radu* (București), *Măncescu Ion* (Colegiul Milit., N. Filipescu), *Manolescu Gh.* (P. T), *Novac Ion* (Lic. Brăila), *Şerengău Mihai* (P. T.) *Stan Petru* (P. T.), *Stanciu Olimpiu* (P. T.), *Stănilă D. G B.* (Buzău); *Teodorescu Petre* (Lic. Matei Basarab, București), și *Tincu C-tin* (P. T.).

Soluția 2-a. Folosim metoda din articolului *„Relații remarcabile într'un triunghiu"*, (R. M. T., Vol. XXV, *p.* 63). Luăm un triunghiu A B C, prelungim latura B C spre stânga cu segmentul $BB_1=AB=c$. Am format astfel triunghiul $A_1B_1C_1$ (A_1 coincide cu A, iar C_1 cu C).

Elementele acestui triunghiu $A_1B_1C_1$ sunt:

$$a_1=a+c,\ b_1=b_1,\ c_1=\frac{c\sin B}{\sin\frac{B}{2}}=2c\cos\frac{B}{2};$$

$$A_1=A+\frac{B}{2},\ B_1=\frac{B}{2},\ C_1=C.$$

Cu triunghiul $A_1B_1C_1$ procedăm astfel: prelungim spre stânga latura B_1C_1 cu segmentul $B_1B_2=AB_1=c_1$ și am format triunghiul $A_2B_2C_2$ (A_2 coincide cu A_1, iar C_2 cu C).

Elementele acestui triunghiu auxiliar $A_2B_2C_2$ sunt:

$$a_2=a+c+2c\cos\frac{B}{2},\qquad b_2=b_1$$

$$(2)\qquad c_2=\frac{c\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{4}}=4c\cos\frac{B}{2}\cos\frac{B}{4}$$

$$A_2=A_1+\frac{B_1}{2}=A+\frac{3B}{4},\ B_2=\frac{B}{4},\ C_2=C.$$

În acest triunghiu $A_2B_2C_2$ teorema cosinusului ne dă

$$c_2=a_2\cos B_2+b_2\cos A_2$$
$$b_2=a_2\cos C_2+c_2\cos A_2,$$

relații care devin în baza formulelor (2)

$$4c\cos\frac{B}{2}\cos\frac{B}{4}=$$

$$\left(a+c+2c\cos\frac{B}{2}\right)\cos\frac{B}{4}+b\cos\left(A+\frac{3B}{4}\right),$$

$$b=\left(a+c+2\cos\frac{B}{2}\right)\cos C+4c\cos\frac{B}{2}\cos\frac{B}{4}\times$$

$$\cos\left(A+\frac{3B}{4}\right).$$

A 2-*a* din aceste relații este chiar cea din enunț,

iar prima se mai scrie,

$$(a+c)\cos\frac{B}{4}+b\cos\left(A+\frac{3B}{4}\right)=2c\cos\cos\frac{B}{4},$$

care este prima relaţie cerută.

Soluţii analoage date de d-nii: *Bogza Mihai* (Roman), *Chiriac C.* (Brăila), *Deutsch E.* (P. T.), *Gherlan I. V.* (Beiuş), *Giurconiu Mihai* (P. T.) *Pantea N. Alex.* (Beiuş), şi *Popa Vasile* (P. T.).

Problema 2428. — *Să se construiască triunghiul* ABC *cunoscând piciorul* D *al bisectoarei* AD *şi centrele* w, w' *ale cercurilor circumscrise triunghiurilor* DAB *şi* DAC.

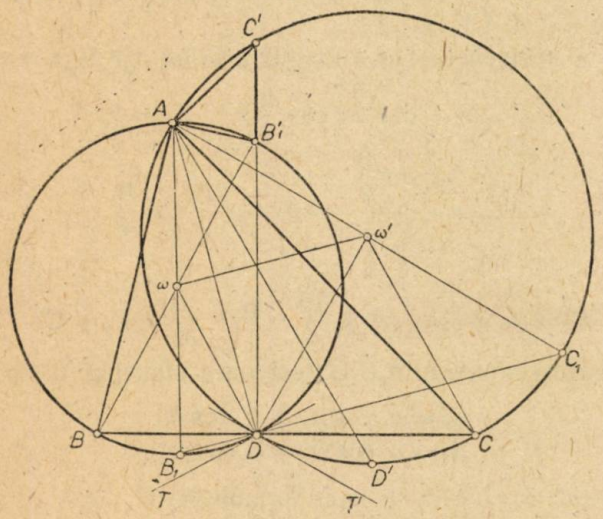
G-L Gh. Buicliu

Soluţia. Presupunem problema rezolvată. Se observă pe figură că în cercurile w, w' avem

$$\frac{1}{2}\sphericalangle BwD=\sphericalangle BAD=\sphericalangle CAD=\frac{1}{2}\sphericalangle Cw'D$$

$$\therefore\quad \sphericalangle wBD=\sphericalangle wDB=\sphericalangle w'DC=\sphericalangle w'CD$$

prin urmare $wB\parallel w'D$ şi $wD\parallel w'C$. De aici construcţia:



In cercul w se duce diametrul $BB'\parallel Dw'$. Dreapta BD taie cercul w' în C iar B'D în C'. Triunghiurile ABC şi AB'C' sunt triunghiurile căutate.

Pentru triunghiul ABC coarda AD este bisectoarea interioară, iar pentru AB'C' bisectoarea exterioară.

Această soluţie a fost dată de D-l *Haret Sp. Radu* (Lycée Français de Bucureşti).

Soluţia II. În cercul w şi w' observăm că

$$\sphericalangle Dww'=\sphericalangle DBA,\quad \sphericalangle Dw'w=\sphericalangle DCA.$$

Triughiul wDw' este deci asemeni cu ABC aşa că

$$\sphericalangle wDw'=\sphericalangle BAC.$$

De aici construcţia următoare: De o parte şi de alta a coardei AD construim unghiurile DAB, DAC egale cu jumătatea unghiului wDw'. Se obţine triunghiul ABC.

Construind unghiul DAB' egal cu jumătatea suplimentului unghiului wDw' se obţine triunghiul B'AC'.

Aceasta soluţie a fost dată de d-nii: *Beşchea R.* (P.T), *Cernescu A. N.* (Lic. militar Predeal); *Constantinescu G, Virgil* (Lic Slatina); *Corduneanu Const.* (Lic. milit. Predeal); *M. Giurconiu* (P. T.); *Munteanu T. I.* (Lic. militar Predeal).

Soluţia III. Ducem în D tangentele DT, DT' la cercurile w şi w'. Se observă că

$$\sphericalangle BDT=\sphericalangle BAD=\sphericalangle DAC=\sphericalangle CDT'.$$

Construcţia este imediată. Se duc bisectoarele unghiurilor formate de DT şi DT' şi se obţin laturile BC, sau B'C'.

Aceasta soluţie a fost dată de D-nii: *Blaga Ov.* (Cluj), *Dăscălescu I. Mihai* (Lic. „Mihai Viteazul" Bucureşti), *Man Iosif* (P. T.), *Râmboiu N. Septimiu* şi *Turbuţiu Gh.* (Lic. Gh. Barițiu, Cluj).

Soluţia IV. Fie B_1, C_1 diametralele lui A în w şi w'. De oarece $\sphericalangle ADB_1$ şi $\sphericalangle ADC_1$ sunt drepte, punctele B_1, D, C_1 sunt colineare. Apoi unghiurile ABD, AB_1D în cercul w sunt egale având aceiaşi măsură. La fel unghiurile AC_1D, ACD din cercul w'. Deci

$$\sphericalangle BAC=\sphericalangle B_1AC_1.$$

Bisectoarea unghiului B_1AC_1 taie cercul w' în D'. Cum

$$\sphericalangle D'AC_1=\sphericalangle DAC$$

rezultă că coarda $D'C_1$ este egală cu coarda DC, de unde urmează construcţia de făcut.

Această soluţie a fost dată de D-l *Stan Petru* (P. T.).

D-l *Novac I. I.* (Brăila) a dat o soluţie prin geometrie analitică, problema este însă prea simplă pentru a ajunge la geometrie analitică.

In afară de D-l *Haret Sp. R.* nici unul din ceilalţi rezolvitori nu sa ocupat de cazul când AD este bisectoarea exterioară şi deci nu au găsit soluţia B'AC'.

Alte soluţii date de D-nii: *Dănescu Alex.* (lic. M. Viteazul) şi *Teodorescu P. P.* (Bucureşti).

G-l Gh. B.

Problema 2442. — *Să se rezolve sistemul*

$$\frac{b(ax+by)+c(ax+cz)-bcyz}{ax}=$$

$$= \frac{c(cz+by)+a(ax+by)-cazx}{by} =$$

$$= \frac{a(ax+cz)+b(by+cz)-abxy}{cz} = ax+by+cz.$$

IOAN FILIMON

Soluția. Egalând fiecare fracție cu ultima parte a sistemului, obținem sistemul

$$\begin{cases} b(ax+by)+c(ax+cz)-bcyz=ax(ax+by+cz), \\ c(cz+by)+a(az+by)-cazx=by(ax+by+cz), \\ a(ax+cz)+b(by+cz)-abxy=cz(ax+by+cz), \end{cases}$$

trecând toți termenii în prima parte, și grupându-i convenabil, acest sistem se mai poate scrie

$$\begin{cases} (ax+by-c)(ax+cz-b)=bc, \\ (ax+by-c)(by+cz-a)=ca, \\ (cz+by-a)(ax+cz-b)=ab. \end{cases}$$

Înmulțind ecuațiile acestui sistem între ele, obținem ecuația nouă

$$ax+by-c)(by+cz-a)(cz+ax-b)=\pm abc,$$

cari împărțită pe rând cu ecuațiile sistemului ne dă sistemul echivalent

$$\begin{cases} by+cz-a=\pm a, \\ cz+ax-b=\pm b, \\ ax+by-c=\pm c. \end{cases}$$

Acest sistem se descompune în sistemele

(I) $by+cz=0, \quad cz+ax=0, \quad ax+by=0;$

(II) $$\begin{cases} by+cz=2a, \\ cz+az=2b, \\ ax+by=2c. \end{cases}$$

Primul sistem nu are decât soluția banală $x=y=z=0$ care nu verifică sistemul inițial, făcând fracțiile nedeterminate. Al doilea sistem rezolvat printr'una din metodele cunoscute dă singura soluție a sistemului propus

$$x=\frac{-a+b+c}{a}, \quad y=\frac{a-b+c}{b}, \quad z=\frac{a+b-c}{c}.$$

Observare. În rezolvarea de mai sus am presupus implicit $abc \neq 0$.

Au rezolvat problema D-nii: *Gertler N. R.* (București), *Măncescu N. I.* (Predeal), *Purcea M. I.* (Caracal), *Roman I. C.* (Timișoara), *Stanciu D. D.* (Arad) și *Teodorescu P. P.* (București).

Gh. Th. Gh.

Problema 2444. — *Fie* A *un punct fix pe tangenta în punctul fix* B *al cercului* O. *Se construește paralelogramul* A L M N *de diagonală* A M *și cu laturile paralele la* B M *și la tangentă în* M *a* O. *Să se găsească locurile punctelor* L *și* M.

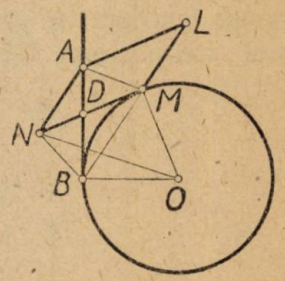
G-L GH. BUICLIU

Soluție. Fie D punctul de întâlnire al tangentelor în B și M la cercul O. De oarece

$$\sphericalangle DBM=\sphericalangle DMB=\sphericalangle DAN=\sphericalangle DNA$$

urmează că figura AMBN este un trapez isoscel și deci

$$MN = AB = \text{const.}$$



Triunghiul dreptunghic OMN dă

$$\overline{ON}^2=\overline{OM}^2+\overline{MN}^2=\text{const}=k^2$$

Prin urmare N descrie un cerc cu centrul în O și rāza k. Paralelogramul A L M N dă

$$AL = MN = \text{const.}$$

deci L descrie un cerc cu centrul în A.

Au dat această soluție D nii: *Dănescu Al.* (Lic. Mihai Viteazul Buc.), *Székely I. G.* (Cluj) și *Teodorescu P. P.* (Lic. „Matei Basarab" București).

Au rezolvat problema prin geometria analitică D-nii: *Crăciunescu Victor* (Bacalaureat), *Giurconiu M.* (P. T.), *Mărcuțiu P. Silviu* (Cluj), *Novac I. I.* (Brăila), *Marinescu S. D.* (Ploești) și *Stănilă D. G. B.* (Buzău).

Problema 2530. — *Să se studieze și să se reprezinte grafic funcțiunea*

$$y=\pm x\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}.$$

E. VISA

Soluția dată de D-l *Teodorescu P. P.* (cl. 7-a lic. M. Basarab, București). Vom studia funcțiunea luând în fața radicalului numai semnul +, cealaltă parte deducându-se din cea studiată, prin simetrie în raport cu axa Ox. Intervalul de existență al funcțiunei este dat inegalitatea

$$\frac{x+a}{x-a}=\frac{x^2-a^2}{(x-a)^2}\geqq 0; \quad x^2-a^2\geqq 0$$

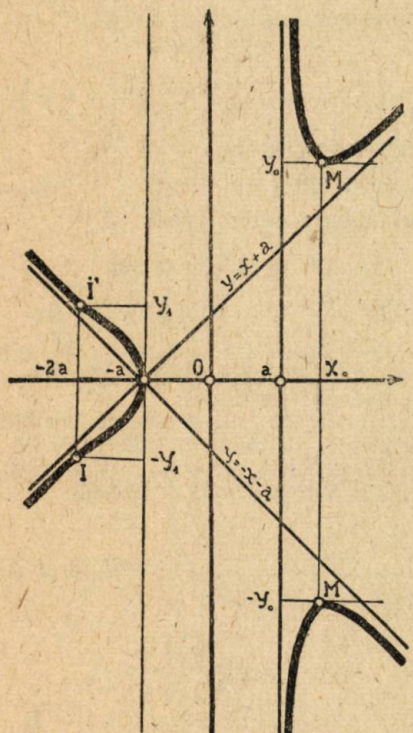
adică funcţiunea există pentru toate valorile lui x mai mici decât $-a$ şi mai mari decât $+a$. Derivata este

$$y' = \frac{x^2 - ax - a^2}{(x-a)^2}\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$$

care se anulează pentru două valori dintre cari numai $x_0 = \frac{1}{2}a(1+\sqrt{5})$ se află în intervalul de existenţă. Semnul derivatei se găseşte uşor şi este trecut în tabloul de variaţie; deasemeni

x	$-\infty$		$-a$		a	x_0	$+\infty$
y'		$+$			$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$\nearrow$	0		$-\infty$	$\searrow$ y_0 $\nearrow$	$+\infty$

variaţia funcţiunei se găseşte cu uşurinţă cu ajutorul acestui semn. Curba are un minim pentru



$x = x_0$ egal cu: $y_0 = \frac{1}{2}a(1+\sqrt{5})\sqrt{2+\sqrt{5}}$.

Curba este asimptotă dreptei $x = a$. Se ştie că asimptotele oblice au ecuaţiile de forma $y = mx + n$, unde

$$m = \lim_{x=\infty}\frac{y}{x}, \qquad n = \lim_{x=\infty}(y - mx).$$

În cazul nostru avem

$$m = \lim_{x=\infty}\sqrt{\frac{x+a}{x-a}} = 1$$

$$n = \lim_{x=\infty}\left(x\sqrt{\frac{x+a}{x-a}} - x\right) = \lim\frac{x(\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a})}{\sqrt{x-a}}$$

$$= \lim_{x=\infty}\frac{2ax}{\sqrt{x-a}(\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}} = a$$

şi deci curba are asimptota oblică $y = x + a$ (prin simetrie se mai găseşte şi asimptota $y = -x - a$.

Se ştie deasemeni că punctele de inflexiune sunt date de ecuaţia

$$y'' = \frac{a^2(x+2a)}{(x-a)^3(x+a)}\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} = 0$$

adică punctul de abscisă $x_1 = -2a$ este un punct de inflexiune pentru curbă. Ordonata lui este

$$y_1 = \frac{2}{3}a\sqrt{3}.$$

Construirea curbei se face acum cu uşurinţă. În figură este construită în cazul $a > 0$. În cazul $a < 0$ forma curbei este aceiaşi din figură numai că este aşezată invers faţă de axa Oy.

Soluţii foarte bune date de D-nii: *Coţiu A.* (Cluj), şi *Toderaşc I. V.* fără a pune în evidenţă punctele de inflexiune. D-nii *Barbul V. V.*, *Cioara Gh. Alex.*, *Cioca I. I*, *Gherlan V.*, *Novac I. I.*, *Pantea N. A.* şi *Purcea M. I.* au rezolvat problema fără a găsi asimptotele oblice.

Gh. Th. Gh.

Problema 2568 *). — *Să se arate că înălţimea unui triunghiu* A B C *corespunzătoare laturei* B C = $p + \lambda$ *unde* p *este o lungime constantă, iar* λ *o lungime variabilă, este constantă, dacă*

$$\operatorname{tg} B = \frac{2\lambda}{p+\lambda}, \quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}C = \frac{p}{\lambda}.$$

MARIA NEUMANN

Soluţia. Insemnând cu D piciorul înălţimei, avem

$$BC = BD + DC = AD(\operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} B)$$

$$(1) \qquad \text{***} \quad AD = \frac{BC}{\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C}$$

(calculul este făcut pentru cazul triunghiului având toate triunghiurile ascuţite; cazul când unul din unghiurile B sau C este obtuz duce la acelaşi rezultat). Avem

---

*) Enunţ corectat.

$$\operatorname{tg} C = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} C}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} C} = \frac{2p\lambda}{\lambda^2 - p^2}.$$

Inlocuind în (1) pe cotgB şi cotg C prin valorile lor şi $BC = p + \lambda$, se obţine $AD = 2p = \text{const.}$

Au rezolvat problema, cu enunţul corectat, D-ra *Alexa M.* (P. T.), *Funt C.* (P. T.) şi D-nii *Cioara A.* (P. T.), *Erdélyi I.* (P. T.), *Deutsch E.* (P. T.), *Gherlan V.* (P. T.), *Nemoianu C.* (P. T.), *Purcea M. I.* (Caracal), *Simeon L.* (P. T.), *Szekely G.* (P. T.) şi *Turbuţiu Gh.* (P. T.)

Gh. Th. Gh.

Problema 2580. — *Să se rezolve şi discute ecuaţia*

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{8x} - \frac{169}{24(3x+8)} = \frac{1}{\alpha},$$

unde α este un parametru variabil.

GH. TH. GHEORGHIU.

Soluţia. Făcând calculele, ecuaţia din enunţ se reduce la forma întreagă.

$$(1) \qquad (\alpha - 3)x^2 - 4(\alpha + 2)x + \alpha = 0$$

a cărei discuţie se face în mod obişnuit. Pentru realizantul ecuaţiei avem

$$R = 3\alpha^2 + 19\alpha + 16 = (\alpha + 1)(3\alpha + 16),$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{\alpha}{\alpha - 3}, \quad S = x_1 + x_2 = 4\frac{\alpha + 2}{\alpha - 3}$$

şi discuţia este trecută în tabloul

α	R	P	S	
$-\infty$	+	+	+	răd. reale poz
$-\frac{16}{3}$	0	+	+	
	−	+	+	
-2	−	+	0	răd. imag
	−	+	−	
-1	0	+	−	
	+	+	−	răd reale neg
0	+	0	−	$x_1 = 0, x_2 = -\frac{8}{3}$
	+	−	−	răd. reale $x_1 < 0, x_2 > 0, \lvert x_1 \rvert > x_2$
3	+	∞	∞	$x_1 = \infty, x_2 = \frac{3}{20}$
	+	+	+	răd. reale poz.
$\infty +$				

Două observări se impun asupra acestui tablou: 1) Discuţia ecuaţiei (1) este aceiaşi cu a ecuaţiei date din care trebue să excludem $\alpha = 0$, când partea dreaptă este infinită. De altfel se observă că pentru această valoare a lui α şi valorile corespunzătoare pentru x fac şi prima parte infinită. 2) Când $\alpha = 3$ ecuaţia devine de gr. 1 şi are o singură rădăcină pe x_2. Considerând valoarea lui x_1 şi făcând pe α să tindă către 3 se constată că tinde către infinit.

A rezolvat problema D-ra *Gârleşteanu M. El* (cl. 5 Timişoara) şi D-nii *Breazu M.* (Deva), *Coţiu A.* (Cluj), *Găzdău I. M.* (Deva), *Gherlan I. V.* (P. T.), *Petcu Al. Val.* (Bucureşti), *Popa F. P.* (Oradea), *Purcea M. I.* (Caracal), *Stancu D. D.* (Cluj), *Stănescu D. C.* (Reşiţa), *Şuta M.* (Oradea) şi *Tibăr A.* (Constanţa).

Dnii *Coţiu* şi *Petcu Val.* au scris ecuaţia dată sub forma

$$\alpha = \frac{3x^2 + 8x}{x^2 - 4x + 1},$$

au reprezentat funcţia din partea dreaptă şi apoi au dedus discuţia intersectând curba reprezentativă cu dreapta variabilă $y = \alpha$. Remarcăm atenţia pe care o pune D-l *Petcu Val.* în redactarea soluţiilor.

S'au primit şi opt soluţii greşite sau incomplecte.

Gh. Th. Gh.

Problema 2593. — *Dacă α, β, γ sunt unghiurile asociate ale unui triunghiu ABC, să se stabilească relaţia*

$$\frac{a}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{b}{\operatorname{tg}\beta} + \frac{c}{\operatorname{tg}\gamma} = \frac{4S}{r}.$$

IONEL PISANCA.

Soluţia. Avem

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b+c}, \cdots$$

încât prima parte a relaţiei din enunţ se scrie

$$(b+c) + (c+a) + (a+b) = 4p = \frac{4S}{r}.$$

Au rezolvat problema D-ra *Funt C.* (P. T.) şi D-nii *Bâlă V. C.* (P. T.), *Cioara Alex.* (P. T.), *Ciobanu I.* (student), *De Sabata I.* (Beiuş), *Deutsch E.* (P. T.), *Ghiriş I.* (P. T.), *Pantea Alex.* (Beiuş) şi *Roman I. C.* (Timişoara).

Gh. Th. Gh.

PROBLEME PROPUSE

2615 — Se cere patratul perfect de 12 cifre de forma $10abcdefcdef$ ştiind că ef este triplul lui ab.

G-L. GH. BUICLIU

2616*. — Dacă $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, a_{n+1}$ sunt termenii unei progresii aritmetice cu raţia r, să se arate că

$$\sum_{n=2}^{n} a_{n-1}\, a_n = \frac{a_{n-1}\, a_n\, a_{n+1} - a_0\, a_1\, a_2}{3r}$$

şi mai general,

$$S_p = \sum_{n=p}^{n} a_{n-p+1}\, a_{n-p+2} \ldots a_{n-1}\, a_n = \frac{a_{n-p+1}\, a_{n-p+2} \ldots a_{n+1} - a_0 a_1 a_2 \ldots a_p}{(p+1)r}.$$

Ca aplicaţie să se calculeze suma

$$\sum_{n=2}^{n} (4n^2 - 9)(4n^2 - 1).$$

D. BANDLER

2617. — Fie x_1 x_2 şi x', x'' respectiv rădăcinele ecuaţiilor

$$x^2 + px + q = 0, \quad x^2 + qx + p = 0.$$

1°. Să se formeze ecuaţia în y care are rădăcini

$$y_1 = x_1^2 x' + x_2^2 x'', \qquad y_2 = x_1^2 x'' + x_2^2 x'.$$

2° Presupunând $p = 1$, pentru ce valori ale lui q ecuaţia în y obţinută are rădăcinile reale?

I. STAMATE

2618*. — Să se formeze ecuaţiile de gradul al 3-lea în x, ale căror rădăcini x_1, x_2, x_3 verifică relaţiile

$$x_1 = x_3(a - x_3), \quad x_3 = x_2(a - x_2), \quad x_2 = x_1(a - x_1),$$

Aplicaţie pentru $a = 4$.

EUGEN VISA

2619. — Să se studieze şi să se reprezinte graficul funcţiei

$$y = \sin x - sp\, x.$$

Să se calculeze apoi aria cuprinsă dintre arcul de curbă construit şi axa Ox, corespunzătoare intervalului $(0, \pi)$.

V. ALACI

2620. — Se consideră ecuaţiile

$$\begin{cases} \lambda^2 - 2(am - b)\lambda - [c^2 + b^2)m^2 + 2abm + (c^2 + a^2)] = 0, \\ \lambda^2 - \gamma^2(1 + m^2) = 0 \end{cases}$$

şi se cere: 1° Să se elimine λ între aceste două ecuaţii. Fie: $f(m) = 0$ rezultatul acestei eliminări. 2° Să se demonstreze că dacă m_1 este o rădăcină a ecuaţiei $f(m) = 0$, atunci şi m_2, definit de relaţia

$$2ab(m_1 m_2 - 1) + (a^2 - b^2)(m_1 + m_2) = 0,$$

este deasemeni o rădăcină a ecuaţiei $f(m) = 0$.

3° Să se demonstreze că există o transformare omografică, adică o transformare de forma

$$m = \frac{An + B}{Cn + D},$$

astfel ca noua ecuaţie $\varphi(n) = 0$ să fie bipatrată. 4°. Să se rezolve şi discute ecuaţia $f(m) = 0$.

GH. TH. GHEORGHIU

2621. — Vârfurile B, C ale unui triunghiu dreptunghic sunt fixe, iar vârful A al unghiului drept este variabil. Fie CDEA, BFGA patratele construite respectiv pe laturile AC, AB în exteriorul triunghiului. Se cere:

1°. Să se afle locul geometric al intersecţiei dreptelor DE, FG;

2°. Să se demonstreze că dreapta DF trece printr'un punct fix.

GH. DUMITRE CU

2622. — Să se exprime unghiurile unui paralelogram în funcţie de unghiurile ce le formează diagonalele cu una din laturi.

I. LOZICIU

2623. — Să se arate că într'un triunghiu oarecare ABC, avem relaţiile

$$sp^2\alpha + sp^2\beta + sp^2\gamma = \frac{8R - 3r}{24R - 4r},$$

$$sp\,\alpha\, sp\,\beta + sp\,\beta\, sp\gamma + sp\gamma sp\alpha = \frac{16R - r}{48R - 8r},$$

α, β, γ fiind unghiurile asociate.

EMERIC DEUTSCH

2624. — Să se studieze mişcarea unui punct material de masă m, cunoscându-i momentul vectorului cantităţii de mişcare în raport cu un punct fix O, ca funcţie vectorială de timp. Discuţie.

M. GHERMANESCU

INFORMAȚII

1. Nu se publică în revistă decât manuscrise dela abonați.

2. Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol, trebuesc scrise citeț (în special iscălitura) numai pe o parte a hârtiei. Probleme propuse trebuesc însoțite și de soluțiile lor, iar cele rezolvate, de enunț. Nu sunt luate în considerare probleme rezolvate iscălite de mai mulți corespondenți. Problemele rezolvate vor fi redactate îndependent una de alta, și nu în continuare.

3. Numele colaboratorilor dela cari s'au primit soluții la problemele publicate în acest număr și care au sosit la redacție după data de 15 a lunei precedente, nu mai pot fi trecute în corpul revistei. Numele lor este însă menționat pe copertă împreună cu numărul problemei rezolvate.

4. Rugăm pe corespondenții noștrii la orice schimbare de adresă sau lipsă din localitate fără a avea pe cineva să le primească revista, să ne anunțe din vreme. În caz contrar revista ne vine înapoi și cu regret anunțăm că a doua oară nu o mai putem expedia. Mai mult, se suspendă expedierea numerelor următoare până ce abonatul va reclama aceste numere.

Manuscrise primite de la corespondenții noștrii până la 1 a lunei curente și anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) și probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

---

Bal Lascu (P.); *Bogovici Nicolae* (2596, 2599); *Brandler D.* (P.); *Deutsch Emeric* (N. P; 2532) *Dodu Eugen* (N. P; 2537, 2539, 2542, 2543, 2546, 2547, 2551, 2552, 2553, 2554. 2556, 2557, 2560, 2564, 2566, 2572, 2576, 2579, 2580, 2587, 2591, 2593, 2596, 2598, 2599, 2602); *Friedrich Lenz* (2523, 2566, 2596); *Funt Carmen* (1513, 1514, 1809, 2530, 2531, 2537, 2538); *Hurezeanu Romulus* (2523, 2566, 2587); *Man Iosif* (P; 1385, 2188, 2287, 2461, 2591, 2592, 2596, 2599, 2601, 2603, 2605, 2611, 2612); *Oros Maria* (2596, 2599); *Păsărin Gheorghe* (2063, 2325, 2609); *Păunescu Gh.* (2099, 2566); *Petcu Valeriu* (P; 2551, 2554, 2564, 2585, 2587); *Popa Pavel* (2523, 2524, 2587, 2593); *Purcea Ion* (P; 2510, 2524, 2582, 2601, 2602, 2608, 2611, 2612, 2613, 2614); *Radu Corneliu* (2596, 2598, 2661); *Ristea Gh.* (2447, 2487, 2531); *Roibu Trestiau* (2362, 2496, 2510, 2523, 2531, 2560, 2579, 2587); *De Sabata Ioan* (2103, 2483, 2486, 2562, 2580, 2596, 2599, 2601, 2602); *Seracin Eugeu* (2531, 2566, 2568, 2587, 2593, 2596, 2599, 2602, 2606, 2612, 2613); *Simionescu Sylvia* (2599); *Simeon Liviu* (1140, 1198, 1250, 1357, 1413, 1558, 1561, 1974, 2001, 2018, 2268, 2275, 2468, 2487, 2554, 2557, 2579, 2587, 2591, 2592, 2593); *Soare Mircea* (P; 2025, 2047, 2063, 2087, 2094, 2096, 2103, 2121, 2132, 2135, 2189, 2530, 2537, 2544, 2552, 2579, 2598, 2608, 2612); *Stănescu D. C.* (2529, 2569, 2587, 2599); *Teodorescu P.* (P.); *Tibăr Aurel* (2566, 2587, 2596, 2606); *Țăru Emilia* (2596).

ANUL XXVIII. IUNIE 1948. No. 4.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA
PREȚUL ABONAMENTULUI ESTE 300 LEI ANUAL PENTRU PARTICULARI ȘI 600 LEI PENTRU INSTITUȚII
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRĂINĂTATE ESTE DE 600 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **V. ALACI**: RELATII REMARCABILE INTRE ELEMENTELE UNUI TRIUNGHIU.
2. NOTA MATEMATICA 6.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 1311, 1389, 1414, 1447, 1789, 2238, 2316, 2446, 2474, 2504, 2517, 2521, 2546, 2551, 2554, 2596, 2601.
5. PROBLEME PROPUSE: 2625-2634.
6. INFORMATII.

„Tipografia Românească", Timișoara.
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebue să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă"

G. ŢIŢEICA

Prin bunăvoinţa D-lui Decan *Gh. Constantinescu*, Facultatea de Agronomie din Timişoara, ne-a subvenţionat cu suma de 30.000 lei.

Deasemeni, prin bunăvoinţa D-lui Prefect *Titus Ionescu*, Prefectura jud. Timiş-Torontal ne-a subvenţionat cu suma de 20.000 lei.

Avem plăcere să anunţăm că începând cu acest număr, face parte din „Comitetul de Colaborare" al revistei şi D-l Ing. *Gh. Sprinceană*, director General al Silozurilor.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara, conţinând articole, note, probleme propuse şi rezolvate, vor fi trimise pe adresa: Prof. V. Alaci, Politehnica, Timişoara.

Administraţia revistei aduce la cunoştinţa generală următoarele:

1. Abonamentul pe anul XXVIII (15 Martie 1948 — 15 Februarie 1949) este 300 lei pentru particulari şi 600 pentru instituţii.

2. Taxa de membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este de 200 lei.

3. Volumele I, XXIII, XXV, XXVI şi XXVII sunt epuizate. Celelalte volume broşate se găsesc de vânzare cu preţul de 300 lei fiecare. La această sumă se va adăoga 50 lei costul expediţiei. In caz că se comandă mai multe volume se va adăoga la taxa de 26 lei pentru recomandat, câte 20 lei pentru fiecare volum.

4. Se găsesc de vânzare numere izolate din colecţie chiar din volumele epuizate. Preţul unui număr este de 30 lei la care se adaogă 2 lei expediţia. Din vol. XXVII se găsesc de vânzare no. 1, 4—12.

5. Se primesc reclamaţii că se pierde revista prin poştă. Aceste reclamaţii sunt adunate în ordinea sosirii lor şi vor fi sătisfăcute la 15 Februarie 1949 când se vor vedea ce numere rămân descomplectate după legarea volumelor întregi. Orice reclamaţie de pierderea unui număr nu este luată în seamă decât la o lună dela data apariţiei acelui număr.

6. Tot ce priveşte administraţia se va adresa D-lui Prof. **Gh. Th. Gheorghiu** str. Voltaire Nr. 1, Timişoara I. Reclamaţiile ce necesită răspuns vor fi însoţite de o carte poştală timbrată legal.

7. Orice sumă destinată revistei se poate trimite prin CEC sub contul n-rul 85208 sau prin mandat poştal D-lui Prof. **Gh. Th. Gheorghiu** pe adresa de mai sus.

ANUL XXVIII — No 4. TIMISOARA, 1948 IUNIE 15

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

Prețul abonamentului este 300 lei pentru particulari și 600 lei pentru instituții.
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. GH. TH. GHEORGHIU
Timișoara I, Str. Voltaire, No. 1.

RELAȚII REMARCABILE ÎNTRE ELEMENTELE UNUI TRIUNGHIU

DE

V. ALACI

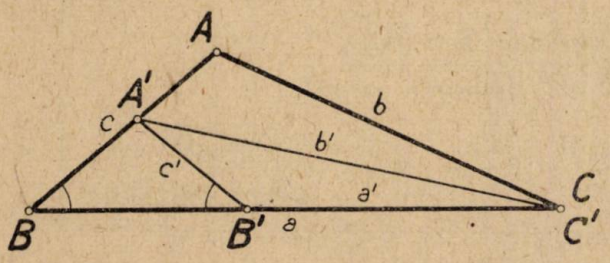
Metoda simplă, pe care am folosit-o în două articole[1]), pentru a stabili relații remarcabile între elementele unui triunghiu, se bucură de o mare extindere, prin alegerea potrivită a triunghiului auxiliar dedus dintr'un triunghiu oarecare A B C. În acest articol, vom alege un triunghiu auxiliar special, adequat triunghiului A B C, căruia după ce îi vom calcula elementele în funcție de acelea ale triunghiului inițial, îi vom aplica relațiile simple cunoscute într'un triunghiu, iar în urmă vom transforma aceste relații cu ajutorul elementelor calculate. Vor rezulta în felul acesta multe relații noui, remarcabile, între elementele unui triunghiu.

I.

Fie un triunghiu oarecare A' B C și bisectoarea C A' a unghiului C. Din A' ca centru cu o rază egală cu A' B tăiem în B' latura B C, avem astfel

$$A'B = A'B'.$$

Acum considerăm triunghiul auxiliar A' B' C' (C' coincide cu C).



[1]) *V. Alaci:* O metodă simplă pentru a stabili relații remarcabile într'un triunghiu („Gazeta Matematică", An. LI, No. 1, 1945).
V. Alaci: Relații remarcabile într'un triunghiu („R.M.T." Vol. XXV, No. 6, 1945).

Să exprimăm întâi elementele triunghiului A'B'C' în funcție de acelea ale triunghiului ABC, păstrând notațiile obicinuite.

Laturile și unghiurile triunghiului A' B' C'. Din figură observăm imediat

$$(1)\quad B' = 180^0 - B, \quad C' = \tfrac{1}{2}C, \quad A' = B - \tfrac{1}{2}C.$$

Apoi, bisectoarea CA' în triunghiul A B C, ne dă

$$\frac{A'B}{a} = \frac{A'A}{b} = \frac{c}{a+b}$$

de unde deducem,

$$(2)\quad c' = \frac{ac}{a+b}.$$

În triunghiul A' B' C' putem scrie

$$\frac{b'}{\sin B} = \frac{c'}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{ac}{(a+b)\sin\frac{1}{2}C}$$

și fiindcă

$$\sin B = \frac{b\sin C}{c} = \frac{2b\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C}{c},$$

rezultă,

$$(3)\quad b' = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{1}{2}C.$$

Mai observăm că:

$$a' = a - BB' = a - 2c'\cos B = a - \frac{2ac}{a+b}\cos B,$$

sau

$$(4)\quad a' = \frac{a}{a+b}(a+b-2c\cos B).$$

Este bine să remarcăm că în relațiile (2), (3), (4) avem factorul comun $\frac{a}{a+b}$, ceea ce invederează că triunghiul A' B' C' este asemenea cu un alt triunghiu $A_1 B_1 C_1$, având respectiv laturile și unghiurile:

$$a_1 = a + b - 2c\cos B, \quad b_1 = 2b\cos\tfrac{1}{2}C, \quad c_1 = c$$

$A_1 = B - \frac{1}{2}C$, $B_1 = 180^0 - B$. $C_1 = \frac{1}{2}C$.

Vom păstra mai departe, în considerațiile noastre, triunghiul auxiliar $A_1 B_1 C_1$.

Alte elemente ale triunghiului $A_1 B_1 C_1$. Să calculăm alte elemente ale triunghiului $A_1 B_1 C_1$ în funcție de acelea ale triunghiului inițial ABC. Putem urmări astfel cu ușurință că avem:

$$p_1 = p + b\cos\tfrac{1}{2}C - c\cos B, \quad s_1 = \frac{b_1 c_1}{2}\sin A_1 = bc\cos\tfrac{1}{2}C\sin(B - \tfrac{1}{2}C)$$

$$h_{a_1} = b_1\sin C_1 = 2b\cos\tfrac{1}{2}C\sin\tfrac{1}{2}C = b\sin C, \quad h_{b_1} = c_1\sin A_1 = c\sin(B - \tfrac{1}{2}C),$$

$$h_{c_1} = b_1\sin A_1 = 2b\cos\tfrac{1}{2}C\sin(B - \tfrac{1}{2}C), \quad R_1 = \frac{c}{2\sin C_1} = \frac{c}{2\sin\frac{1}{2}C},$$

$$r_1 = \frac{h_{a_1}\sin\frac{1}{2}A_1}{2\cos\frac{1}{2}B_1\cos\frac{1}{2}C_1} = \frac{b\sin C\sin(\frac{1}{2}B - \frac{1}{4}C)}{2\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{4}C}, \quad r_{a_1} = r_1\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}B_1\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}C_1$$

$$= \frac{b\sin C\sin(\frac{1}{2}B - \frac{1}{4}C)}{2\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{4}C}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B\operatorname{cotg}\tfrac{1}{4}C = \frac{b\sin C\sin(\frac{1}{2}B - \frac{1}{4}C)}{2\cos\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{4}C},$$

$$r_{b_1} = r_1\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}C_1\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A_1 = \frac{b\sin C\sin(\frac{1}{2}B - \frac{1}{4}C)}{2\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{4}C}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{4}C\operatorname{cotg}(\tfrac{1}{2}B - \tfrac{1}{4}C) = \frac{b\sin C\cos(\frac{1}{2}B - \frac{1}{4}C)}{\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{4}C},$$

$$r_{c_1} = r_1\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A_1\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}B_1 = \frac{b\sin C\sin(\frac{1}{2}B - \frac{1}{4}C)}{2\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{4}C}\cdot\operatorname{cotg}(\tfrac{1}{2}B - \tfrac{1}{4}C)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B = \frac{b\sin C\cos(\frac{1}{2}B - \frac{1}{4}C)}{\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{4}C}.$$

Analog am putea calcula și alte elemente ale triunghiului $A_1 B_1 C_1$.

Recapitulăm într'un tablou (T_1) formulele interesante ce le-am stabilit, fiindcă vom avea nevoe de ele în cele ce urmează.

TABLOUL (T_1).

$$a_1 = a + b - 2c\cos B, \quad b_1 = 2b\cos\tfrac{1}{2}C, \quad c_1 = c,$$

$$A_1 = B - \tfrac{1}{2}C, \quad B_1 = 180^0 - B, \quad C_1 = \tfrac{1}{2}C;$$

$$p_1 = p + b\cos\tfrac{1}{2}C - c\cos B, \quad s_1 = bc\cos\tfrac{1}{2}C\sin(B - \tfrac{1}{2}C),$$

$$h_{a_1} = b\sin C, \quad h_{b_1} = c\sin(B - \tfrac{1}{2}C), \quad h_{c_1} = 2b\cos\tfrac{1}{2}C\sin(B - \tfrac{1}{2}C),$$

$$R_1 = \frac{c}{2\sin\frac{1}{2}C}, \quad r_1 = \frac{b\sin C\sin(\frac{1}{2}B - \frac{1}{4}C)}{2\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{4}C},$$

$$r_{a_1} = \frac{b\sin C\sin(\frac{1}{2}B - \frac{1}{4}C)}{2\cos\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{4}C}, \quad r_{b_1} = \frac{b\sin C\cos(\frac{1}{2}B - \frac{1}{4}C)}{\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{4}C}, \quad r_{c_1} = \frac{b\sin C\cos(\frac{1}{2}B - \frac{1}{4}C)}{\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{4}C}.$$

Aceste relații sunt valabile și în cazul când unghiul B este obtuz, (în figură B este ascuțit).

Vom numi acest tablou, *operatorul de transformare* (T_1), sau mai simplu, *operatorul* (T_1).

Utilizarea operatorului (T_1).

Operatorul (T_1) pe care l'am definit precedent, ne permite a stabili multe relații noui și interesante, între elementele unui triunghiu oarecare A B C.

1°. Plecăm de exemplu dela relațiile clasice cunoscute, care pentru triunghiul $A_1 B_1 C_1$, sunt:

$$(1)\qquad \frac{a_1}{\sin A_1}=\frac{b_1}{\sin B_1}=\frac{c_1}{\sin C_1},$$

$$(2)\qquad a_1=b_1\cos C_1+c_1\cos B_1,\ b_1=c_1\cos A_1+a_1\cos C_1,\ c_1=a_1\cos B_1+b_1\cos A_1$$

$$(3)\qquad a_1^2=b_1^2+c_1^2-2b_1c_1\cos A_1,\ b_1^2=c_1^2+a_1^2-2c_1a_1\cos B_1,\ c_1^2=a_1^2+b_1^2-2a_1b_1\cos C_1,$$

$$(4)\qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A_1-B_1)=\frac{a_1-b_1}{a_1+b_1}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}C_1,\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(B_1-C_1)=\frac{b_1-c_1}{b_1+c_1}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A_1,\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(C_1-A_1)=\frac{c_1-a_1}{c_1+a_1}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}B_1.$$

Transformând aceste relații cu *operatorul* (T_1), adică înlocuind elementele triunghiului $A_1 B_1 C_1$ cu valorile lor din tabloul (T_1), obținem după unele simplificări:

$$(1')\qquad \frac{a+b-2c\cos B}{\sin(B-\frac{1}{2}C)}=\frac{2b\cos\frac{1}{2}C}{\sin B}=\frac{c}{\sin\frac{1}{2}C}$$

$$(2')\qquad a+b=2b\cos^2\tfrac{1}{2}C+c\cos B,\quad b\cos C=c\cos(B-\tfrac{1}{2}C)+(a-2c\cos B)\cos\tfrac{1}{2}C,$$
$$c=2b\cos\tfrac{1}{2}C\cos(B-\tfrac{1}{2}C)-(a+b-2c\cos B)\cos B$$

$$(3')\qquad (a+b-2c\cos B)^2=4b^2\cos^2\tfrac{1}{2}C+c^2-4bc\cos\tfrac{1}{2}C\cos(B-\tfrac{1}{2}C),$$
$$4b^2\cos^2\tfrac{1}{2}C=c^2+(a+b-2c\cos B)^2+2c(a+b-2c\cos B)\cos B,$$
$$c^2=(a+b-2c\cos B)^2-4b(a-2c\cos B)\cos^2\tfrac{1}{2}C.$$

$$(4')\qquad \operatorname{cotg}\left(\tfrac{1}{4}C-B\right)=\frac{a+b-2c\cos B-2b\cos\frac{1}{2}C}{a+b-2c\cos B+2b\cos\frac{1}{2}C}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{4}C$$

$$\operatorname{cotg}\left(\tfrac{1}{2}B+\tfrac{1}{4}C\right)=\frac{2b\cos\frac{1}{2}C-c}{2b\cos\frac{1}{2}C+c}\operatorname{cotg}\left(\tfrac{1}{2}B-\tfrac{1}{4}C\right)$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(C-B)=\frac{2c\cos^2\frac{1}{2}B-p}{p-c\cos B}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B.$$

Avem astfel noui relații remarcabile într'un triunghiu A B C. Ar fi interesant ca ele să fie stabilite și pe cale directă.

2°. Dar *operatorul* (T_1) poate fi utilizat la transformarea oricăror alte identități cunoscute, pe care le transformă în noui identități. Pentru aceasta să luăm din „Compléments de Trigonométrie", par *F. G. M.* și din „Culegerea de Probleme, de *V. Cristescu*, revăzută de *Gh. Th. Gheorghiu* următoarele identități, care pentru triunghiul $A_1 B_1 C_1$, sunt:

$$(5)\qquad \sin\tfrac{1}{2}(B_1-C_1)=\frac{b_1-c_1}{a_1}\cos\tfrac{1}{2}A_1,$$

$$(6)\qquad \cos\tfrac{1}{2}(B_1-C_1)=\frac{b_1+c_1}{a_1}\sin\tfrac{1}{2}A_1,$$

$$(7)\qquad b_1\cos C_1-c_1\cos B_1=\frac{b_1^2-c_1^2}{a_1},$$

$$(8)\qquad b_1\cos B_1+c_1\cos C_1=a_1\cos(B_1-C_1),$$

$$(9)\qquad \frac{\sin(A_1-B_1)}{\sin(A_1+B_1)}=\frac{a_1^2-b_1^2}{c_1^2},$$

$$(10)\qquad a_1\sin(B_1-C_1)+b_1\sin(C_1-A_1)+c_1\sin(A_1-B_1)=0$$

$$(11)\qquad s_1=\frac{(b_1^2-c_1^2)\sin B_1\sin C_1}{2\sin(B_1-C_1)},$$

(12) $$h_{a_1}=\frac{2p_1\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}}{\cos\frac{1}{2}A},$$

(13) $$b_1\cos^2\tfrac{1}{2}C_1+c_1\cos^2\tfrac{1}{2}B_1=p_1,$$

(14) $$\frac{1}{r_1}=\frac{1}{h_{a_1}}+\frac{1}{h_{b_1}}+\frac{1}{h_{c_1}}.$$

Aceste identităţi supuse *operatorului* (T_1), se transformă respectiv în următoarele noui identităţi remarcabile.

(5′) $$\cos\left(\tfrac{1}{2}B+\tfrac{1}{4}C\right)=\frac{2b\cos\frac{1}{2}C-c}{a+b-2c\cos B}\cos\left(\tfrac{1}{2}B-\tfrac{1}{4}C\right)$$

(6′) $$\sin\left(\tfrac{1}{2}B+\tfrac{1}{4}C\right)=\frac{2b\cos\frac{1}{2}C+c}{a+b-2c\cos B}\sin\left(\tfrac{1}{2}B-\tfrac{1}{4}C\right)$$

(7′) $$c\cos B+2b\cos^2\tfrac{1}{2}C=\frac{4b^2\cos^2\frac{1}{2}C-c^2}{a+b-2c\cos B}$$

(8′) $$(2b\cos B-c)\cos\tfrac{1}{2}C=(a+b-2c\cos B)\cos\left(B+\tfrac{1}{2}C\right)$$

(9′) $$\frac{\sin(2B-\frac{1}{2}C)}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{4b^2\cos^2\frac{1}{2}C-(a+b-2c\cos B)^2}{c^2}$$

(10′) $$(a+b-2c\cos B)\sin\left(B+\tfrac{1}{2}C\right)+2b\cos\tfrac{1}{2}C\sin(C-B)=c\sin\left(2B-\tfrac{1}{2}C\right)$$

(11′) $$2bc\sin\left(B-\tfrac{1}{2}C\right)\sin\left(B+\tfrac{1}{2}C\right)=(4b^2\cos^2\tfrac{1}{2}C-c^2)\sin B\sin\tfrac{1}{2}C$$

(12′) $$b\sin C\cos\left(\tfrac{1}{2}B-\tfrac{1}{4}C\right)=2(p+b\cos\tfrac{1}{2}C-c\cos B)\cos\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{4}C$$

(13′) $$2b\cos\tfrac{1}{2}C\cos^2\tfrac{1}{4}C+c\sin^2\tfrac{1}{2}B=p+b\cos\tfrac{1}{2}C-c\cos B$$

(14′) $$\frac{2\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{4}C}{b\sin C\sin\left(\frac{1}{2}B-\frac{1}{4}C\right)}=\frac{1}{b\sin C}+\frac{1}{c\sin\left(B-\frac{1}{2}C\right)}+\frac{1}{2b\cos\frac{1}{2}C\sin(B-\frac{1}{2}C)}$$

Am obţinut astfel alte noui relaţii între elementele unui triunghiu oarecare A B C, relaţii care cu greu s'ar putea stabili pe cale directă.

III.
Metoda de iterare.

Dacă iterăm procedeul folosit mai sus, adică dacă plecând dela triunghiul $A_1B_1C_1$ formăm triunghiul auxiliar $A_2B_2C_2$, în acelaşi mod cum am format triunghiul $A_1B_1C_1$ plecând dela triunghiul A B C, atunci găsim că elementele triunghiului $A_2B_2C_2$, în funcţie de acelea ale triunghiului $A_1B_1C_1$, conform *operatornlui* (T_1). sunt date de relaţiile:

$$a_2=a_1+b_1-2c_1\cos B_1,\quad b_2=2b_1\cos\tfrac{1}{2}C_1,\quad c_2=c_1,$$
$$A_2=B_1-\tfrac{1}{2}C_1,\quad B_2=180^0-B_1,\quad C_2=\tfrac{1}{2}C_1.$$

Ne mulţumim numai cu aceste elemente. Inlocuind aci, a_1, b_1, c_1, A_1, B_1, C_1 cu valorile lor din tabloul (T_1), obţinem următorul tablou *iterat* (T_2):

TABLOUL (T_2).

(T_2) $$a_2=a+b+2b\cos\tfrac{1}{2}C,\ b_2=4b\cos\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{4}C,\ c_2=c$$
$$A_2=180^0-(B+\tfrac{1}{4}C),\quad B_2=B,\quad C_2=\tfrac{1}{4}C.$$

Cu ajutorul acestui tablou mai redus, numit şi *operatorul* (T_2) să transformăm relaţiile (1), (2), (3) şi (4) din Cap. II. § 1, scrise în prealabil pentru triunghiul $A_2B_2C_2$. Obţinem astfel următoarele noui relaţii remarcabile, valabile pentru un triunghiu oarecare A B C:

(1″) $$\frac{a+b+2b\cos\frac{1}{2}C}{\sin(B+\frac{1}{4}C)}=\frac{4b\cos\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{4}C}{\sin B}=\frac{c}{\sin\frac{1}{4}C}.$$

(2″)
$$a+b+2b\cos\tfrac{1}{2}C=4b\cos\tfrac{1}{2}C\cos^2\tfrac{1}{4}C+c\cos B,$$
$$(a+b)\cos\tfrac{1}{4}C=2b\cos\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{4}C+c\cos\left(B+\tfrac{1}{4}C\right),$$
$$c=(a+b+2b\cos\tfrac{1}{2}C)\cos B-4b\cos\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{4}C\cos\left(B+\tfrac{1}{4}C\right).$$

$$(a+b+2b\cos\tfrac{1}{2}C)^2 = c^2 + 16b^2\cos^2\tfrac{1}{2}C\cos^2\tfrac{1}{4}C + 8bc\cos\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{4}C\cos(B+\tfrac{1}{4}C).$$

(3″) $$16b^2\cos^2\tfrac{1}{2}C\cos^2\tfrac{1}{4}C = c^2 + (a+b+2b\cos\tfrac{1}{2}C)^2 - 2c(a+b+2b\cos\tfrac{1}{2}C)\cos B,$$

$$c^2 = (a+b+2b\cos\tfrac{1}{2}C)^2 - 8(a+b)\cos\tfrac{1}{2}C\cos^2\tfrac{1}{4}C.$$

$$\operatorname{cotg}(B+\tfrac{1}{8}C) = \frac{a+b+2b\cos\frac{1}{2}C - 4b\cos\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{4}C}{a+b+2b\cos\frac{1}{2}C + 4b\cos\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{4}C}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{8}C,$$

(4″) $$\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}B - \tfrac{1}{8}C) = \frac{4b\cos\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{4}C - c}{4b\cos\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{4}C + c}\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{8}C),$$

$$\operatorname{cotg}(\tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{4}C) = \frac{a+b+2b\cos\frac{1}{2}C - c}{a+b+2b\cos\frac{1}{2}C + c}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}B.$$

Evident că am putea continua iterarea; de asemeni am putea alege alt triunghiu auxiliar $A_1B_1C_1$. În felul aceasta, metoda folosită apare ca un izvor de unde pot decurge ori câte relații noui, remarcabile, între elementele unui triunghiu oarecare A B C.

NOTA MATEMATICA

6 — *O altă soluție a problemei 2394* (G. M. XLVII p. 417). α, β, γ, a, b, c, d, e fiind cifre, să se găsească două patrate de cinci cifre

$$\alpha\beta\gamma^2 = abcde \text{ și } \gamma\beta\alpha^2 = edcba,$$

unde numerele $\alpha\beta\gamma$ și $\gamma\beta\alpha$ ca urmare trebue să fie numere <317. Avem asupra lui α și γ o primă condiție, anume să fie ≤ 3.

Făcând diferența celor două egalități, avem

(I) $$101(a-e)+10(b-d)=(\alpha-\gamma)[101(\alpha+\gamma)+20\beta].$$

Dela început observăm că, dacă presupunem $\gamma=\alpha$ va trebui să avem neapărat $a-e=0$ și $b-d=0$, căci în ipoteza contrară, că ambele sunt diferite de zero, observăm că având

$$101\,|a-e| > 100 \text{ și } 10\,|b-d| < 100$$

egalitatea (I) nu poate avea loc.

In aceste condiții vom presupune $\gamma < \alpha$.

1°. Dacă $\beta=\gamma=0$, patratul trebue să fie de forma α^20000, deci $\alpha^2 \leq 9$ și astfel ca α^2 să fie egal cu răsturnatul lui, ceea ce are loc pentru toate soluțiile $\alpha^2 = 1;\ 4;\ 9$ Avem astfel trei soluții formale ale problemii:

$$100^2 = 10000;\ 001^2 = 00001$$
$$200^2 = 40000;\ 002^2 = 00004$$
$$300^2 = 90000;\ 003^2 = 00009$$

2°. Dacă $\gamma=0$, α și $\beta\neq 0$, avem soluțiile formale ale problemei deduse din soluțiile problemei pusă pentru pătratele numerelor de două cifre care satisfac problemei analoage:

$$\alpha\beta^2 = abc;\quad \beta\alpha^2 = cba,$$

adică

$$012^2 = 00144;\quad 210^2 = 44100$$
$$013^2 = 00169;\quad 310^2 = 96100.$$

3°. Dacă $\beta=0$, $\alpha>\gamma>0$, egalitatea (I) devine

$$101(a-e)+10(b-d)=(\alpha-\gamma)[101(\alpha+\gamma)],$$

deci în acest caz 101 trebue să dividă pe $10(b-d)$ și cum e prim cu *10*, trebue și este de ajuns ca să avem $b=d$, în care condiție egalitatea (1) devine

II) $$a-e=(\alpha-\gamma)(\alpha+\gamma).$$

Observând acum că $\gamma<\alpha\leq 3$, că $(\alpha-\gamma)$ și $(\alpha+\gamma)$ sunt de aceeași paritate și că a și e sunt nu numai terminații de pătrate ci chiar pătrate ($\beta=0$), $e<a$ după egalitatea (II), avem luând $a=9$, $e=1$, deci ($\alpha=3$, $\gamma=1$): $9-1=(3-1)(3+1)$, dacă $a=9$, $e=4$ ($\alpha=3$, $\gamma=2$), $9-4=(3-2)(3+2)$ avem

că prima dă o soluție a problemei

$$301^2 = 90601 \quad \text{și} \quad 103^2 = 10609,$$

cealaltă soluție nu convine, având $d \neq b$, prin urmare nu satisface egalității (I).

Dacă $a=4$, $e=1$ ($\alpha=2$, $\gamma=1$) avem: $4-1=(2-1)(2+1)$, iar $b=d=0$, deci problema admite soluția

$$201^2 = 40401 \quad \text{și} \quad 102^2 = 10404.$$

4°. Rămâne acum să găsim soluțiile pentru cazul α, β, γ sunt toate diferite de zero, $\gamma < \alpha$.

Observăm din egalitatea (I), că dacă a și e sunt de paritate diferită, α și γ sunt deasemenea de paritate diferită și reciproc; dacă a și e sunt deaceeași paritate α și γ sunt de aceeași paritate; dar cea mai mare valoare a lui α este 3, rezultă că în primul caz avem $\alpha - \gamma = 1$, iar în al doilea caz $\alpha - \gamma = 2$ ($\alpha = 3$, $\gamma = 1$). Să luăm cazul α $\gamma=2$. Egalitatea (I) devine:

$$101(9-1) + 10(b-d) = 8(101 + 5\beta),$$

din care rezultă imediat: $b-d=4\beta$ $*_*$ $\beta \leq 2$ deci singurele soluții probabile:

321 și *311*, dar $321 > 317$, rămâne deci

$311^2 = 96721$ pentru care $113^2 = 12769$,

o soluție a problemei.

Dacă luăm $\alpha - \gamma = 1$ egalitatea (I) devine:

(III) $$101(a-e) + 10(b-d) = 101 \times 5 + 20\beta,$$

dar $\alpha\beta\gamma < 317$, deci $\beta = 1$ singura valoare posibilă dacă luăm $\alpha = 3$, $\gamma = 2$; dar $312^2 = 97344$, iar egalitatea $101 \times 5 + 10 \times 3 = 5 \times 101 + 20$ este imposibilă.

Dacă luăm $\alpha = 2$, $\gamma = 1$, egalitatea (III) devine:

(III′) $$10(a-e) + 10(b-d) = 3 \times 101 + 20\beta$$

dar $e=1$; punem atunci $a=4+m$ ($m \leq 5$) și egalitatea (III′) devine

$$101m + 10(b-d) = 20\beta$$

din care rezultă că m trebue să fie divizibil cu 10, deci $m=0$ și ca urmare $a=4$ și $b-d=2\beta$. Cum cea mai mare valoare pară a lui $b-d$ este 8, rezultă că putem lua pentru $\beta=4, 3, 2, 1$; deci soluțiile probabile 241, 231, 221, 211, dintre care numai ultimele două convin problemei

$$221^2 = 48841 \quad \text{și} \quad 122^2 = 14884$$

$$211^2 = 44521 \quad \text{și} \quad 112^2 = 12544.$$

Cum s'a spus problema are numai cinci soluții propriu zise.

O. N. TINO

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul LIII, N-rul 9. Mai 1948. Despre poligoane armonice, de *V. Thébault*. Raport pentru premiul de Algebră „*A. Gh. Ioachimescu*", de Prof. *Th. Angheluță*, Prof. *N Ciorănescu*, *N. Georgescu Roegen*. Note matematice. Chestiuni de examen. Probleme rezolvate și propuse.

2. *Radu Bădescu și Cor. Naneș*, Culegere de Probleme technice propuse la examenele de Matematici Generale și Mecanică, București 1946.

3. *Radu Bădescu și Fl. Bărbulescu*, Trasarea marginei comunei și rezultate obținute la plugurile Reșița, extras din Buletinul de Agronomie din București, 1946

4. *Radu Bădescu și Fl. Bărbulescu*, Relații matematice în studiul răsturnării brazdei de către plug, extras din Gazeta Matematică, 1945.

5. *Radu Bădescu*, O problemă de actualitate, extras din Gazeta Matematică, 1948.

6. *Radu Bădescu*, Observări în legătură cu fixarea prețurilor la unele produse, extras din Buletinul Facultății de Agronomie, 1946.

7. *Radu Bădescu*, Evoluția matematicelor și unele aplicațiuni biologice, extras din Buletinul Facultății de Agronomie, 1946.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1311*). — *Fie* $\alpha=(OA, OC)$, $\beta=(OC, OB)$, $\gamma=(OB, OD)$ *unghiurile ce fac între ele razele unui fascicol de patru drepte. Să se arate că dacă între aceste unghiuri avem relația*

$$\operatorname{tg}(\beta+\gamma)(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) = 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta,$$

atunci cele patru drepte formează un fascicol armonic.

MIHAIL BOTEZ

Soluția dată de d-l Prof. *Negrea A. Mircea* (Ploiești). După câteva transformări elementare relația din enunț se poate scrie sub forma

$$\frac{2}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(\beta+\gamma)}.$$

Tăind fascicolul cu o secantă, raportul anarmo-

*) Enunț precizat și corectat.

nic obținut este un invariant față de poziția secantei*); putem s'o alegem deci ca să fie perpendiculară pe raza OC. Dacă notăm cu A, B, C, D punctele unde această secantă taie cele patru raze, relația precedentă se scrie

$$\frac{2}{AB}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}$$

adică (ABCD) = — 1, și deci cele patru drepte formează un fascicol armonic.

Problema 1389. — *Într'o sferă de rază* R, *se înscrie un con circular drept, având raza bazei* $\frac{3}{5}$ *din raza sferei. Se duce din centrul sferei* O, *perpendiculara* OE *pe generatoarea conului și prin* E *o secțiune paralelă cu baza conului. Să se afle volumul conului și al trunchiului de con format, precum și raportul lor.*

CORNELIA NANES

Soluția. Făcând o secțiune în sferă trecând prin vârful conului A, prin generatoarea AE și prin centrul sferei, obținem ca secțiune în con un triunghiu isoscel ABC înscris în cercul secțiunei sferei. Fie D punctul unde AO întâlnește pe BC, și H punctul unde paralela dusă prin E (situat pe AB) taie pe AD. Cum E este la mijlocul lui AB, înseamnă că $EH=\frac{1}{2}BD$, $AH=\frac{1}{2}AD$. Însemnând cu V volumul conului, cu V_1 volumul trunchiului de con și cu v volumul conului mic, avem

$$V=\frac{1}{3}\pi BD^2.AD,\quad v=\frac{1}{3}\pi EH^2.AH=\frac{1}{24}\pi BD^2.AD$$

$$V-v=V_1=\frac{7}{24}\pi BD^2.AD,\ \text{deci}$$

$$\frac{V}{V_1}=\frac{8}{7}.$$

Să calculăm înălțimea AD. Avem AD=AO+OD; iar din triunghiul dreptunghiu OBD în care OB=R, $BD=\frac{3}{5}R$, scoatem $OD=\frac{4}{5}R$. Deci $AD=\frac{9}{5}R$, înlocuind mai sus

$$V=\frac{27}{125}\pi R^3,\quad V_1=\frac{189}{1000}\pi R^3.$$

Au rezolvat problema D-rele: *Popescu N. M., Savin M.* și D-nii: *Andrievici N., Baumgartner I. I., Bakonyi C., Bejanaru Gh. Victor, Bucur N. Virgil, Cazanacli V. P., Dăscălescu Șt. Hr., Florescu L. Victor, Godeanu Vas., Herman A. Victor, Hompola T., Jidanu I. C., Lupescu Gh. Cor., Marica I. H., Matei D. D., Melenti S., Milea E., Moisă I. Gh., Murgu V. Marțian, Novac I. I., Păduret Vas., Pambuadjun K., Popovici I. Gav., Postelnicescu C. M., Pupăzan C., Rozenberg I., Receanu M. C, Ștefănescu D. N., Tincu C. C. și Zagaican Ilie.*

Gh. Th. Gh.

*) *Gh. Th. Gh.* Curs de Geometrie, vol. I, p. 80.

Problema 1414. — *Fiind dat triunghiul* ABC, *luăm pe laturile* BA *și* CA, AB *și* CB, AC *și* BC *lungimile* $BM_a=CN_a=BC$, $AM_b=CN_b=AC$, $AM_c=BN_c=BA$ *și însemnăm cu* S, S_a, S_b, S_c *respectiv ariile triunghiurilor* ABC, M_aAN_a, M_bBN_b, M_cCN_c, *apoi cu* r *și* R *razele cercurilor înscris și circumscris triunghiului* ABC. *Să se stabilească relația*

$$S_a+S_b+S_c=S\left(1-\frac{2r}{R}\right).$$

V. THÉBAULT

Soluția. In no 6 vol. XV, odată cu publicarea acestei probleme s'a publicat o notă de către autorul problemei în care arâta că *aria algebrică* S_a este egală cu

$$S_a=\frac{a(a-b)(a-c)}{4R},\ldots$$

Cu această valoare, avem

$$S_a+S_b+S_c=\frac{\Sigma a(a-b)(a-c)}{4R}=$$

$$\frac{abc-2(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4R}=$$

$$=\frac{abc-8(p-a)(p-b)(p-c)}{4R}=S-\frac{2S^2}{pR}=$$

$$=S\left(1-\frac{2S}{pR}\right)=S\left(1-\frac{2r}{R}\right).$$

Notă. Relația din enunț nu este valabilă decât în cazul că luăm ariile S_a, S_b, S_c cu semnul lor.

Au rezolvat problema D-nii: *Amărăștеanu M., Andrievici N., Bogza M., Florescu Victor, Godeanu Ig. Vas. Ionescu F. P., Matei D. D., Negrea A. M., Novac I. I., Postelnicescu C. M., Sâmbotin Gh., Tincu C. C. și Wegener Eugen.*

Gh. Th. Gh.

Problema 1447. — *Se dă un cerc* O *de rază* R = 2. *Din punctele* P *și* M *colineare cu* O *se duc tangentele* PA *și* MB, *astfel ca proiecția razei* OA *pe* OP, $OA'=\sqrt{2}$; *iar proiecția razei* OA *pe* OB, $OA''=\sqrt{3}$. *Se cere:* 1°. *Distanța* PM *între cele două puncte.* 2°. *Lungimile* PN *și* MN *ale tangentelor,* N *fiind punctul lor de intersecție.*

MIHAIL BOTEZ

Soluția. 1° Din triunghiurile dreptunghice OAA' și OAA'' scoatem imediat $\cos AOA' = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\sphericalangle AOA' = 45^\circ$ și $\cos AOA'' = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\sphericalangle AOA'' = 30^\circ$. Apoi, din triunghiurile dreptunghice OAP și OBM scoatem $OP = 2 / \cos 45^\circ = 2\sqrt{2}$ și

$$OM = 2 / \sin 15^\circ = 8 / (\sqrt{6} - \sqrt{2}) = 2(\sqrt{6} + \sqrt{2})$$

încât

$$PM = OM - OP = 2\sqrt{6}.$$

2° Cum $\sphericalangle OMB = 90^\circ - \sphericalangle MOB = 15^\circ$ și $\sphericalangle OPA = 90^\circ - \sphericalangle AOP = 45^\circ$, din triunghiul PMN scoatem

$$\frac{PN}{\sin 15^\circ} = \frac{MN}{\sin 45^\circ} = \frac{PM}{\sin 30^\circ}$$

și cum $PM = 2\sqrt{6}$, se găsește $PN = 2(3 - \sqrt{3})$, $MN = 2\sqrt{2}$.

Discuție. In calculele de mai sus, am presupus că punctele P și M sunt de aceiași parte a centrului O și că sunt așezate în ordinea O, P, M. Este deci necesar să mai considerăm și cazurile următoare:

a) *Punctele* P *și* M *sunt de aceiași parte a lui* O *și așezate în ordinea* O, M, P In cazul acesta, urmând aceiași cale ca mai sus, se găsesc valorile: $MP = 2(2\sqrt{2} - \sqrt{6})$, $PN = 2(\sqrt{3} - 1)$, $MN = 4(2 - \sqrt{3})$.

b) P *și* M *sunt deoparte și de alta a centrului* O, P *fiind mai aproape de* O *decât* M. În cazul acesta tangentele trebuesc să fie așezate deoparte și de alta a dreptei OMP, și A'' se găsește pe prelungirea lui OB.

Se găsesc rezultatele:

$$MP = 2(\sqrt{6} + 2\sqrt{2}),\ MN = 4(2 + \sqrt{3}),\ PN = 2(1 + \sqrt{3})$$

c) P *și* M *sunt deoparte și de alta a centrului* O M *fiind mai aproape de* O *decât* P. Tangentele sunt iarăși deoparte și de alta a dreptei OMP și A'' este pe prelungirea lui OB. Se găsesc valorile:

$$MP = 2\sqrt{6},\ PN = 2(3 + \sqrt{3}),\ MN = 4\sqrt{3}.$$

Au rezolvat problema, numai într'unul din cazuri fără să facă discuția de mai sus, D-nii: *Amărăşteanu F. M., Bakonyi C., Cazanacli P, Constantinescu C. V., Florescu V., Jidanu C., Lupescu Gh. Cor., Matei D. D., Moisovici M. Şt., Negrea A. Mircea, Novac I. I., Popovici I. Gav., Săruleşteanu I. Em., Tarălungă D., Tincu C C, Wegener Eug. şi Zagaican I.*

Gh. Th. Gh

Problema 1789. — *Se consideră un triunghiu* ABC *având unghiurile ascuțite. Fie* A', B', C' *punctele unde înălțimile triunghiului taie a doua oară cercul circumscris. Se cere:* 1°. *Să se găsească suprafața patrulaterului* $ABA'C$ *în funcție de elementele triunghiului dat.* 2°. *Ce relație trebue să existe între unghiurile triunghiului* ABC *pentruca suprafața calculată la no. precedent să fie nulă. Să se verifice rezultatul geometric.* 3°. *Să se arate că suprafața exagonului* $AB'CA'BC'$ *este egală cu de două ori suprafața triunghiului* ABC. *Să se verifice rezultatul geometric.*

Gh. Th. Georghiu.

Soluția. 1° Avem: $S_{ABA'C} = \frac{1}{2} AA' \cdot BC \sin 90^\circ$. Fie A'' piciorul înălțimei AA' pe latura BC. Cum $\sphericalangle A''BA' = \sphericalangle A'AC = 90^\circ - C$, avem succesiv: $AA'' = AB \sin B = c \sin B$, $BA'' = AB \cos B = c \cos B$, $A'A'' = BA'' \operatorname{cotg} C = c \cos B \operatorname{cotg} C$, $AA' = AA'' + A''A' = c(\sin B + \cos B \operatorname{cotg} C) = c \cos(B - C) / \sin C$. Rezultă

$$S_{ABA'C} = \frac{ac \cos(B - C)}{2 \sin C} = \frac{a^2 \cos(B - C)}{2 \sin A}.$$

2°. Pentruca suprafața precedentă să fie nulă, este necesar ca unul din factorii care o compun să fie nul. Cum $BC \neq 0$ este necesar ca $AA' = 0$. Să presupunem triunghiul variază în așa fel ca unghiul B să crească. Cu cât acest unghiu crește, A' se apropie de B, lungimea AA' descrescând. Când $B = 90^\circ$, $A' \equiv B$ iar când unghiul B crește mai departe AA' se micșorează continuu. Expresia găsită mai sus pentru această lungime era calculată în ipoteza că unghiul B este ascuțit. Să vedem dacă se menține în cazul că B este obtuz. In această ipoteză avem $AA' = AA'' - A''A'$. Dar $AA'' = c \sin(180^\circ - B) = c \sin B$, $A''B = c \cos(180^\circ - B) = -c \cos B$, iar din triunghiul dreptunghiu $A'A''B$ în care unghiul din A' este egal cu C, patrulaterul $AA'BC$ fiind inscriptibil, $A'A'' = A''B \operatorname{cotg} C = -c \cos B \operatorname{cotg} C$. Deci

$$AA' = c \sin B + c \cos B \operatorname{cotg} C = \frac{c \cos(B - C)}{\sin C},$$

adică aceiași cu formula găsită în cazul unghiului B ascuțit. Deci, pentruca $AA' = 0$, trebue ca $B - C = 90^\circ$. Explicația geometrică revine la a arăta că atunci când $B = C + 90^\circ$, $AA' = 0$ adică AA' este

tangentă la cerc. În adevăr, fie O centrul cercului şi D punctul diametral opus lui C în cerc.

Se vede că arc A D C = arc AD + arc C D sau $B = \frac{1}{2}$ arc A D + 90°, adică $\frac{1}{2}$ arc AD = C = ∢AOD. Această relaţie spune că AO este paralelă cu BC, şi cum AA″ este perpendiculară pe BC, va fi perpendiculară şi pe AO adică este tangentă la cerc.

Observare. Exprimarea din enunţ este greşită deoarece în ipoteza că AA′=0, suprafaţa patrulaterului ABA′C se reduce la suprafaţa triunghiului ABC şi deci diferită de zero. Faptul provine din aceia că suprafaţa acestui patrulater numai este dată de formula dela 1° în ipoteza că B este obtuz.

3°. Proprietatea revine la a arăta relaţia

$$S_{BA'C} + S_{CB'A} + S_{AC'B} = S_{ABC}.$$

Dar cum

$$S_{BA'C} = \frac{1}{2} BC \cdot A'A'' = \frac{1}{2} ac \cos B \operatorname{cotg} C = \frac{abc}{4R} \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C = S \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C,$$

relaţia precedentă se reduce la $\Sigma \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C = 1$ care este o relaţie cunoscută. Explicaţia geometrică se reduce la a arăta că A′A″ = A″H (H ortocentru triunghiului) proprietate cunoscută într'un triunghiu oarecare.

Au rezolvat problema D-nii: *Aldea V. Minea, Bakonyi C., Chintescu M. Matei, Cristea I. Nic., Deutsch Em., Dragomir A., Enăchescu Gr. I., Popescu N. Corneliu şi Wegener Eugen.*

Gh. Th. Gh.

Problema 2238. — *Să se găsească funcţia cea mai generală* $\varphi(x, y, z, t)$, *care satisface ecuaţiei*

$$\varphi(x, y, z, t) = \varphi(z, t, x, y).$$

M. GHERMANESCU

Soluţia. Vom da o soluţie analoagă celei date problemei 2079, la pag. 56, V, XXIV, de care nu a ştiut nimeni să profite.

Observăm că funcţia din membrul al doilea, $\varphi(z, t, x, y)$, se obţine din cea din primul membru schimbând x cu z şi y cu t. Reamintim că o funcţie de două variabile y şi t de exemplu se poate scrie sub forma

$$(1) \quad \varphi(x, y, z, t) = \lambda(x, y, z, t) + \mu(x, y, z, t),$$

în care λ este *simetrică*, iar μ *simetric strâmbă* în raport cu variabilele y şi t, adică

$$(2) \quad \lambda(x, y, y, t) = \lambda(x, t, z, y), \ \mu(x, y, z, t) = -\mu(x, t, z, y).$$

Avem, de altfel

$$\lambda(x, y, z, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x, y, z, t) + \varphi(x, t, z, y)],$$
$$\mu(x, y, z, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x, y, z, t) - \varphi(x, t, z, y)].$$

Înlocuind în ecuaţia funcţională dată, aceasta devine

$$\lambda(x, y, z, t) + \mu(x, y, z, t) = \lambda(z, t, x, y) + \mu(z, t, x, y) = \lambda(z, y, x, t) - \mu(z, y, x, t),$$

după (2). Această egalitate se mai poate scrie însă

$$\lambda(x, y, z, t) - \lambda(z, y, x, t) = -\mu(x, y, z, t) - \mu(z, y, x, t).$$

Observăm că primul membru este simetric strâmb în raport cu (x, z), iar al doilea este simetric în raport cu aceleaşi variabile. O astfel de egalitate nu poate deci avea loc decât când fiecare din cei doi membrii este, separat, nul adică

$$\lambda(x, y, z, t) = \lambda(z, y, x, t),$$
$$\mu(x, y, z, t) = -\mu(z, y, x, t),$$

care arată că λ este simetrică, iar μ este simetric strâmbă şi în raport cu variabilele (x, z). Rezultă deci că *soluţia generală a ecuaţiei funcţionale propuse este dată de* (1), *în care* λ *şi* μ *sunt două funcţii arbitrare, prima simetrică, iar a doua simetric strâmbă în raport cu perechile de variabile* (x, z), (y, t).

Putem da, încă, o altă formă soluţiei generale a ecuaţiei funcţionale propuse care, dacă ascunde proprietăţile de simetrie semnalate, pune însă în evidenţă o altă proprietate, strâns legată de caracterul ecuaţiei propuse. In adevăr, ecuaţia funcţională propusă arată că, dacă în primul membru efectuăm două permutări circulare ale variabilelor x, y, z, t, obţinem pe al doilea. Zicem că *soluţia generală a ecuaţiei funcţionale propuse este de forma*

$$(3) \quad \varphi(x, y, z, t) = u(x, y, z, t) + u(z, t, x, y),$$

în care $u(x, y, z, t)$ *este o funcţie arbitrară.*

În adevăr, orice funcţie simetrică în raport cu două variabile y şi t se poate pune sub forma

$$(4) \quad \lambda(x, y, z, t) = A(x, y, z, t) + (x, t, z, y).$$

De asemeni, orice funcţie simetric strâmbă în raport cu aceleaşi variabile se poate pune sub forma

$$(5) \quad \mu(x, y, z, t) = B(x, y, z, t) - B(x, t, z, y).$$

Dar, după (1), putem scrie

$$A(x,y,z,t) = A'(x,y,z,t) + A''(x,y,z,t),$$
$$B(x,y,z,t) = B'(x,y,z,t) + B''(x,y,z,t),$$

în care A' este simetrică, iar A'' simetric strâmbă în raport cu (x,z). Analog B' şi B''. Cum λ şi μ din (1) sunt respectiv simetrică şi simetric strâmbă în raport cu (x,z), avem din (4) şi (5),

$$\lambda = A'(x,y,z,t) + A''(x,y,z,t) + A'(x,t,z,y) + A''(x,t,z,y) =$$
$$A'(x,y,z,t) - A''(x,y,z,t) + A'(x,t,z,y) - A''(x,t,z,y),$$
$$\mu = B'(x,y,z,t) + B''(x,y,z,t) - B'(x,t,z,y) - B''(x,t,z,y) =$$
$$-B'(x,y,z,t) - B''(x,y,z,t) + B'(x,t,z,y) - B''(x,t,z,y),$$

deci

$$A''(x,y,z,t) + A''(x,t,z,y) = 0,$$
$$B'(x,y,z,t) - B'(x,t,z,y) = 0,$$

astfel că

$$\lambda(x,y,z,t) = A'(x,y,z,t) + A'(x,t,z,y),$$
$$\mu(x,y,z,t) = B''(x,y,z,t) - B''(x,t,z,y),$$

în care A' este simetrică, iar B'' simetric strâmbă în raport cu x şi z. Rezultă

$$\varphi = \lambda + \mu = [A'(x,y,z,t) + B''(x,y,z,t)] +$$
$$[A'(z,t,x,y) + B''(z,t,x,y)] = u(x,y,z,t) + u(z,t,x,y),$$

în care u este o funcţie absolut arbitrară, ca şi A' şi B'', putând fi scrisă sub forma (1) faţă de variabilele x, şi z, ceia ce conduce, reciproc, dela (5) la (1), care sunt astfel absolut echivalente. In adevăr, analog cu (1), orice funcţie $u(x,y,z,t)$ se poate pune sub forma

$$u(x,y,z,t) = A'(x,y,z,t) + B''(x,y,z,t),$$

în care A' este simetrică, iar B'' simetric strâmbă în raport cu (x,z); deducem

$$\varphi = u(x,y,z,t) + u(z,t,x,y) = A'(x,y,z,t) + B''(x,y,z,t) +$$
$$A'(z,t,x,y) + B''(z,t,x,y) = [A'(x,y,z,t) + A'(x,t,z,y)] +$$
$$[B''(x,y,z,t) - B''(x,t,z,y)] = \lambda + \mu.$$

M. G.

Problema 2316. — *Un cerc* O *are centrul mobil pe dreapta* AO *şi este tangent în* M *unei drepte* AM. *Se cere locul intersecţiei cercului* O *cu paralela din* M *la* AO.

G-L. Gh. Buicliu

Soluţie. Fie A' un punct pe prelungirea lui AM şi N intersecţia cercului O cu paralela din M la AO. Unghiul $A'MN$ este constant fiind egal cu unghiul OAM. Rezultă că unghiul OMN este constant ca diferenţa între unghiul drept OMA' şi unghiul constant NMA'. Triunghiul isoscel MON rămâne deci asemeni cu el însuşi având unghiurile din M şi N constante. Cum laturile OM, MN rămân paralele cu ele iar O şi M descriu două drepte, rezultă că şi N descrie o dreaptă, care trece prin intersecţia A a celorlalte două drepte. De altfel şi ON rămâne de direcţie constantă. In adevăr $\sphericalangle ONM$ fiind constant şi $\sphericalangle(ON, AM)$ este constant ca diferenţa de unghiuri constante. Rezultă ca $\sphericalangle NOA$ este constant în triunghiul care are unghiul A şi $\sphericalangle(ON, AM)$ constant.

Această soluţie a fost dată de d-nii: *Gottard Francisc* (P. T.), *Manolescu Gr.* (P. T.) şi *Teodorescu P. P.* (Lic. „M. Basarab", Bucureşti).

S'au primit bune soluţii analitice de la d-nii: *Arnăutu Gh., Marin, Chesaru P. Cr., Dobrişan A. Al., Georgescu Hristu, Gottard Francisc, Macavei A. E., Meteş Mircea Mitric Aurel, Tincu C. C., Vlăduţ C.* (P. T.), *Beşchea M. Constantinescu N. Ilie* (Lic. Brăila), *Birănaş T. Ioan* (Bacalaureat, Arad), *Bogza Mihai* (Bacalaureat, Roman), *Novac I. Aurel* (Bacalaureat, Brăila), *Podracky Valer* (Lic „Diaconovici Loga" Timişoara), *Popa D. V.* (Lic. Beiuş) şi *Pali S.* (P. T.).

Problema 2446. — *Să se arate că într'un triunghiu oarecare, avem relaţiile*

$$\left(\frac{s}{r} + c\cos\tfrac{1}{2}B\right)\cos\tfrac{1}{2}C +$$
$$2c\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{4}B\cos\left[A + \tfrac{1}{4}(3B + 2C)\right] = b\cos\tfrac{1}{2}C,$$
$$\cos\tfrac{1}{4}B\cos\tfrac{1}{2}C\left(b + 2c\cos\tfrac{1}{4}B\right) =$$
$$\left(p + c\cos\tfrac{1}{2}B\right)\cos\left(\tfrac{1}{4}B - \tfrac{1}{2}C\right).$$

Mihai Giurconiu

Soluţia dată de autor şi de D-nii: C. Chiriac, (Brăila) şi *Deutsch Em,* (P. T.). Folosim metoda din articolul *„Relaţii remarcabile într'un triunghiu"*, (R. M. T.), vol. XXV p. 63). Luăm un triunghiu ABC, prelungim latura BC spre stânga cu $BB_1 = AB = c$. Am format astfel triunghiul AB_1C_1 (A_1 coincide cu A, iar C_1 cu C). Se observăm cu uşurinţă că elementele acestui triunghiu $A_1B_1C_1$, în funcţie de elementele triunghiului iniţial sunt:

$$a_1 = a + c, \quad b_1 = b, \quad c_1 = \frac{c\sin B}{\sin\frac{1}{2}B} = 2c\cos\tfrac{1}{2}B;$$
$$A_1 = A + \tfrac{1}{2}B, \quad B_1 = \tfrac{1}{2}B, \quad C_1 = C.$$

Cu triunghiul $A_1 B_1 C_1$ procedăm apoi astfel: prelungim latura $B_1 C_1$ spre stânga cu segmentul $B_1 B_2 = A B_1 = c_1$ şi prelungim pe $B_1 C_1$ şi spre dreapta cu segmentul $C_1 C_2 = A_1 C_1 = b$. Am format astfel triunghiul $A_2 B_2 C_2$ (A_2 coincide cu A). Elementele acestui nou triunghiu $A_2 B_2 C_2$ sunt respectiv:

$$(1)\quad \begin{aligned} a_2 &= a+b+c+2c\cos\tfrac{1}{2}B, \quad b_2 = 2b\cos\tfrac{1}{2}C,\\ c_2 &= 2c_1\cos\tfrac{1}{4}B = 4c\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{4}B;\\ A_2 &= A+\tfrac{1}{2}B+\tfrac{1}{4}B+\tfrac{1}{2}C = A+\tfrac{1}{4}(3B+2C),\\ B_2 &= \tfrac{1}{4}B, \quad C_2 = \tfrac{1}{2}C. \end{aligned}$$

Dacă în acest triunghiu $A_2 B_2 C_2$ aplicăm acum formulele cunoscute,

$$b_2 = c_2\cos A_2 + a_2\cos C_2,$$
$$b_2\cos B_2 + c_2\cos C_2 = a_2\cos(B_2 - C_2)$$

şi ţinem seamă de relaţiile (1), obţinem respectiv

$$2b\cos\tfrac{1}{2}C = 4c\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{4}B\cos\left[A+\tfrac{1}{4}(3B+2C)\right] + 2(p+c\cos\tfrac{1}{2}B)\cos\tfrac{1}{2}C,$$
$$2b\cos\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{4}B + 4c\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{4}B\cos\tfrac{1}{2}C = 2(p+c\cos\tfrac{1}{2}B)\cos\left(\tfrac{1}{4}B-\tfrac{1}{2}C\right).$$

Simplificând prin 2 şi observând că $p = \frac{s}{r}$, aceste relaţii se mai pot scrie, schimbând ordinea:

$$\left(\tfrac{s}{r}+c\cos\tfrac{1}{2}B\right)\cos\tfrac{1}{2}C + 2c\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{4}B\cos\left[A+\tfrac{1}{4}(3B+2C)\right] = b\cos\tfrac{1}{2}C,$$
$$\cos\tfrac{1}{4}B\cos\tfrac{1}{2}C(b+2c\cos\tfrac{1}{2}B) = (p+c\cos\tfrac{1}{2}B)\cos\left(\tfrac{1}{4}B-\tfrac{1}{2}C\right).$$

Relaţiile cerute sunt astfel stabilite.

Soluţie directă dată de d-l Mâncescu Ion (Colegiul Militar, N. Filipescu). 1°. Observând că avem

$$\cos[(A+\tfrac{1}{4}(3B+2C)] = \cos(A+B+C-\tfrac{1}{4}B-C\tfrac{1}{2}C) = \cos(180^\circ - \tfrac{1}{4}B-\tfrac{1}{2}C) = -\cos\left(\tfrac{1}{4}B+\tfrac{1}{2}C\right),$$

apoi ţinând seamă de relaţiile cunoscute,

$$\tfrac{s}{r} = p = 4R\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C,$$
$$c = 2R\sin C = 4R\sin\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}C,$$
$$b = 4R\sin\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}B,$$

primul membru al primei relaţii, notat cu E se poate scrie succesiv, efectuând unele transformări:

$$\begin{aligned} E &= 4R[(\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C + \sin\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C)\cos\tfrac{1}{2}C - \sin\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}B\cdot 2\cos\tfrac{1}{4}B\cos(\tfrac{1}{4}B+\tfrac{1}{2}C)] =\\ &4R\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C\{(\cos\tfrac{1}{2}A+\sin\tfrac{1}{2}A)\cos\tfrac{1}{2}C - \sin\tfrac{1}{2}C[\cos\tfrac{1}{2}(B+C)+\cos\tfrac{1}{2}C]\} =\\ &4R\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C(\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}C + \sin\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}C - \sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}C - \sin\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}C) =\\ &4R\cos^2\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}(A+C) =\\ &4\sin\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C = b\cos\tfrac{1}{2}C, \end{aligned}$$

astfel că prima relaţie cerută este stabilită.

2°. Notând cu E_2 al 2-lea membru al relaţiei a 2-a cerută şi ţinând seamă de formulele de mai sus, putem scrie succesiv:

$$\begin{aligned} E_2 &= 4R[(\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C + \sin\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}B)\cos(\tfrac{1}{4}B-\tfrac{1}{2}C)],\\ &= 4R\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C[(\cos\tfrac{1}{2}A+\sin\tfrac{1}{2}C)\cos(\tfrac{1}{4}B-\tfrac{1}{2}C)]\\ &= 4R\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C\cos(\tfrac{1}{4}B-\tfrac{1}{2}C)[\sin\tfrac{1}{2}(B+C)+\sin\tfrac{1}{2}C)]\\ &= 8R\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C\cos(\tfrac{1}{4}B-\tfrac{1}{2}C)\sin(\tfrac{1}{4}B+\tfrac{1}{2}C)\cos\tfrac{1}{4}B\\ &= 4R\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{4}B\cos\tfrac{1}{2}C(\sin\tfrac{1}{2}B+\sin C)\\ &= 4R\sin\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{4}B\cos\tfrac{1}{2}C\\ &+ 4R\sin C\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{4}B\cos\tfrac{1}{2}C\\ &= \cos\tfrac{1}{4}B\cos\tfrac{1}{2}C(b+2c\cos\tfrac{1}{2}B). \end{aligned}$$

Relaţia a 2-a din enunţ este astfel şi ea stabilită.

Alte soluţii date de d-nii: *Ciucescu Paul* (lic. Slatina), *Constantinescu Virgil* (Lic. Slatina), *Manolescu Gh.* (P.T.), *Munteanu Ion* (Colegiul Milit., N Filipescu), *Novac Ioan* (P. T.), *Stănilă D. G. B.* (Buzău), *Tincu C-tin* (P. T.), şi *Teodorescu Petre* (Lic. Matei Basarab, Bucureşti).

D-l *Deutsch Em.* folosind prima metodă a dat şi o generalizare relaţiilor din enunţ.

Problema 2474. — *Fie*

$$f(x) = \frac{2b}{x}\left(a\sqrt{x-b^2} + b\sqrt{x-a^2}\right).$$

Să se arate că: $f(x_1) = d$, dacă

$$x_1 = \left(\frac{a^2-c^2-d^2}{2d}\right)^2 + c^2 \text{ şi } 4b^2 = (a-c)^2 + d^2.$$

MARIA NEUMANN

Soluția. Inlocuind, avem succesiv

$$4d^2(x_1-b^2)=a^4+c^4+d^4-2a^2c^2+2a^2d^2+2c^2d^2-$$
$$d^2(a^2+c^2+d^2-2ac)=(a^2-c^2)^2+d^2(a+c)^2=$$
$$(a+c)^2[(a-c)^2+d^2]=4b^2(a+c)^2,$$
$$4d^2(x_1-a^2)=a^4+c^4+d^4-2a^2c^2-2a^2d^2+2c^2d^2=$$
$$(c^2+d^2-a^2)^2.$$

Cu ajutorul acestor identități, putem scrie

$$f(x_1)=\frac{8bd^2}{(a^2-c^2+d^2)^2+4cd^2}\left[\frac{ab(a+c)}{d}+\frac{b(d^2+c^2-a^2)}{2d}\right]$$
$$=\frac{d[(a-c)^2+d^2][(a+c)^2+d^2]}{(a^2-c^2+d^2)^2+4c^2d^2}=d$$

deoarece se constată ușor că

$$(a^2+c^2+d^2)^2-4a^2c^2=(a^2-c^2+d^2)^2+4c^2d^2.$$

Observări 1° Calculele de mai sus sunt valabile numai în ipotezele

$$b(a+c)>0,\quad c^2+d^2-a^2>0.$$

Ori, se constată ușor că sunt numere a, b, c, d cari să satisfacă notațiilor problemei și totuși aceste inegalități să nu fie valabile. Enunțul problemei nu este complect.

2° Autoarea problemei ne spune că a găsit identitatea din enunț calculând raza cercului circumscris unui trapez isoscel pe cale trigonometrică și apoi pe cale analitică, $2a$, $2b$, $2c$ fiind laturile, iar d înălțimea.

3° Au rezolvat problema, fără a face observarea de mai sus, D-nii: *Cârciu I.* (P. T.), *Ciucescu P.* (Slatina), *Constantinescu G. Virgil* (Slatina), *Coțiu A.* (Cluj), *Giurconiu M.* (P. T.), *Haret Sp. R.* (București), *Ioncu S.* (P.T.), *Man I. Oct.* (Cluj), *Măncescu N. I.* (Predeal), *Mărcuțiu P. S.* (P. T.), *Novac I. I.* (P. T.), *Târcomnicu D. C.* (Slatina) și *Teodorescu P. P.* (București).

Gh. Th. Gh.

Problema 2504. — *Se cere patratul perfect de forma* $abcabcd$.

G-L Gh. Buicliu

Soluția. Dacă N^2 este patratul căutat trebue să avem

$$(1)\qquad N^2=10000.abc+10.abc+d=$$
$$10.1001.abc+d=10.1001.m+d.$$

Cea mai mare valoare a lui N^2 fiind 9999999, rezultă

$$(2)\qquad N<3163 \text{ iar } m\leq 999.$$

Cifra d fiind terminație de patrat perfect poate avea valorile

$$(1)\qquad 0,\ 1,\ 4,\ 5,\ 6 \text{ sau } 9.$$

Avem de examinat 6 cazuri, după fiecare din valorile (3).

I. $d=0$. Din (1) se deduce că și $c=0$, dec $N^2=100.1001.ab$.

Cum 1001 nu este patrat perfect, ar trebui ca ab să fie egal cu 1001, ceiace este contra ipotezei și a ultimei neegalități (2). Deci acest caz nu are soluție.

II. $d=1$, ducând în (1), obținem

$$(4)\quad N^2=10.1001.m+1\ \therefore\ N=10.M\pm 1<3163$$
$$(5)\qquad M<317.$$

Inlocuind pe N în (4), și simplificând găsim

$$(6)\quad 2M(5M\pm 1)=1001.m=7.11.13.m.$$

Deoarece $2M$ și $5M\pm 1$ nu au alți divizori comuni de cât pe 1, urmează că în (6) vom avea de considerat următoarele 8 subcazuri:

1°. $M=7p$ cu $5M\pm 1=11.13q$. De aici se deduce $35p\pm 1=11.13q$.

Rezolvând această ecuație în numere întregi, după metoda generală a rezolvărei în numere întregi a ecuației

$$ax+by=c$$

se găsește: $p=11.13.t\mp 94$; $M=1001.t\mp 658$ și $N=10010t\mp 6579$.

Cea mai mică valoare a acestui N fiind mai mare de cât limita determinată de (4), nu avem soluție în subcazul 1°.

2°. $M=11p$. Procedând ca la 1° se găsește: $N=10010.t\mp 5279$, care de asemeni nu dă soluții.

3°. $M=13p$, de unde: $N=10010.t\mp 4159$, fără soluție.

4°. $M=77p$, $\therefore\ N=10010.t\pm 3849$.

5°. $M=91p$. Vom întrebuința o altă cale de cât la subcazurile precedente. Avem $M=91p<317$ $\therefore\ p=1$, 2 sau 3. Cu aceste valori ale lui p formăm pe $5M\mp 1$ din care vor fi acceptabile numai acelea divizibile prin 11. Formăm următorul tabel

p	1	2	3
M	91	182	273
$5M+1$	456	911	1366
$5M-1$	455	909	1364

Numai 1364 este divizibil prin 11, deci:

$N=10.273-1=2729$ $\therefore$ $N^2=7447441$.

6°. $M=11.13=143$. Procedând ca în unul din subcazurile precedente găsim soluţia $N=1429$ $\therefore$ $N^2=2042041$.

7°. $M=1001p$. Neadmisibil, faţă de condiţia (5).

8°. $5M\pm1=1001p$. Se găseşte: $N=2001$ ... $N^2=4004001$.

III. $d=4$. Se găseşte ca la I: $N^2=10.1001m+4$, $N=10.M\pm2$, $2M(5M\pm2)=1001.m$ şi examinând 8 subcazuri analoage cu cele de la I, găsim soluţiile următoare, scrise în ordinea de mărime a lui N: $548^2=030.0304$; $1692^2=2862864$; $2312^2=5345344$; $2858^2=8168164$; $3148^2=9909904$.

IV. $d=5$. $N^2=10.1001m+5$ egalitate care nu poate avea loc în numere întregi căci un număr de forma *mult.* $7+5$ nu este patrat perfect, ceia ce se poate vedea ridicând la patrat numerele $7m+i$ pentru $i=0, 1, \ldots 6$ şi luând resturile împărţirii prin 7.

IV. $d=6$. $\therefore$ $N^2=10.1001m+6$. Acelaşi rezultat ca la IV.

V. $d=9$; $N^2=10.1001m+9$; $N=10M\pm3$. Procedând ca la II se găseşte soluţiile: $283^2=0080089$; $1537^2=2362369$; $1823^2=3323329$. Dacă la cazurile precedente luăm şi valoarea formală de 3 cifre $abc=000$ atunci mai avem următoarele 3 soluţii formale. $1=0000001$; $2^2=0000004$; $3^2=0000009$.

In definitiv problema are 14 soluţii din care 6 sunt soluţii formate de 7 cifre.

Problema a fost examinată numai parţial de corespondenţii care au trimis soluţii şi au găsit soluţia 4004001 d-nii: *Cioara Gh. Al.* (Lic. „Samuil Vulcan" Beiuş); *Morega V. Titus, Păsărin Gr. Gh.* (Lic. „T. Vladimirescu" Tg.-Jiu), *Pantea Al.* (Lic. „S. Vulcan", Beiuş); *P. P. Teodorescu* (Lic. „M. Basarab", Bucureşti) şi *Deutsch Emeric.* D-l *Cârciu Ion* (Lic. „Diaconovici Loga" Timişoara), a găsit numai soluţia 7447441, deasemeni după un examen foarte parţial.

Nici un corespondent nu a examinat cazurile $d=5$ şi 6.

G-l Gh. B.

Problema 2517. — *În triunghiul dreptunghic* ABC *cu unghiul drept în* A, *bisectoarea unghiului* B *taie perpendiculara dusă în* C *pe* BC *în* B_1, *iar perpendiculara în* B *pe* BC *taie bisectoarea unghiului* C *în* C_1. *Să se arate că*

$$\frac{CB_1^2}{BC^2}=\frac{BC-AB}{BC+AB},\quad \frac{AB}{AC}=\frac{BC^2-CB_1^2}{BC^2+CB_1^2}$$

$$\frac{CB_1}{BC_1}=\frac{AC^2(BC^2-CB_1)^2}{AB^2(BC^2-BC^1)^2}$$

$$2BC_1.BC.AB=AC(BC^2-CB_1^2).$$

C. IONESCU-TIU

Soluţie dată de D-nii: *Stancu D. C.* (Cluj) şi *Teodorescu P. P.* (Bucureşti). Fie D punctul unde BB_1 taie pe AC. Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice BAD şi BCB_1 rezultă

$$\frac{CB_1}{BC}=\frac{AD}{AB}.$$

Dar BD este bisectoare, încât se ştie că*)

$$AD=\frac{AC.AB}{AB+BC}$$

valoare care introdusă în prima relaţie dă

$$(1)\qquad CB_1=\frac{AC.BC}{AB+BC}.$$

Deci

$$\frac{CB_1^2}{BC^2}=\frac{AC^2}{(AB+BC)^2}=\frac{BC^2-AB^2}{(AB+BC)^2}=\frac{BC-AB}{BC+AB},$$

adică prima relaţie din enunţ.

A doua relaţie se obţine din precedenta făcând suma termenilor către diferenţa lor la fiecare raport.

Avem mai departe

$$BC^2-CB_1^2=BC^2-\frac{AC^2.BC^2}{(AB+BC)^2}=$$

$$(2)\quad =BC^2-\frac{AB^2+(BC^2-AC)^2+2AB.BC}{(AB+BC)^2}=$$

$$=\frac{2BC^2.AB(AB+BC)}{(AB+BC)^2}=\frac{2BC^2.AB}{AB+BC}.$$

Comparând pe (1) cu (2) obţinem relaţia

---

*) *Gh. Th. Gheorghiu:* Curs de geometrie, vol I, p. 63.

(3) $$CB_1 = \frac{(BC^2 - CB_1^2)AC}{2AB.BC}$$

care este relaţia a 4-a.

Prin analogie cu (2) avem relaţia

$$BC_1 = \frac{(BC^2 - BC_1^2)AB}{2AC.BC}.$$

Impărţind pe (3) cu (4) obţinem a treia relaţia din enunţ.

Au rezolvat problema D-nii: *Cioară Gh. Alex.* (P. T.), *Constantinescu I. Gh.* (Slatina), *Georgian N. N.*, (Predeal), *Gherlan I. V.*, (Beiuş), *Novac I. I.* (Timişoara), *Purcea M. I.* (Caracal) şi *De Sabata I.* (Beiuş). D-l *Stănilă D. G. B.* (Buzău) a dat o soluţie analitică.

Gh. Th. Gh.

Problema 2521. — *Cu numerele 304, 324, 334, 354, 395, 415, 424, 444, 514, 544, 564, 594, 605, 634, 655, 684 să se formeze un pătrat magic de patru linii şi patru coloane astfel ca suma numerelor de pe fiecare linie, coloană şi diagonală să fie egală cu 1947.*

ILIE CONSTANTINESCU

Soluţie dată de D-l *Roman I. C.* (Timişoara). La pag. 37, vol. 22 din R. M. T., D-l *A. Moessner* a format un pătrat magic în care suma numerelor depe fiecare linie, coloană şi diagonală este 1942.

1	2	1	1
1	1	2	1
2	1	1	1
1	1	1	2

Aducând fiecărui număr din acest pătrat, respectiv numerele din pătratul alăturat, se obţine pătratul magic dorit

304	605	684	354
594	444	395	514
415	564	544	424
634	334	324	655

D-l *Teodorescu P. P.* (Bucureşti) a făcut un studiu amănunţit al problemei, arătând că din pătratul de mai sus se mai pot obţine încă 72 de pătrate magice cari să răspundă problemei. S'au mai primit încă soluţii dela D-rele *Alexa M.* (P. T.), *Raţiu M.* (P. T.) şi D-nii *Pisanca N. I.* (Timişoara), *Radu D.* (Constanţa) şi *Ţintariu Em. Dan* (Timişoara).

Gh. Th. Gh.

Problema 2546. — *Să se găsească pătratul de cinci cifre distincte, astfel ca numărul format de primele trei cifre, să fie egal cu pătratul sumei lor mai puţin 20.*

IOSIF MAN

Soluţia. Conform enunţului, adunând 20 la numărul format de primele trei cifre trebue să căpătăm un pătrat perfect a cărui rădăcină trebue să fie minimum 12 şi maximum 7+8+9=24 deoarece primele trei cifre trebuesc să fie distincte. Considerând patratele acestor numere din care scăzând 20, reţinem numai cele care au cifre distincte. Din acestea scoatem pe cele care satisfac condiţiei problemei. Acestea sunt

$$196 = 176 + 20 = (1 + 7 + 6)^2,$$
$$289 = 269 + 20 = (2 + 6 + 9)^2.$$

În primul caz numărul căutat trebue să fie de forma $176ab$. Examinând terminaţiile de două cifre ale unui pătrat perfect, din care eliminăm cele care conţin una din cifrele 1, 6, 7, ne rămân valorile $ab = 04$, 09, 24, 25, 29, 49, 84, 89 şi care ne dau singura soluţie $17689 = 133^2$.

Analog, considerând numerele de forma $269ab$, prin aceiaşi metodă, nu se găseşte nici-o altă soluţie.

Au rezolvat problema, D-ra: *Crăciun S.* (P. T.) şi Dnii: *Breazu M.* (Deva), *Cioară Gh. Alex.* (P. T.), *Ciucescu Paul* (Slatina), *Constantinescu I. Gh.* (Slatina), *Gherlan I. V.* (P. T.), *Munteanu Giuseppe* (Braşov), *Neguţ A. I.* (Tg.-Jiu), *Novac I. I.* (P. T.), *Pantea N Alex* (Beiuş), *Petcu Al. Val.* (Bucureşti), *Pisanca I. I.* (Timişoara), *Popa F. Pavel* (Oradea), *Stancu D. D.* (Arad), *Stănescu D. C.* (Reşiţa), *Şuta M.* (Oradea), *Teodorescu P. P.* (Bucureşti) şi *Dodu A. Eug.* (Bucureşti).

Gh. Th. Gh.

Problema 2551. — *Un dreptunghiu are un vârf fix şi două vârfuri mobile pe două drepte paralele. Care este locul vârfului al patrulea?*

G-L GH. BUICLIU

Soluţie. Fie ABCD dreptunghiul care are vârful A fix şi două vârfuri mobile pe două drepte paralele. Vârful al cărui loc se cere poate fi opus lui A sau adiacent lui A. Se construieşte dreptunghiul BFCE de diagonală BC şi cu laturile BF, CE paralele cu paralelele date. Triunghiurile dreptunghice BFC şi BEC sunt egale cu triunghiul AOD pentrucă au ipotenuzele şi unghiurile ascuţite egale, punctul O fiind proiecţia lui A pe dreapta pe care se mişcă vârful D. Rezultă

$$CF = BE = OA = C\text{-t}.$$

Deci dacă C se mişcă pe paralela CE la OD vârful B se mişcă pe dreapta BF paralelă cu CE

şi la distanţa O A de ea. Dacă B se mişcă pe paralela B F la O D atunci C se mişcă pe paralela C E la B F.

Locul cerut este o dreaptă paralelă cu dreptele date.

1º D-nii: *Dodu A Eug.* (lic. „Mihai Viteazul" Bucureşti) şi *Székely G.* (P. T.), au dat bune soluţii analoage, ultimul dând şi o soluţie analitică.

2º D-nii *Barbul V. Vasile* (Lic. „Em Gojdu" Oradea) şi *Petcu Al. Val.* (lic. „Mihai Viteazul" Bucureşti) au dat o bună soluţie analoagă, examinând însă numai un caz.

3º Au dat bune soluţii prin geometria analitică, examinând însă numai un caz, d-nii: *Breazu Mihai* (Lic. „Decebal" Deva), *Morega V. Titus* (Lic. „T.-Vladimirescu", Tg.-Jiu), *Novac I. Ion* (P., T.), *Păsărin Gr. Gh.* (Liceul T.-Jiu), *Purcea M. Ion* (Lic. „Ioniţă Asan", Caracal), *Turbuţiu Gh. Gh.* (P. T.).

4º Doi foarte harnici şi buni corespondenţi au recurs la geometria analitică, au făcut greşeli de calcule şi au ajuns la locuri de grade superioare.

G-l. Gh. B.

Problema 2554. — *Să se demonstreze relaţia*

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=1+p\sum\frac{a}{bc},$$

α, β, γ fiind unghiurile asociate într'un triunghiu oarecare.

L-T C-DOR C. V. COSTACHESCU

Soluţia. Ţinând seamă că $\operatorname{tg}\alpha=a/(b+c)$ etc., prima parte a relaţiei din enunţ se poate scrie succesiv

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\sum\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{1-\sum\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$=\frac{\sum a(a+c)(a+b)-abc}{(a+b)(b+c)(c+a)-\sum ab(a+b)}$$

$$=\frac{2abc+(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{2abc}=1+p\sum\frac{a}{bc}.$$

Au rezolvat problema D-nii: *Bâlă V. C.* (P. T.), *Blaga E. O.* (P. T.), *Bota I. Val.* (P. T.), *Breazu M.* (Deva), *Cioară Alex.* (P. T.), *Ciucescu P.* (Slatina), *Coţiu A.* (Cluj), *Deutsch E.* (P. T.), *De Sabata I.* (Beiuş), *Dodu Eug.* (Bucureşti), *Gherlan I. V.* (P. T.), *Giurconiu M.* (P. T.), *Novac I. I.* (P. T.), *Păunescu Şt. Gh.* (Bucureşti), *Petcu Val.* (Bucureşti), *Popa P.* (Oradea), *Pisanca I. I.* (Timişoara), *Roman I. C.* (Timişoara), *Simeon Liviu* (P. T.), *Székely G.* (P. T.), *Teodorescu P. P.* (Bucureşti) şi *Turbuţiu Gh.* (P. T.).

Gh. Th. Gh.

Problema 2596. — *Să se determine valorile lui x pentru cari valorile corespunzătoare ale fracţiei*

$$F(x)=\frac{x-1}{x+1},$$

sunt cuprinse între 2 şi 3.

EUGEN VISA

Soluţia. Problema revine la a rezolva dubla inegalitate

$$(1)\qquad 2<\frac{x-1}{x+1}<3.$$

sau încă

$$(2)\qquad 2(x+1)^2<x^2-1<3(x+1)^2.$$

Inegalităţile (2) se deduc din (1) înmulţindu-le cu numărul pozitiv $(x+1)^2$. Dubla inegalitate (2) se descompune în egalităţile

$$2(x+1)^2<(x^2-1) \quad \text{sau} \quad (x+1)(x+3)<0,$$
$$x^2-1<3(x+1)^2 \quad \text{sau} \quad 2(x+1)(x+2)>0.$$

Prima este valabilă pentru $-3<x<1$, iar a doua pentru $x<-2$ şi $x>-1$. Cele două inegalităţi vor avea deci loc simultan pentru $-3<x<-2$.

Soluţii date de D-rele *Gârleşteanu M. El.* (Timişoara), *Oroş M.* şi *Ţâru Em* (Caransebeş) şi D-nii: *Bogoevici N.* (Caransebeş), *De Sabata I.* (Beiuş), *Dodu A. Eug.* (Bucureşti), *Gherlan I. V.* (P. T.), *Lenz N. Fr.* (Bucureşti), *Man Iosif* (P. T.), *Neguţ A. I.* (Tg-Jiu), *Pantea N. Alex.* (Beiuş), *Pisanca N. I.* (Timişoara), *Purcea M. I.* (Caracal), *Radu S. Cor.* (Tg-Mureş) şi *Seracin Eug.* (P. T.).

D-l *Deutsch Emeric* (P. T.), a dat o soluţie detailată, construind şi funcţia.

Problema 2601. — *Fie* A B C *un triunghiu dreptunghiu isoscel* ($A=90^0$), *cercul cu centrul în* O *înscris acestuia şi triunghiul* M N P, *având vârfurile* M, N, P *în punctele unde laturile triunghiului* ABC *sunt tangente cercului* O. *Să se arate că:* 1º. *Triunghiul* M N P *este isoscel şi să i se afle suprafaţa în funcţie de r, raza cercului* O. 2º. *Suprafaţa lui* A B C *este produsul dintre semiperimetrul lui şi raza r.*

AL. PANTEA

Soluţia. 1º Proprietatea este valabilă pentru orice triunghiu isoscel ABC (AB=AC). În adevăr, dacă M este pe B C, N pe A C şi P pe A B, se ştie că $BM=BP=p-c$, $CM=CN=p-b$ unde p este semiperimetrul triunghiului ABC. Deci ,dacă $b=c$, atunci triunghiurile B M P, C M N sunt isoscele şi

egale având unghiurile din B şi C egale prin ipoteză. Deci MP=MN, adică triunghiul M N P este isoscel.

Revenim la cazul triunghiului pentru a calcula suprafaţa triunghiului MNP. Pentru aceasta observăm mai întâiu că patrulaterul MONA este pătrat având trei unghiuri drepte şi două laturi ce pleacă din acelaşi vârf egale. Deci $MN=OM\cdot\sqrt{2}=r\sqrt{2}$. Fie S centrul acestui pătrat. Atunci $OS=\frac{1}{2}\sqrt{2}\,r$, iar $OP=r$, încât $PS=\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+1\right)r$. Cum în triunghiul MPN, PS este înălţime deoarece diagonalele pătratului MONA sunt perpendiculare, avem

$$S_{MNP}=\frac{1}{2}MN\cdot PS=\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)\,r^2.$$

2°. Proprietatea este cunoscută.

Soluţia dată de D-ra *Gârleşteanu M. El.* (cl. 5, T-şoara) şi D-nii *De Sabata I.* (Beiuş), *Gherlan I. V.* (P. T.), *Man Iosif* (P. T.), *Purcea M. I.* (Caracal) şi *Radu S. Cor.* (Tg.-Mureş).

Gh. Th. Gh.

PROBLEME PROPUSE

2625. — Se cer patratele de forma $abcdefdef$ ştiind că $4abc=def$.

IONEL PISANCA

2626. — Să se arate că:

$$\sqrt{\left(\frac{1}{a}+a\right)^2+\left(\frac{1}{b}+b\right)^2+\frac{(1+a^2)^2(1+b^2)^2}{(a+b)^2(1-ab)^2}}-4=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{a+b}{1-ab}-\left(a+b\,\frac{1-ab}{a+b}\right).$$

C. IONESCU-TIU

2627. — Să se rezolve ecuaţia

$$x^4-22x^2-48x-23=0$$

şi să i se exprime apoi rădăcinele sub forma cea mai simplă.

E. VISA

2628. — Să se rezolve în numere întregi ecuaţia

$$z^2=y^2+10x^2.$$

G-L GH. BUICLIU

2629. — Să se construiască un triunghiu ABC cunoscând latura BC, unghiul A şi lungimea bisectoarei acestui unghiu.

GH. DUMITRESCU

2630. — Tangentele în M şi N la o parabolă se taie în A. O tangentă variabilă taie dreptele AM, AN în A, respectiv în D. Să se arate că al patrulea vârf al paralelogramului ABCD descrie dreapta MN.

PETRE TEODORESCU

2631*. — Într'un triunghiu dreptunghic coarda determinată de cercul înscris pe înălţime are drept valoare

$$a\sqrt{2}\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C\sqrt{\cos(B-C)}.$$

GH. TH. GHEORGHIU

2632. — Să se demonstreze că dacă

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}^2\gamma,$$

atunci avem şi relaţia

$$\frac{\sin^2(\alpha+\gamma)}{\sin^2(\beta+\gamma)}=\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta}.$$

VALERIU PETCU

2633*. — Să se stabilească pe cale directă, că într'un triunghiu oarecare ABC avem relaţiile:

$$\frac{a+b-2c\cos B}{\sin(B-\frac{1}{2}C)}=\frac{2b\cos\frac{1}{2}C}{\sin B},$$

$$\operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}B-\tfrac{1}{8}C\right)=\frac{4b\cos\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{4}C-c}{4b\cos\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{4}C+c}\operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}B+\tfrac{1}{8}\right)C.$$

V. ALACI

2634. — Să se arate că într'un triunghiu oarecare ABC avem relaţiile,

$$cp\,\alpha\sin^2\frac{A}{2}+cp\,\beta\sin^2\frac{B}{2}+cp\,\gamma\sin^2\frac{C}{2}=\frac{1}{2}$$

$$cp\,\alpha\cos^2\frac{A}{2}+\cos\beta\cos^2\frac{B}{2}+cp\,\gamma\cos^2\frac{C}{2}=\frac{3}{2},$$

α, β, γ fiind unghiurile asociate.

EMERIC DEUTSCH

INFORMAŢII

1. Nu se publică în revistă decât manuscrise dela abonaţi.

2. Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol, trebuesc scrise citeţ (în special iscălitura) numai pe o parte a hârtiei. Probleme propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor, iar cele rezolvate, de enunţ. Nu sunt luate în considerare probleme rezolvate iscălite de mai mulţi corespondenţi. Problemele rezolvate vor fi redactate îndependent una de alta, şi nu în continuare.

3. Numele colaboratorilor dela cari s'au primit soluţii la problemele publicate în acest număr şi care au sosit la redacţie după data de 15 a lunei precedente, nu mai pot fi trecute în corpul revistei. Numele lor este însă menţionat pe copertă împreună cu numărul problemei rezolvate.

4. Rugăm pe corespondenţii noştrii la orice schimbare de adresă sau lipsă din localitate fără a avea pe cineva să le primească revista, să ne anunţe din vreme. În caz contrar revista ne vine înapoi şi cu regret anunţăm că a doua oară nu o mai putem expedia. Mai mult, se suspendă expedierea numerelor următoare până ce abonatul va reclama aceste numere.

Manuscrise primite de la corespondenții noștrii până la 1 a lunei curente și anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) și probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

---

Bogoevici Nicolae (2606, 2609, 2611, 2617), *Breazu Mihai* (2596, 2597, 2598, 2599, 2601, 2622, 2604, 2605, 2606, 2608, 2609, 2611, 2612, 2613, 2614), *Carâușu Valeriu* (2601), *Constantinescu I. Gh.* (2580, 2587, 2593), *Deutsch Emeric* (1474, 1640, 1676, 1687, 1709, 2415, 2532), *Drăghici Iosif* (2611, 2612, 2613), *Filip Alexandru* (P; 2602, 2605, 2606), *Găzdău Mircea* (2549, 2552, 2554, 2593, 2599, 2601), *Gârlișteanu Eliza* (2606), *Gherlan Vasile* (P; 2047, 2093, 2230, 2261, 2575, 2604, 2607, 2608, 2609, 2612, 2613, 2614), *Mihăilescu Const. Nic.* (2587, 2605, 2606, 2612), *Neacșu V.* (P; 2604), *Nemoianu Const.* (2502, 2510, 2606, 2608, 2611, 2614), *Nicoară Mircea* (P; 2496, 2546, 2552, 2587, 2601, 2605, 2608, 2612), *Pantea Alexandru* (P; 1472, 2608), *Păunescu Gh.* (2099, 2276, 2554, 2566), *Petcu Valeriu* (2608, 2617), *Petcu Valeriu* (2608, 2617), *Popa Pavel* (2502, 2510, 2560, 2602), *Purcea Ion* (P.), *Rațiu Maria* (2581, 2583, 2590, 2598, 2602, 2606, 2607, 2608, 2611).

ANUL XXVIII. IULIE 1948 No. 5.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA
PREȚUL ABONAMENTULUI ESTE 300 LEI ANUAL PENTRU PARTICULARI
ȘI 600 LEI PENTRU INSTITUȚII
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRAINĂTATE ESTE DE 600 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **D. POMPEIU:** DESPRE EXPLICATIE IN MATEMATICE.
2. **MIRCEA V. SOARE:** AXE DE SIMETRIE LA CUBICE.
3. NOTA MATEMATICA 7.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 424, 971BIS, 1422, 1427, 1722, 1733, 2100, 2467, 2510, 2515, 2523, 2524, 2547, 2606, 2608, 2613.
6. PROBLEME PROPUSE: 2635-2644.
7. INFORMATII.

„Tipografia Românească", Timișoara.
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebue să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă"

G. ŢIŢEICA

Avem plăcere să anunţăm că începând cu acest număr, face parte din „Comitetul de Colaborare" al revistei şi D-l *Fl. Nedelcu,* inginer şef, inspector la C.F.R.

Prin bunăvoinţa D-lui Director General *Gh. Sprinceană,* Direcţia Silozurilor din Bucureşti ne-a subvenţiaonat cu suma de 25.000 lei.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara, conţinând articole, note, probleme propuse şi rezolvate, vor fi trimise pe adresa: Prof. V. Alaci, Politehnica, Timişoara.

Administraţia revistei aduce la cunoştinţa generală următoarele:

1. Abonamentul pe anul XXVIII (15 Martie 1948 — 15 Februarie 1949) este 300 lei pentru particulari şi 600 pentru instituţii.

2. Taxa de membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este de 200 lei.

3. Volumele I, XXIII, XXV, XXVI şi XXVII sunt epuizate. Celelalte volume broşate se găsesc de vânzare cu preţul de 300 lei fiecare. La această sumă se va adăoga 50 lei costul expediţiei. In caz că se comandă mai multe volume se va adăoga la taxa de 26 lei pentru recomandat, câte 20 lei pentru fiecare volum.

4. Se găsesc de vânzare numere izolate din colecţie chiar din volumele epuizate. Preţul unui număr este de 30 lei la care se adaogă 2 lei expediţia. Din vol. XXVII se găsesc de vânzare no. 1, 4—12.

5. Se primesc reclamaţii că se pierde revista prin poştă. Aceste reclamaţii sunt adunate în ordinea sosirii lor şi vor fi sătisfăcute la 15 Februarie 1949 când se vor vedea ce numere rămân descomplectate după legarea volumelor întregi. Orice reclamaţie de pierderea unui număr nu este luată în seamă decât la o lună dela data apariţiei acelui număr.

6. Tot ce priveşte administraţia se va adresa D-lui Prof. **Gh. Th. Gheorghiu** str. Voltaire Nr. 1, Timişoara I. Reclamaţiile ce necesită răspuns vor fi însoţite de o carte poştală timbrată legal.

7. Orice sumă destinată revistei se poate trimite prin CEC sub contul n-rul 85208 sau prin mandat poştal D-lui Prof. **Gh. Th. Gheorghiu** pe adresa de mai sus.

ANUL XXVIII — No 5. TIMISOARA, 1948 IULIE 15

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

Prețul abonamentului este 300 lei pentru particulari și 600 lei pentru instituții.
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. GH. TH. GHEORGHIU
Timișoara I, Str. Voltaire, No. 1.

DESPRE EXPLICAȚIE ÎN MATEMATICE

DE

D. POMPEIU

1. Într'o carte tratând chestiuni delicate de Analiză superioară autorul ocupându-se de un rezultat *nou*, și neașteptat, îl recunoaște ca deplin stabilit dar mărturisește că nu și-l poate *explica*.

Va să zică nu e vorba de verificare, nici de demonstrare, ci de *explicare*.

Explicarea este și ea, în Matematice, o operație logică ce stă alături de verificare și de demonstrare.

Pe întreaga scară a adevărurilor matematice, în Geometrie ca și în Analiză, se întâlnește adesea *necesitatea* explicării.

2. În cele ce urmează îmi propun să ilustrez cele ce preced printr'un exemplu luat din Aritmetica elementară.

Să căutăm un criteriu pentru divizibilitatea cu 7 a unui număr întreg (sunt multe asemenea criterii: noi vom rămâne la cel elementar simplu). Se știe că toată teoria se reduce la a desface numărul dat N într'o sumă

$$N = N_0 + R$$

în care N_0 este un multiplu de 7, iar R un întreg care rămâne să fie certat dacă este, sau nu, multiplu de 7.

Pentru aceasta să luăm un exemplu precis

$$N = a_5 10^5 + a_4 10^4 + a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0,$$

în care literile a înseamnă întregi < 10, putând unii să fie și zero. Așa fiind scris numărul N observăm că avem

$$10 = 7 + 3$$
$$10^2 = 7^2 + 2.3.7 + 3^2 = \text{mult. } 7 + 2$$
$$10^3 = (7+3)^3 = \text{mult. } 7 + 6$$
$$10^4 = (7+3)^4 = \text{mult. } 7 + 4$$
$$10^5 = (7+3)^5 = \text{mult. } 7 + 5.$$

Acum, dacă observăm că avem

$$\begin{aligned} 1+6 &= 7 \\ 3+4 &= 7 \\ 2+5 &= 7 \end{aligned} \qquad (0)$$

putem scrie

$$\begin{aligned} 6 &= 7-1 \\ 4 &= 7-3 \\ 5 &= 7-2 \end{aligned}$$

și ajungem la regula bine cunoscută a divizibilității cu 7: desfacerea numărului dat (de la dreapta spre stânga) în grupe de câte trei cifre; înmulțirea cu 1, 3, 2 respectiv a cifrelor din fiecare grupă; însumarea numerelor astfel căpătate, de-o parte cele din grupele cu soț, de altă parte cele din grupele ne-soț: obținerea, prin scădere a celor două sume, a numărului R care urmează să fie cercetat dacă este sau nu multiplu de 7.

Dar nu regula aceasta este în chestie.

Atenția noastră se îndreaptă asupra relațiilor (0): pentru ce resturile numerelor

$$1, 10, 10^2, 10^3, \ldots$$

împățite la 7 dau naștere la egalitățile (0)? Ce explicare este pentru acest fapt?

Va să zică nu e vorba nici de verificare nici de demonstrare pentrucă faptul există.

Explicarea stă în simpla constatare că

$$1001 = 7 \times 143$$

și atunci urmează că

$$1 + 10^3 = \text{mult. } 7$$
$$10(1 + 10^3) = 10 + 10^4 = \text{mult. } 7$$
$$10(10 + 10^4) = 10^2 + 10^5 = \text{mult. } 7$$

adică relaţiile (0).

3. Cititorul pe care acest exemplu îl va fi interesat poate găsi în Aritmetică elementară destule alte fapte analoage în care o *explicare* se impune. De exemplu, dacă fracţia $\frac{1}{7}$ o prefacem în zecimală periodică găsim

$$\frac{1}{7} = 0,142857\ldots$$

dar observăm că

$$1+8=9$$
$$4+5=9$$
$$2+7=9$$

şi atunci întrebarea: unde e *explicarea*, pentru aceste relaţii?

AXE DE SIMETRIE LA CUBICE

DE

MIRCEA V. SOARE

In cele ce urmează îmi propun să stabilesc condiţiile pentru ca o cubică generală să admită axe de simetrie, considerând apoi în particular aceste condiţii pentru o cubică conică*).

Fie (Γ) ecuaţia completă a unei cubice, faţă de un sistem oarecare de axe xOy,

$$(1)\quad \begin{aligned} &A x^3+3Bx^2y+3Cxy^2+Dy^3+3Ex^2+\\ &6Fxy+3Gy^2+3Hx+3Ky+L=0. \end{aligned}$$

In ipoteza că există o axă de simetrie (S_1), să notăm cu $P(x_0, 0)$ intersecţia (S_1), (Ox) şi cu α unghiul $\widehat{S_1 Ox}$. Avem atunci pentru axa de simetrie ecuaţia

$$(2)\quad y=(x-x_0)\operatorname{tg}\alpha.$$

Să efectuăm o translaţie de axe astfel ca origina să ajungă în P, apoi o rotaţie astfel ca Ox să se aştearnă peste (S_1).

Este evident că, raportată la axa de simetrie, cubica va avea o ecuaţie de forma,

$$(3)\quad A_1X^3+3C_1XY^2+3E_1X^2+3G_1Y^2+3H_1X+L_1=0,$$

unde Y figurează doar la putere pară.

Fie dar transformarea de axe definită de relaţiile

$$(4)\quad x=X\cos\alpha-Y\sin\alpha+x_0,\quad y=X\sin\alpha+Y\cos\alpha,$$

x_0 şi α având semnificaţiile de mai sus şi urmând a fi determinaţi. Pentruca cubica să admită o axă de simetrie, va fi necesar ca coeficienţii lui Y la putere impară, fie ei C_{Y^3}, C_{X^2Y}, C_{XY} şi C_Y, să fie nuli. Avem pentru aceşti coeficienţi expresiile:

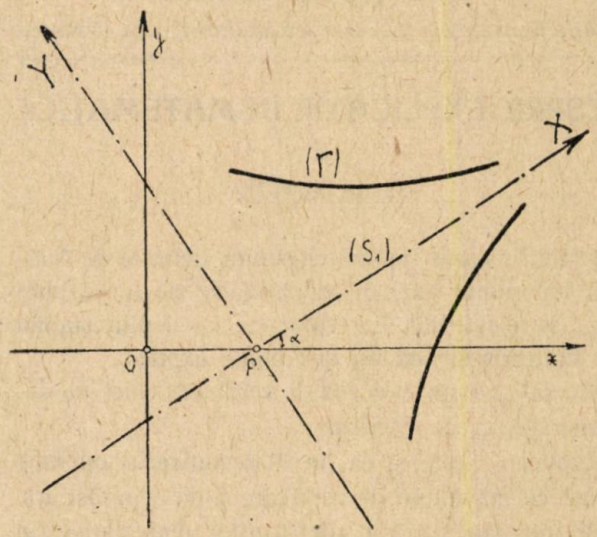


Fig. 1.

$$(5)\quad (C_{Y^3})\quad A\sin^3\alpha-3B\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha+3C\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha-D\cos^3\alpha=0.$$

$$(6)\quad (C_{X^2Y})\quad C\sin^3\alpha+(2B-D)\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha+(A-2c)\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha-B\cos^3\alpha=0.$$

$$(7)\quad (C_{XY})\quad F(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)+(E-G)\sin\alpha\cos\alpha+x_0[(A-C)\sin\alpha\cos\alpha+B(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)]=0.$$

$$(8)\quad (C_Y)\quad H\sin\alpha-K\cos\alpha+(A\sin\alpha-B\cos\alpha)x_0^2+2(E\sin\alpha-F\cos\alpha)x_0=0.$$

Relaţiile (5), (6), (7), (8) se mai scriu, dupăce împărţim cu $\cos^i\alpha$ $(i=1,2,3)$:

$$(5')\quad A\operatorname{tg}^3\alpha-3B\operatorname{tg}^2\alpha+3C\operatorname{tg}\alpha-D=0$$

$$(6')\quad C\operatorname{tg}^3\alpha+(2B-D)\operatorname{tg}^2\alpha+(A-2C)\operatorname{tg}\alpha-B=0$$

$$(7')\quad (E-G)\operatorname{tg}\alpha-F(1-\operatorname{tg}^2\alpha)+x_0\cdot[(A-C)\operatorname{tg}\alpha-B(1-\operatorname{tg}^2\alpha)]=0.$$

$$(8')\quad H\operatorname{tg}\alpha-K+(A\operatorname{tg}\alpha-B)x_0^2+2(E\operatorname{tg}\alpha-F)x_0=0.$$

Prin adunare, (5') şi (6') dau

$$(9)\quad (A+C)\operatorname{tg}^3\alpha-(B+D)\operatorname{tg}^2\alpha+(A+C)\operatorname{tg}\alpha-(B+D)=(1+\operatorname{tg}^2\alpha)\cdot[(A+C)\operatorname{tg}\alpha-(B+D)]=0.$$

Relaţia (9) determină unghiul α prin tangenta sa, fie:

---

*) Numim *cubică conică* orice cubică unicursală cu punct dublu situat la distanţă finită care admite o conică directoare. A se vedea articolul d-lui prof. *E. Vişa* din „R.M.T." vol. XXVII nr. 9 pag. 107 şi nr. 10, pag. 119.

(10) $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{B+D}{A+C}.$$

Relaţia (7′) determină abscisa x_0 în funcţie de $\operatorname{tg}\alpha$:

(11) $$x_0 = -\frac{(E-G)\operatorname{tg}\alpha - F(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}{(A-C)\operatorname{tg}\alpha - B(1-\operatorname{tg}^2\alpha)},$$

sau înlocuind valoarea lui $\operatorname{tg}\alpha$ din (10) în (11),

(12) $$x_0 = -\frac{(A+C)(B+D)(E-G)-F(A+B+C+D)(A-B+C-D)}{(A+C)(B+D)(A-C)-B(A+B+C+D)(A-B+C-D)},$$

încât axa de simetrie este determinată complet şi are, faţă de sistemul xOy, ecuaţia

(13) $$y = \frac{B+D}{A+C}\left[x + \frac{(A+C)(B+D)(E-G)-F(A+B+C+D)(A-B+C-D)}{(A+C)(B+D)(A-C)-B(A+B+C+D)(A-B+C-D)}\right]$$

Se vede că rămân 2 relaţii de condiţie (5′) şi (8′) cari se obţin imediat introducând valorile lui $\operatorname{tg}\alpha$ şi x_0 din (10) şi (12); ele sunt însă destul de complicate pentru a le da mai jos. Vom prefera să spunem că dacă am determinat un unghiu α şi abscisa x_0, cari să verifice relaţiile (5′), (8′), (10) şi (12) cubica este dreaptă (admite o axă de simetrie). Se vede că condiţiile de mai sus sunt necesare pentru ca să existe o axă de simetrie. Ele sunt şi suficiente, căci fiind îndeplinite, cubica se poate pune sub forma (3), adică admite o axă de simetrie.

Să cercetăm un caz particular important, anume cari sunt condiţiile pentruca axa de simetrie să treacă prin origina axelor de coordonate.

In acest caz avem $x_0 = 0$, iar relaţiile (5′), (6′), (7′), (8′) se scriu

14) $$A\operatorname{tg}^3\alpha - 3B\operatorname{tg}^2\alpha + 3C\operatorname{tg}\alpha - D = 0,$$

(15) $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{B+D}{A+C}, \quad (16)\ \operatorname{tg}2\alpha = \frac{2F}{E-G},$$

(17) $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{K}{H}.$$

Una din relaţiile (15), (17) fiind de gradul I, determină unghiul α, rămânând 3 relaţii efective de condiţie. Aşa dar pentruca axa de simetrie să treacă prin origină este nevoe de o condiţie în plus. Ca şi mai sus, eliminarea lui $\operatorname{tg}\alpha$ se face cu uşurinţă, însă poate conduce la mai multe condiţii aparent diferite, încât preferăm să spunem că dacă există un unghiu α_0 care verifică relaţiile (14), (15), (16) şi (17), atunci cubica admite o axă de simetrie ce trece prin origină.

Se cercetăm posibilitatea existenţei a 2 axe de simetrie.

Fie β unghiul celor două axe (S_1) şi (S_2). Prin simetrie faţă de (S_1), lui (S_2) trebue să-i corespundă o axă (S_3) care trece prin punctul de întâlnire Q al axelor (S_1) şi (S_2). Vom avea doar 2 axe când (S_2) şi (S_3) coincid, adică $\beta = 90^0$. In acest caz, luând pe (S_1) şi (S_2) ca axe de coordonate, ecuaţia cubicei nu trebue să se schimbe înlocuind pe x şi y prin $(-x)$ şi $(-y)$, adică trebue să cuprindă doar puterile pare ale variabilelor, ceeace pentru o cubică nu este posibil.

Se vedem acum dacă pot exista trei axe de simetrie (S_1), (S_2), (S_3).

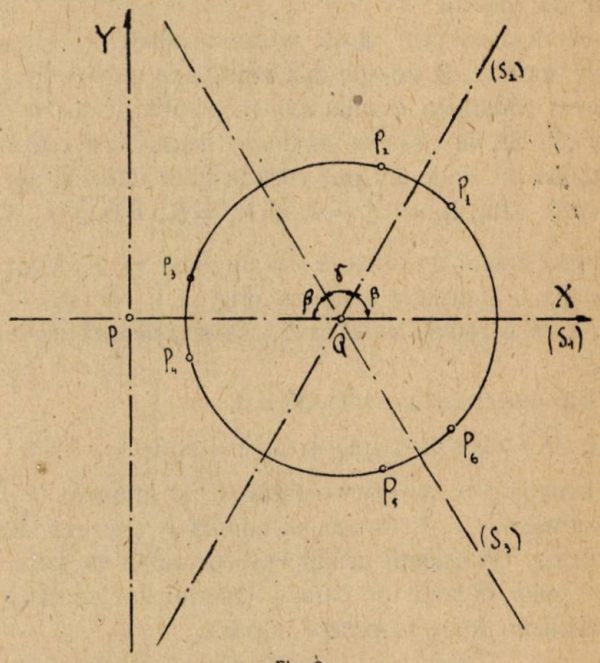


Fig. 2.

Pentru simetrie trebue să avem

(17) $$\widehat{S_2, S_1} = \widehat{S_1, S_3} = \beta.$$

Fie γ unghiul $\widehat{S_2, S_3}$. Tot din motive de simetrie, (S_1) şi (S_3) trebue să fie simetrice faţă de (S_2). Putem aşa dar scrie relaţia

(18) $$\widehat{S_2, S_3} = \widehat{S_2, S_1}, \qquad \text{sau (18′)}\ \beta = \gamma.$$

Mai avem evident relaţia

(19) $$\widehat{S_2, S_1} + \widehat{S_3, S_2} + \widehat{S_1, S_3} = 180^0, \quad \text{sau}$$

(19′) $$\beta + \gamma + \beta = 180^0.$$

Din (18′) şi (19′) deducem: (20) $\beta = \gamma = 60^0$. Aşa dar o cubică *poate avea* 3 axe de simetrie şi în acest caz, ele sunt concurente şi fac unghiuri de 60°.

Să arătăm că o cubică poate avea *cel mult* 3 axe de simetrie.

Fie un punct P_1 al cubicei. Prin simetrie față de (S_1), (S_2), (S_3), punctului P_1 îi corespund alte cinci puncte, fie P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 (fig. 2). Fie Q punctul de intersecție al axelor de simetrie, pe care să-l numim centrul axelor de simetrie. Avem evident : (21) $\overline{QP_1} = \overline{QP_2} = \cdots = \overline{QP_6}$, care arată că $P_i (i = 1, 2, \ldots 6)$, se află pe un același cerc cu centrul în Q. Cum o conică și o cubică nu pot avea decât maximum 6 puncte de intersecție, rezultă necesar că o cubică nu poate avea mai multe axe de simetrie**).

Se regăsim prin calcul aceste rezultate.

In ipoteza că admite mai multe axe de simetrie, putem considera ecuația redusă a cubicei sub forma (3). Se va observa analogia notației cu cea a ecuației (1), unde am pus coeficienților indici și am făcut: (22) $B_1 = D_1 = F_1 = K_1 = 0$. Fie $Q(X_0\, 0)$ centrul axelor de simetrie și β unghiul $\widehat{S_2, S_1}$. Vom efectua o translație astfel ca origina P să vină în Q, apoi o rotație astfel ca (S_1) să se aștearnă peste (S_2).

Fie dar transformarea de axe

(23) $X = x\cos\beta - y\sin\beta + X_0$, $Y = x\sin\beta + y\cos\beta$.

Ecuația $F(x, y) = 0$ va cuprinde și puterile impare ale lui y. Pentruca să admită o altă axă de simetrie, coeficienții ecuației (3) vor trebui să satisfacă unor condiții pe care le determinăm anulând coeficienții lui y la putere impară.

(24) $A_1.\mathrm{tg}^3\beta + 3C_1.\mathrm{tg}\beta = 0$ (25) $C_1\mathrm{tg}^3\beta + (A_1 - 2C_1)\mathrm{tg}\beta = 0$

(26) $(E_1 - G_1)\,\mathrm{tg}\,\beta + (A_1 - C_1)\,X_0.\,\mathrm{tg}\,\beta = 0,$

(27) $H_1\,\mathrm{tg}\,\beta + A_1 X_0^2\,\mathrm{tg}\,\beta + 2E_1 X_0\,\mathrm{tg}\,\beta = 0.$

Putem îndepărta soluția $\mathrm{tg}\,\beta = 0$, care indică drept axă de simetrie pe (S_1). Să adunăm (24) cu (25),

(28) $(1 + \mathrm{tg}^2\beta)(A_1 + C_1) = 0.$

Sistemul (24), (25), (26) și (27) se scrie:

(24′) $A_1\,\mathrm{tg}^2\beta + 3C_1 = 0$ (25′) $A_1 + C_1 = 0$

(26′) $X_0 = -\dfrac{E_1 - G_1}{A_1 - C_1} = -\dfrac{E_1 - G_1}{2A_1}$

(27′) $H_1 + A_1 X_0^2 + 2E_1 X = 0.$

Din (24′) și (25′) deducem: (29) $\mathrm{tg}^2\beta = 3$, relație care arată existența a 2 axe de simetrie cari fac cu (S_1) unghiuri de 60°. Rămân relațiile de condiție (25′) și (27′). Să exprimăm acum coeficienții A_1 și C_1 în funcție de coeficienții ecuației (1).

Avem:

(30) $A_1 = A\cos^3\alpha + 3B\sin\alpha.\cos^2\alpha + 3C\sin^2\alpha.\cos\alpha + D\sin^3\alpha$

(31) $C_1 = C\cos^3\alpha + (D - 2B)\sin\alpha\cos^2\alpha + (A - 2C)\sin^2\alpha\cos\alpha + B\sin^3\alpha.$

Să adunăm membru cu membru:

(32) $A_1 + C_1 = (A + C)\cos\alpha + (B + D)\sin\alpha = 0,$

de unde deducem

(33) $$\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{A + C}{B + D}.$$

Cum $\mathrm{tg}\,\alpha$ este dat și de (10) rezultă necesar:

(34) $A + C = B + D = 0.$

Când condițiile (34) sunt îndeplinite, cubica (1) are 3 direcții asimptotice cari fac unghiuri de 60°.

Se vede ușor că atunci relația (6′) este identică cu (5′).

Putem face următoarea observație importantă: relațiile (10) și (11) constitue un sistem linear de două ecuații cu necunoscutele x_0 și $\mathrm{tg}\,\alpha$. Când cubica are o *singură* axă de simetrie, avem o singură soluție pentru necunoscute.

Când cubica are *trei* axe de simetrie, $\mathrm{tg}\,\alpha$ este dat de o ecuație de gradul trei (5′), pentru fiecare valoare a lui $\mathrm{tg}\,\alpha$, corespunzând o valoare pentru x_0.

Ecuația comună a axelor (S_2) și (S_3) este

(35) $$y = \pm\sqrt{3}\left(x + \frac{E_1 - G_1}{2A_1}\right).$$

Din (26′) și (27′) deducem

(36) $$H_1 = -A_1X_0^2 - 2E_1X_0 = \frac{(E_1 - G_1)(3E_1 + G_1)}{4A_1}.$$

Ținând seama de condițiile (25′) și (36′) ecuația (3) se scrie:

(37) $$A_1X(X^2 - 3Y^2) + 3E_1X^2 + 3G_1Y^2 + \frac{3(E_1 - G_1)(3E_1 + G_1)}{4A_1}X + L_1 = 0.$$

Să facem translația de axe astfel ca origina P să ajungă în Q, centrul axelor de simetrie.

**) Mai general se poate demonstra că o curbă de gradul n poate avea cel mult n axe de simetrie, toate concurente într'un punct.

$$(38)\qquad X = x - \frac{E_1 - G_1}{2A_1}, \qquad Y = y.$$

Obținem după translație ecuația

$$(37')\qquad A_1 x(x^2 - 3y^2) + 3\cdot\frac{E_1 + G_1}{2}\cdot(x^2 + y^2) + L_1 - \frac{(E_1 - G_1)^2\cdot(2E_1 + G_1)}{4A_1^2} = 0.$$

Să facem acum rotația de axe

$$(39)\qquad x = \bar{x}\cos 60^0 - \bar{y}\sin 60^0, \quad y = \bar{x}\sin 60^0 + \bar{y}\cos 60^0.$$

Obținem din (37') ecuația

$$(40)\qquad -A_1\bar{x}(\bar{x}^2 - 3\bar{y}^2) + 3\frac{E_1 + G_1}{2}(\bar{x}^2 + y^2) + L_1 - \frac{(E_1 - G_1)^2\cdot(2E_1 + G_1)}{4A_1^2} = 0.$$

Or, dacă în (40) schimbăm pe $(-\bar{x})$ în $\bar{x}$, obținem ecuația (37'), ceeace arată că cubica se compune din 3 ramuri superpozabile.

Faptul că termenul liber rămâne și după rotație acelaș, ne permite să facem spre simplificare notațiile:

$$(41)\qquad \begin{cases} E_1 + G_1 = 2A_1 a \\ L_1 - \dfrac{(E_1 - G_1)^2(2E_1 + G_1)}{4A_1^2} = A_1\lambda. \end{cases}$$

Cu aceste notații și explicitând-o, ecuația (37') se scrie:

$$(42)\qquad y^2 = \frac{x^3 + 3ax^2 + 2\lambda}{3(x - a)}.$$

Deoarece n'am găsit o reprezentare a cubicelor (42), o voiu da mai jos. Cubicele admit ca asimptote dreptele

$$x - a = 0, \quad \pm\sqrt{3}y = x + 2a.$$

Vom distinge 3 cazuri, după natura rădăcinilor ecuației obținută prin anularea numărătorului:

Cazul 1°. O singură rădăcină reală. Să luăm pentru reprezentare $\lambda = -10a^3$. Avem,

$$y^2 = \frac{(x - 2a)(x^2 + 5ax + 10a^2)}{3(x - a)}$$

și deci

$$y' = \frac{x^3 - 3a^2x + 10a^3}{\pm N},$$

$$N = (x - a)\sqrt{3(x - a)(x^3 + 3ax^2 - 20a^3)}$$

de unde deducem pentru ramura pozitivă a funcției, tabloul de variație

x	$-\infty$		$-2{,}61\,a$		0		a		$2a$		$+\infty$
y'	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-$	0	$+$	$+\sqrt{\frac{5}{3}}$	$+$	$+\infty$		$+\infty$	$+$	$+\frac{\sqrt{3}}{3}$
y	$+\infty$	$\searrow$	$+1{,}26\,a$	$\nearrow$	$a\sqrt{\frac{20}{3}}$	$\nearrow$	$+\infty$		0	$\nearrow$	$+\infty$

Construind curba reprezentativă corespunzătoare acestui tablou, cât și simetrica ei față de axa Ox, obținem fig. 3.

Cazul 2°. Trei rădăcini reale. Fie $\lambda = -a^3$ Avem, analog cazului precedent,

$$y^2 = \frac{(x + a)(x^2 + 2ax = 2a^2)}{3(x - a)}, \qquad \text{apoi,}$$

$$y' = \frac{x^3 - 3a^2x + a}{\pm N}, \quad N = (x - a)\sqrt{3(x - a)(x^3 + 3ax^2 - 2a^3)}$$

precum și următorul tablou de variație pentru ramura pozitivă a funcției

x	$-\infty$		$-(1+\sqrt{3})a$		$-a$		0		$0{,}347\,a$		$(-1+\sqrt{3})a$		a		$1{,}53\,a$		$+\infty$
y'	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$-\infty$		$+\infty$		$+\frac{\sqrt{6}}{6}$		0		$-\infty$		$-\infty$		0		$+\frac{\sqrt{3}}{3}$
y	$+\infty$	$\searrow$	0		0	$\nearrow$	$a\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\nearrow$	$0{,}908\,a$	$\searrow$	0		$+\infty$	$\searrow$	$2{,}33\,a$	$\nearrow$	$+\infty$

Curba completă corespunzătoare acestui caz este aceea din fig. 4.

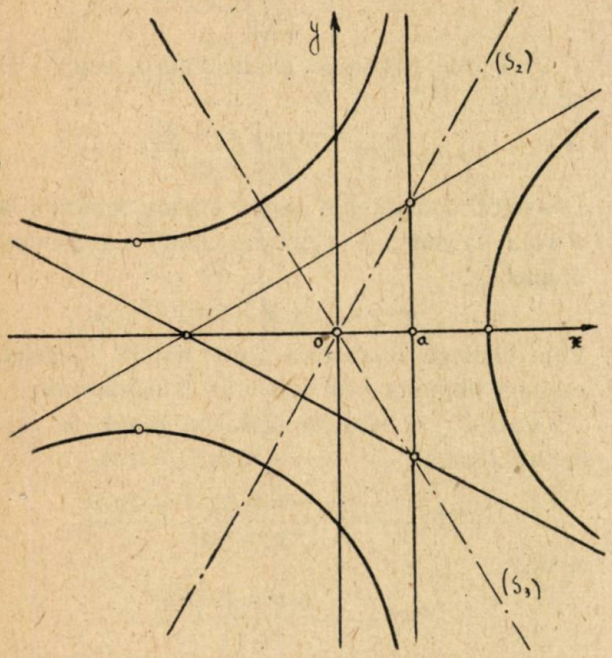


Fig. 3.

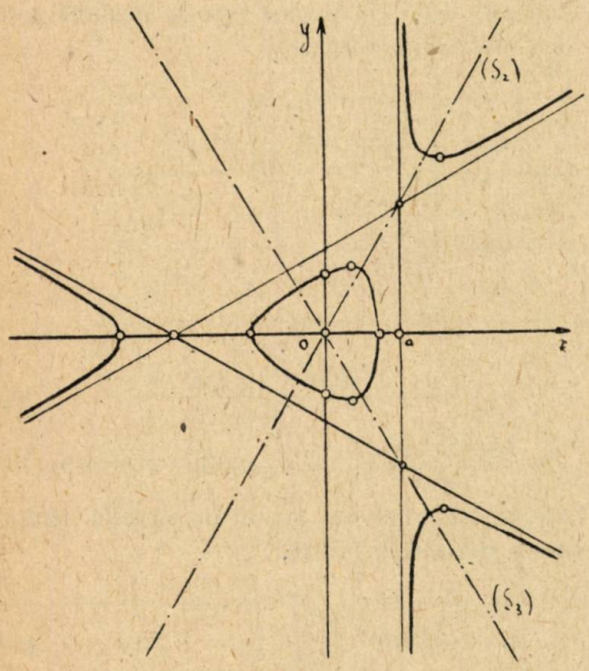


Fig. 4.

Cazul 3. $\lambda = 0$ avem, $y^2 = \dfrac{x^2(x+3a)}{3(x-a)}$.

Cubica este transformata ipocicloidei lui *Steiner* prin polare reciproce față de cercul său tritangent. Ea apare ca locul polurilor dreptelor lui *Simson* față de cercul lui *Euler*. (A se vedea soluția problemei 5719, pag 367, vol. XLVIII din „Gazeta Matematică"). Se poate vedea și nota matematică *„Asupra ipocicloidei cu 3 puncte de întoarcere"* a D-lui prof. *E. Arghiriade* în G. M., vol. XLVIII, pag. 505, unde găsim pentru cubica respectivă și denumirea de *„trifoi echilateral"*. Asupra acestei cubice vom reveni în rândurile următoare.

Să cercetăm acum în particular existența unei axe de simetrie la cubicele conice. Vom păstra notațiile din articolul d-lui prof. *Vișa* (vezi R. M. T. vol. XXVII no. 9, pag. 107). Fie conica directoare

(43) $(c)\ a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y=0,$

dreapta (44) $(\Delta)\quad Ax+By+C=0$

și cubica conică

$$(45)\qquad (Ax+By+C)(a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2)-2(Ax+By)(a_{13}x+a_{23}y)=0.$$

Se vede că ecuația (45) cuprinde și puterile impare ale lui y, fiind de forma (1). Să facem o rotație de axe astfel ca Ox să fie perpendiculară pe (Δ).

$$(46)\qquad x=\frac{AX+BY}{\sqrt{A^2+B^2}},\quad y=\frac{BX-AY}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Prin această rotație de axe, ecuațiile conicei și ale dreptei devin respectiv:

$$\begin{aligned}(43')\qquad &(a_{11}A^2+2a_{12}AB+a_{22}B^2)X^2+\\ &2(a_{11}AB+a_{12}B^2-a_{22}AB-a_{12}A^2)XY+\\ &(a_{11}B^2-2a_{12}AB+a_{22}A^2)Y^2+\\ &2\sqrt{A^2+B^2}\,.\,[(a_{13}A+a_{23}B)X+\\ &(a_{13}B-a_{23}A)Y]=0.\end{aligned}$$

$$(44')\qquad X.\sqrt{A^2+B^2}+C=0.$$

Să facem următoarele notații

$$(47)\qquad C=-k\sqrt{A^2+B^2}$$

$$(48)\qquad a_{11}A^2+2a_{12}AB+a_{22}B^2=M$$

$$(49)\qquad a_{11}AB+a_{12}B^2-a_{22}AB\,a_{12}A^2=N$$

$$(50)\qquad a_{11}B^2-2a_{12}AB+a_{22}A^2=P$$

$$(51)\qquad (a_{13}A+a_{23}B).\sqrt{A^2+B^2}=Q$$

$$(52)\qquad (a_{13}B-a_{23}A).\sqrt{A^2+B^2}=R.$$

Cu acestea, (c) şi (Δ) devin:

(53) $$M X^2 + 2NXY + PY^2 + 2QX + 2RY = 0,$$

(54) $$X - k = 0,$$

iar pentru cubica conică găsim ecuaţia

(55) $$(X-k)(MX^2+2NXY+PY^2)-2X(QX+RY)=0.$$

Se va remarca analogia ecuaţiilor (45) şi (55).

Deasemeni vom menţiona că punctul dublu al cubicei fiind în origină, axa de simetrie trebue să treacă prin origină şi, conform cazului particular studiat mai sus, a fost suficientă doar o rotaţie.

Să grupăm în (55) termenii după puterile lui Y.

(55′) $$P(X-k)Y^2 + 2(NX - Nk - R)XY + X^2(MX - Mk - 2Q) = 0.$$

Se vede că nu figurează Y la puterea a 3-a, adică este îndeplinită condiţia (14). Intocmai ca la cazul general, vom pune condiţia ca şi coeficientul lui Y să fie nul,

(56) $NX - Nk - R \equiv 0$, care ne conduce la condiţiile

(57) $$N = R = 0.$$

Aceste condiţii sunt necesare pentru ca să avem o axă de simetrie; ele sunt şi suficiente căci, fiind îndeplinite, cubica este de forma $Y^2 = F_3(X)$ şi nu mai este necesară nici o altă condiţie suplimentară.

Ţinând seama de (57), ecuaţia (53) se scrie:

(58) $$MX^2 + PY^2 + 2QX = 0.$$

Să notăm (59) $Q = -Pp$, $M = -Pq$.

Atunci conica (58) capătă expresia

(60) $y^2 = 2px + qx^2$, adică ecuaţia cunoscută a unei conice cu un vârf dat şi axa corespunzătoare dată.

Rezultă următoarele condiţiuni geometrice: *pentruca o cubică conică să admită o axă de simetrie, punctul O trebue să fie vârf al conicei, iar (Δ) trebue să fie perpendiculară pe axa transversă a conicei.*

Singura cubică conică ce admite 3 axe de simetrie este *„trifoiul echilateral“*.

Pentru încheierea articolului îmi propun să-i determin conica directoare (c) şi dreapta (Δ).

Ecuaţia cubicei se scrie:

(6′) $$X^3 - 3XY^2 + 3aX^2 + 3aY^2 = 0.$$

Deasemeni ecuaţia unei cubice conice drepte este:

(62) $$MX^3 + PXY^2 - (Mk + 2Q)X^2 - PkY^2 = 0.$$

Pentruca cele 2 ecuaţii (61) şi (62) să reprezinte aceeaşi cubică, vom scrie proporţionalitatea coeficienţilor

(63) $$\frac{M}{1} = -\frac{P}{3} = -\frac{Mk+2Q}{3a} = -\frac{Pk}{3a},$$

din care deducem

(64) $k = a$, (65) $M = -\frac{P}{3}$, (66) $Q = \frac{2aP}{3}$.

Inlocuind valorile găsite peutru M şi Q în (53), obţinem iperbola

(67) $$(X-2a)^2 - 3Y^2 = 4a^2$$

şi dreapta (68) $X - a = 0$, uşor de reprezentat.

NOTA MATEMATICA

7. — *Sur la résolution de la congruence* $X^4 + 1 \equiv 0 \pmod p$.

A) On sait que cette congruence est possible seulement si $p = 8k + 1$. Dès lors, si l'on connaît les deux décomposition $p = x^2 + y^2 = 2z^2 + t^2$, on trouve facilement

$$l^2 + 1 \equiv 0 \pmod p \text{ et}$$
$$2m^2 + 1 \equiv 0 \pmod p.$$

Les solution de la congruence sont: $\pm(l-1)m$, $\pm(l+1)m$. Elles ont été données par *Hoppenot* dans le Sphinx, 1934, page 31, sans démonstration. La priorité en revient à *Woodall* comme le signale *Cunningham*, „Binomial Factorisations“, *London*, 1920—1929. Nous les appellerons formules de *Woodall*.

B) *Démonstration des formules de Woodall.*

Ecrivons les 3 congruences

(1) $$X^4 + 1 \equiv 0 \pmod p$$

(2) $$l^2 + 1 \equiv 0 \pmod p$$

(3) $$2m^2 + 1 \equiv 0 \pmod p$$

α) La comparaison de (1) et de (2) nous donne $X^4 - l^2 \equiv 0$ d'où $X^2 \equiv \pm l$.

β) En retranchant (3) de (1), il vient $X^2 - 2m^2 = 0$, d'où $X^4 \equiv 2m^2$.

En multipliant (α) par (β), nous trouvons

$$X^2 . X^4 \equiv \pm 2 m^2 l,$$

et comme $X^4 \equiv -1$,

$$X^2 \equiv \pm 2 m^2 l, \quad \text{et}$$
$$X^2 \equiv m^2 (l^2 \pm 2l + l),$$
$$X^2 \equiv m^2 (l \mp 1)^2$$

d'où les formules de *Woodall* se dégagent immédiatement.

C) *Formules nouvelles pour la résolution de* $X^4 + 1 \equiv 0 \pmod p$.

Ayant les deux décompositions $2x^2 + t^2 = 2u^2 - v^2 = p$, on résoudra

$$2m^2 + 1 \equiv 0 \pmod p$$
$$2n^2 - 1 \equiv 0 \pmod p$$

On trouve aisement

$$X^4 \equiv 2m^2 \equiv -2n^2$$
$$X^4 . X^4 \equiv -4 m^2 n^2$$
$$X^4 \equiv 4 m^2 n^2$$
$$X^2 \equiv \pm 2 m n$$
$$X^2 \equiv m^2 \pm 2 m n + n^2$$
$$X^2 \equiv (m \pm n)^2$$
$$X \equiv (m \pm n)$$

On a ainsi les solutions $X \equiv \pm (m \pm n)$.

Exemples numériques.

ad A) $500009 = 628^2 + 325^2 = 2 . 500^2 + 3^2$

$l \equiv \pm 204621 \pmod{500009}$; $m = \pm 166503 \pmod{500009}$ $X \equiv \pm 63615$ et $230618 \pmod{500009}$.

ad C) $500009 = 2 . 500^2 + 3^2 = 2 . 537^2 - 277^2$

$m \equiv \pm 166503 \pmod{500009}$;

$n \equiv \pm 102888 \pmod{500009}$

on trouve les mêmes valeurs pour X que ci-dessus.

A. GLODEN

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică* Anul LIII, No. 10, lunie 1948. Rezultatul concursului „Gazetei Matematice" din anul 1948, de prof. *O. N. Țino* Soluții întregi ale unor ecuații diofantice, pe Prof. *V. Claudian.* Asupra unor curbe sferice, de Ing. *F. Marcuș.* Raport asupra premiului de trigonometrie *„Vasile Cristescu"* pe anul 1946 — 1947, de Prof. *I. S. Antoniu*, G-l *Gh. Liteanu* și Prof. *Al. V. Nicolescu.* Note matematice. Probleme rezolvate și propuse.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 424. — *Se dau două cercuri* O *și* O′ *tangente interioare cu razele* R *și* $\frac{1}{4}$R. *Cercul cel mic* O′ *rostogolindu-se pe cercul* O, *fie* M *și* M_1 *punctele de contact ale cercurilor în două poziții diferite și fie* A *și* A′ *punctele unde razele* OM *și* OM_1 *taie iarăși cercurile* O′. *Dreapta care unește punctul* A′ *cu* M′, *noua poziție a punctului* M *socotit fix pe cercul* O′ *în rostogolire, taie dreapta* OM *în punctul* B. *Să se arate că lungimea dreptei* A′B *este constantă oricare ar fi poziția cercului* O′ *în rostogolire.*

GH. CONSTANTINESCU

Soluția. Conform enunțului, arc $MM_1 =$ arc M_1M', adică conform formulei ce dă mărimea unui arc într'un cerc,

$$\frac{\pi R N^0}{180^0} = \frac{\frac{1}{4}\pi n^0}{180^0}; \quad N^0 = \frac{1}{4} n^0,$$

unde $N^0 = \sphericalangle M_1 O M$ și $n^0 = \sphericalangle M_1 O' M'$. Cum ultimul unghiu este exterior în triunghiul isoscel O′A′M′, însemnează că $\sphericalangle M_1 O M = 2 \sphericalangle M_1 A' B$ și deci pentru același motiv trebue ca $\sphericalangle M_1 O M = \sphericalangle A' B O$ adică triunghiul A′OB este isoscel. Rezultă: $A'B = A'O = OM_1 - OA' = \frac{1}{2} R = \text{const}$

Au rezolvat problema D-nii: *Gheorghiu Adr., Gheorghiu M., Grigore T. V., Munteanu I. Gh., Popovici Th. I., Răutan I., Rucăreanu N., Tăraș V., Vlădea I. și Zagaican Ilie.*

Gh. Th. Gh.

Problema 971 bis. — *Un unghiu drept se rotește în jurul vârfului său* A *situat pe cercul* O. *Din* M *și* N *unde laturile sale taie a doua oară cercul se iau pe aceste laturi lungimile*

$$MP = MP' = AN \text{ și } NQ = NQ' = AM,$$

(MP *și* NQ *sunt luate în sensul dela* A *spre* M *și* N).

Fie I *și* I′ *mijloacele segmentelor* PQ *și* PQ′. *Se cere:*

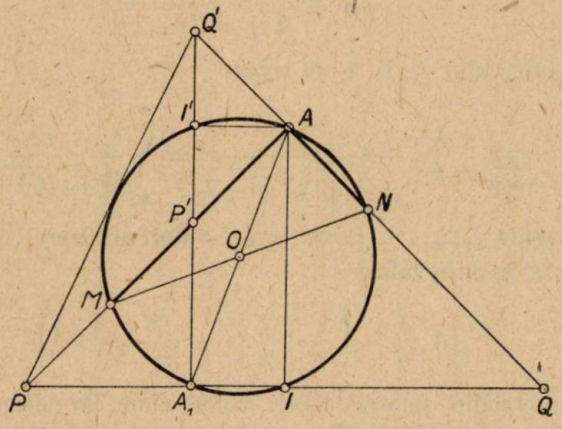
1°. *Locul geometric al punctelor* I *și* I′.

2°. *Să se arate că segmentele de dreaptă* P′Q *și* PQ′ *sunt de lungime constantă.*

3°. *Locul geometric al punctelor* P, Q, P′, Q′.

A. COMAN

Soluție dată de D-l Prof *Ivănescu Cezar*. 1°. Fie A_1 punctul diametral opus lui A în cercul O. $MANA_1$ este un dreptunghiu. Avem deci: $A_1N = AM$. Dar, conform enunțului $AM = NQ$, deci $A_1N = NQ$ relație care ne spune că triunghiul A_1NQ este isoscel; cum încă avem $\sphericalangle A_1NQ = 90°$ rezultă că triunghiul A_1NQ este dreptunghic isoscel.



Pe de altă parte triunghiul PAQ este și el dreptunghic isoscel și prin urmare triunghiurile A_1NQ și PAQ sunt asemenea; de aci rezultă că dreapta PQ trece prin punctul fix A_1. Mijlocul I al segmentului PQ îl obținem (ținând seamă că triunghiul PAQ este isoscel) coborând perpendiculara din A pe PQ. Triunghiul AIA_1 fiind dreptunghic în I și având ca ipotenuză diametrul AA_1 al cercului O, punctul I se găsește pe cercul O. Deci locul lui I este cercul O.

Deasemenea considerând triunghiurile dreptunghice isoscele P'AQ' și A_1NQ', deducem că dreapta P'Q' trece și ea prin punctul fix A_1; iar triunghiul $AI'A_1$ fiind dreptunghic în I' și având ca ipotenuză diametrul AA_1 al cercului O rezultă că locul lui I' este tot cercul O.

2°. Din triunghiul dreptunghic P'AQ avem:

$$\overline{P'Q}^2 = \overline{AP'}^2 + \overline{AQ}^2 = (\overline{AM} - \overline{MP'})^2 + (\overline{AN} + \overline{NQ})^2 = (\overline{AM} - \overline{AN})^2 + (\overline{AM} + \overline{AN})^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{AN}^2) = 8R^2$$

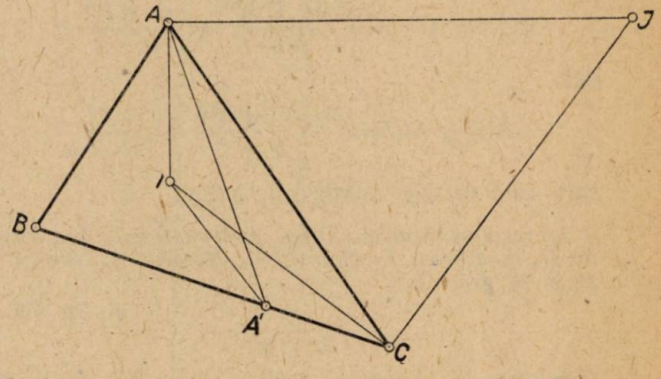
unde R este raza cercului de centru O. Analog avem $\overline{PQ'}^2 = 8R^2$ căci triunghiurile dreptunghice P'AQ și PAQ' sunt egale. Deci $P'Q = PQ' = 2\sqrt{2}\,R$, adică segmentele P'Q și PQ' sunt de lungime constantă.

3°. Avem $\sphericalangle APA_1 = 45°$, $\sphericalangle AQ'A_1 = 45°$ și cum dreapta AA_1 este fixă, rezultă că locul punctelor P și Q' este cercul descris pe segmentul AA_1 ca coardă și capabil de 45°. Apoi $\sphericalangle AP'A_1 = 180° - \sphericalangle AP'Q' = 180° - 45° = 135°$. Deci locul lui P' este cercul descris pe segmentul AA_1 ca coardă și capabil de 135°. Acest cerc va fi și locul lui Q' căci patrulaterul AQA_1P' este inscriptibil (în adevăr $\sphericalangle QAP' = 90°$, $\sphericalangle QA_1P' = 90°$).

Problema 1422. — *Se dă un triunghiu* ABC. *Pe latura* BC *sa ia o distanță* $BA' = BA$. *Bisectoarele interioare din* A *și* C *se taie în* I, *iar cele exterioare în* J. *Să se arate ca punctele* A, I, A' C, J, *sunt conciclice.*

MIRCEA GRUMAZESCU

Soluția. Patrulaterul AICJ este inscriptibil deoarece are două unghiuri opuse drepte. Problema



se reduce la a arăta că patrulaterul $AIA'C$ este inscriptibil, adică $\sphericalangle AIC = \sphericalangle AA'C$. In adevăr, deoarece AI și CI sunt bisectoare, din triunghiul AIC scoatem $\sphericalangle AIC = 180° - \frac{1}{2}(A+C) = 90° + \frac{1}{2}B$. Pedealtă parte cum $BA = BA'$ triunghiul ABA' este isoscel și deci $2\sphericalangle BA'A + B = 180°$ adică $\sphericalangle AA'C = 180° - \sphericalangle BA'A = 90° + \frac{1}{2}B$. Proprietatea este deci demonstrată.

Soluții date de D-nii *Florescu L. Victor, Jidanu C., Postelnicescu C. M., L-t Sâmbotin Gh., și Zagaican Ilie.*

Gh. Th. Gh.

Problema 1427. — *In triunghiul* ABC, *fie* A' *piciorul bisectoarei vârfului* A, A'' *simetricul lui* A' *în raport cu mijlocul laturei* BC; B', C' *simetricele punctelor în care cercul* AA'A'' *taie laturile*

AB, AC *în raport cu mijloacele acestor laturi. Să se arate că avem relaţia*

$$(AB' + AC')(AB + AC) = \overline{BC}^2.$$

C. IONESCU-BUJOR

Soluţia. Deşi enunţul nu precizează, vom alege pe AA' drept bisectoare interioară. Conform enunţului, avem (1) $AB'=CB''$ şi $BC''=AC'$. Dar*)

$$(2) \qquad BA' = \frac{ac}{b+c}, \qquad CA' = \frac{ab}{b+c},$$

a, b, c fiind ca deobiceiu laturile triunghiului. Scriind puterile lui C şi B faţă de cercul $AA'A''$, avem relaţiile

$$CB'' \cdot CA = CA'' \cdot CA', \quad BC'' \cdot AB = BA' \cdot BA''$$

cari în baza lui (1) şi (2) dau

$$CB'' = AB' = \frac{CA'' \cdot CA'}{CA} = \frac{a \cdot CA''}{b+c},$$

$$BC'' = AC' = \frac{BA' \cdot BA''}{AB} = \frac{a \cdot BA''}{b+c};$$

deci

$$AB' + AC' = \frac{a(CA'' + BA'')}{b+c} = \frac{a^2}{b+c}$$

care este tocmai relaţia din enunţ.

Au rezolvat problema D-nii: *Andrunachievici Vl., Apostol R., Enăchescu I., Florescu V., Herman V., Negrea A. M.* şi *Wegener Eug.*

Gh. Th. Gh.

Problema 1722. — *Să se arate că*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{(n+k)\sqrt{n^2-k^2}} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{n\sqrt{(n^2+k^2)^3}} = \frac{3}{\sqrt{2}} - 2.$$

LT. C. IONESCU-TIU

Soluţia. Se cunoaşte următoarea propoziţie**): *fiind dată o funcţiune $f(x)$ continuă într'un interval (a, b), împărţind acest interval în n părţi egale şi în fiecare din aceste intervale parţiale luând un punct ξ_k (care poate* fi chiar una din limitele intervalului) *atunci avem formula*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(\xi_1)+f(\xi_2)+\cdots+f(\xi_n)}{n} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Considerăm funcţiunea

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$$

intervalul $(0, 1)$. Vom avea

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+\xi_k)\sqrt{1-\xi_k^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$$

unde $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sunt nişte valori arbitrare cuprinse în intervalele

$$\left(1, \frac{1}{n}\right), \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right), \ldots, \left(\frac{n-1}{n}, 1\right).$$

Luând pentru aceste valori chiar limitele superioare ale intervalelor, adică

$$\xi_k = \frac{k}{n},$$

avem

$$L_1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{(n+k)\sqrt{n^2-k^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}.$$

Analog găsim

$$L_2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{n\sqrt{(n^2+k^2)^3}} = \int_0^1 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

Problema se reduce deci la calculul acestor două integrale. Pentru prima, facem schimbarea de variabilă.

$$\sqrt{1-x^2} = t(1+x).$$

Se găsesc valorile

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad 1+x = \frac{2}{1+t^2}, \quad \sqrt{1-x^2} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$dx = \frac{-4t\,dt}{(1+t^2)^2},$$

şi deci

$$L_1 = \int_0^1 dt = |t|_0^1 = 1.$$

*) Vezi pr. 2517, p. 61.

**) *Gh. Th. Gheorghiu*, Probleme de Algebră şi Analiză matematică, ed. IV, vol. II. p. 90.

Pentru a doua integrală facem schimbare $x^2 = t$ şi găsim succesiv

$$L_2 = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t\,dt}{(1+t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1+t-1)\,dt}{(1+t)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 (1+t)^{-\frac{1}{2}}\,dt - \int_0^1 (1+t)^{-\frac{3}{2}}\,dt\right]$$

$$= \left|(1+t)^{\frac{1}{2}} + (1+t)^{-\frac{1}{2}}\right|_0^1 = (\sqrt{2}-1) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}} - 2.$$

GH. TH. GH.

Problema 1733. — *Să se construiască un triun-*ABC *cunoscându-se latura* b, *unghiul* $A < 90^0$ *şi ale cărui laturi verifică relaţia:* $3(a^2 - b^2) = c^2$.

N. ANITESCU

Soluţie dată de D-nii Prof. *Dăscălescu Şt. Hr.* (R. Sărat), *Spătaru Alex.* (Cluj), şi *Wegener Eug.* (Bucureşti). Dacă notăm cu M mijlocul laturei AB şi cu C′ piciorul înălţimei coborâtă din C pe această latură, avem*)

$$a^2 - b^2 = 2c \cdot MC',$$

care în baza relaţiei din enunţ, devine $MC' = \frac{1}{6}c$, sau $AC' = \frac{1}{2}c - MC' = \frac{1}{3}c$. Cunoscând această relaţie, construcţia triunghiului se face uşor. In extremitatea A a laturei cunoscute $AC = b$, construim unghiul $A < 90^0$ şi notăm a doua latură cu Ax. Din C coborâm perpendiculară care taie pe Ax în C′ şi purtăm în prelungire $C'B = 2C'A$. Punctul B obţinut este al treilea vârf al triunghiului căutat.

S'au mai primit încă patru soluţii cari nu pot fi citate.

Gh. Th. Gh.

Problema 2100. — *Să se găsească condiţia convergenţei seriei cu termenul general*

$$u_n = \frac{\sin^\alpha \frac{\pi}{\sqrt[4]{n}}}{\sqrt[4\alpha]{n^3+1}}$$

α fiind un parametru variabil.

EUGEN SIPOS

*) *Gh. Th. Gheorghiu*, Curs de Geometrie, vol. I. pag. 63 relaţia (1).

Soluţia. Termenul general al seriei se mai poate scrie sub forma

$$u_n = \left(\frac{\sin\frac{\pi}{\sqrt[4]{n}}}{\frac{\pi}{\sqrt[4]{n}}}\right)^\alpha \cdot \frac{\pi^\alpha}{\sqrt[4]{n^\alpha}\,\sqrt[4\alpha]{n^3+1}}$$

de unde se vede că seria este de aceaşi natură cu seria având termenul general

$$v_n = \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{4}+\frac{3}{4\alpha}}},$$

deoarece avem

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_n}{v_n} = \pi^\alpha.$$

Dar, pentruca seria Σv_n să fie convergentă este necesar ca

$$\frac{\alpha}{4} + \frac{3}{4\alpha} > 1,$$

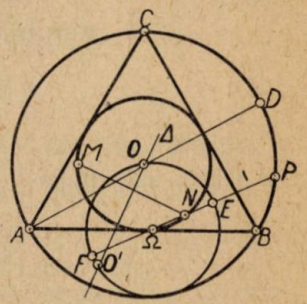
inegalitate care se reduce la $\alpha(\alpha-1)(\alpha-3) > 0$. Pentruca seria dată să fie convergentă, este necesar ca $0 < \alpha < 1$ sau $\alpha > 3$.

Gh. Th. Gh.

Problema 2467. — *Să se construiască un triunghiu echilateral cunoscând poziţia a două puncte de pe cercul său înscris şi poziţia unui punct de pe cercul său circumscris .(sau invers în ceiace priveşte cercurile).*

VIRGIL GHITESCU

Soluţia. Fie M şi N punctele de pe cercul înscris şi P punctul de pe cercul circumscris. Conform proprietăţilor triunghiului echilateral aceste două cercuri sunt concentrice, primul având raza jumătate din a celui de-al doilea. Să găsim centrul O comun acestor două cercuri. În primul rând el se va găsi pe perpendiculara Δ ridicată pe mijlocul segmentului MN. In al doilea rând conform proprietăţei menţionată mai sus, $ON = \frac{1}{2}OP$



Ori locul punctelor din plan care satisfac această relaţie este un cerc Ω care se construieşte astfel: se împarte segmentul prin punctele E şi F astfel ca

$$\frac{\overline{EN}}{\overline{EP}} = -\frac{1}{2}, \qquad \frac{\overline{FN}}{\overline{FP}} = \frac{1}{2}$$

(adică E este la o treime din NP de N şi F simetricul lui P faţă de N); cercul Ω est cercul de diametru EF*). Odată punctul O găsit, ca intersecţia dreptei Δ cu cercul Ω, construcţia triunghiului ABC este imediată: se duce un diametru AD în cercul de rază OP şi pe mijlocul lui OD (care se găseşte pe cercul de rază OM = ON) se ridică o perpendiculară care taie cercul în B şi C; triunghiul căutat este triunghiul ABC. Odată centrul O determinat, problema admite o infinitate de soluţii, triunghiul depinzând de alegerea lui A pe cercul de rază OP.

Discuţia problemei este uşoară: vom avea două infinităţi de soluţii, una singură sau nici o soluţie după cum dreapta Δ taie cercui Ω în două puncte, într'unul singur sau în nici unul. In cazul figurei avem două infinităţi de soluţii.

Se vede imediat, că problema când se cunosc două puncte pe cercul circumscris şi unul pe cercul înscris, se reduce la aceasta.

Au rezolvat problema D-nii: *Corduneanu C.* (Predeal), *Crăciunescu V.* (P. T.), *Haret R.* (Bucureşti), *Manolescu G.* (P. T.), *Moldovan M.* (P. T.), *Stan P.* (P. T.) şi *Teodorescu P. P.* (Bucureşti).

S'au mai primit 10 soluţii copiate una după alta, o soluţie bună neiscălită şi 6 greşite*).

Gh. Th. Gh.

Problema 2510. — *Să se stabilească identitatea*

$$a \operatorname{arc\,tg} i \frac{\sqrt[a]{(1+ix)^b} - \sqrt[a]{x(1-ix)^b}}{\sqrt[a]{(1+ix)^b} + \sqrt[a]{x(1-ix)^b}} + b \operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{2i}\log x, \quad (i = \sqrt{-1}).$$

V. ALACI

Soluţia autorului. Notăm cu E primul membru şi facem substituţia

$$x = \operatorname{tg}\varphi.$$

*) *Gh. Th. Gheorghiu*, Curs de Geometrie, Vol. I. p. 59, apl IV. Aci se găseşte mai general locul punctelor din plan ale căror distanţe la două puncte date sunt într'un raport dat

Apoi observând că putem scrie

$$x = e^{\log x} = e^{2i\left(\frac{\log x}{2i}\right)}$$

şi folosind formulele lui *Euler*, avem succesiv după unele simplificări:

$$E = a \operatorname{arc\,tg} i \frac{(1+i\operatorname{tg}\varphi)^{\frac{b}{a}} - e^{2i\left(\frac{\log x}{2ia}\right)}(1-i\operatorname{tg}\varphi)^{\frac{b}{a}}}{(1+i\operatorname{tg}\varphi)^{\frac{b}{a}} + e^{2i\left(\frac{\log x}{2ia}\right)}(1-i\operatorname{tg}\varphi)^{\frac{b}{a}}} + b\varphi$$

$$= a \operatorname{arc\,tg} i \frac{e^{i\frac{b}{a}\varphi} + e^{2i\frac{\log x}{2ia}} e^{-i\frac{b}{a}\varphi}}{e^{i\frac{b}{a}\varphi} + e^{2i\frac{\log x}{2ia}} e^{-i\frac{b}{a}\varphi}} + b\varphi$$

$$= a \operatorname{arc\,tg} i^2 \frac{e^{i\left(\frac{b}{a}\varphi - \frac{\log x}{2ia}\right)} - e^{-i\left(\frac{b}{a}\varphi - \frac{\log x}{2ia}\right)}}{ie^{i\left(\frac{b}{a}\varphi - \frac{\log x}{2ia}\right)} + e^{-i\left(\frac{b}{a}\varphi - \frac{\log x}{2ia}\right)}} + b\varphi$$

$$= -a \operatorname{arc\,tg}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{b}{a}\varphi - \frac{\log x}{2ia}\right)\right] + b\varphi$$

$$= -a\left(\frac{b}{a}\varphi - \frac{\log x}{2ia}\right) + b\varphi = \frac{1}{2i}\log x.$$

Astfel identitatea cerută este stabilită

Au soluţionat problema folosind cunoştinţi din articolul autorului: „*Câteva teoreme de algebră*", publicat în „R M.T.", Vol. XXVII, p. 15, d-nii: *Cocoş Gh.* (Lic Mil. Timişoara), *De Sabota Ioan* (Lic. Beiuş), *Gherlan Vasile* (P. T.), *Cioară Gh. Alexandru* (P. T.), *Giurconiu Mihai* (P. T.), *Marinescu S. D.* (Ploeşti), *Morega Titus* (Lic. Tg. Jiu), *Novac Ioan* (P. T.), *Pantea Alexandru* (Lic. Beiuş), *Păsărin Gh.* (Lic. Tg-Jiu), *Popa Septimiu* (Lic. Beiuş), *Purcea Ion* (Lic. Caracal), *Roman C-tin* (Lic. Loga, Timişoara), *Seracin Eugen* (P. T.), *Simeon Liviu* (P. T.), *Stănilă B. George* (Buzău), *Teodorescu Petre* (Lic. Matei Basarab, Bucureşti) şi *Zelinger N.* (P. T.).

D-l. *Teodorescu Petre* a dat şi o generalizare.

Problema 2515. — *Să se determine numărul întreg a, astfel încât ecuaţia*

$$x^3 - (a+5)x - a = 0,$$

să aibă o rădăcină întreagă şi să se afle apoi rădăcinile ecuaţiei.

L-T COL. EUG. ST. IACOB

Soluţie dată de D-l *Soare V. Mircea* (Bucureşti). Ecuaţia dată se mai poate scrie

$$a = \frac{x^3 - 5x}{x+1} = x^2 - x - 4 + \frac{4}{x+1}.$$

Cum a este întreg, din relaţia precedentă rezultă că pe x întreg nu putem să-l alegem decât astfel ca $x+1$ să fie un divizor al lui 4, adică

x	0	1	3	-3	-5
a	0	-2	3	6	25

Pentru aceste valori ale lui a, avem următoarele ecuaţii cu soluţiile lor:

x^3-5x; $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm\sqrt{5}$;
$x^3-3x+2=0$, $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=-2$;
$x^3-8x-3=0$; $x_1=3$, $x_{2,3}=\frac{1}{2}(-3\pm\sqrt{5})$;
$x^3-11x-6=0$; $x_1=-3$, $x_{2,3}=\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{17})$;
$x^3-30x-25=0$; $x_1=-5$, $x_{2,3}=\frac{1}{2}(5\pm3\sqrt{5})$.

Aceste soluţii au fost găsite şi de D-l *Novac I. I.* (P.T.), D-l *Teodorescu P. P.* a considerat numai rădăcinile întregi şi pozitive, restricţie care nu este făcută în enunţul problemei. Celelalte soluţii nu pot fi luate în considerare.

Gh. Th. Gh.

Problema 2523. — *Să se arate că funcţiile*

$$y=\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}-2\operatorname{arc\,cotg}\frac{1}{\sqrt{x}},$$

$$z=\arcsin(\operatorname{tg}x)-\operatorname{arc\,tg}\frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}},$$

au aceiaşi derivată.

V. ALACI

Soluţia 1-a. Vom deriva pe rând funcţiile date, ţinând seamă de regulele de derivare cunoscute. Avem succesiv,

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x}{(1+x)^2}}}\cdot\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}(1+x)-2\sqrt{x}}{(1+x)^2}+$$

$$\frac{2}{1+\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{2x\sqrt{x}}=\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{1+x-2x}{\sqrt{x}(1+x)^2}-$$

$$\frac{2}{2\sqrt{x}(1+x)}=\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}-\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}=0.$$

$$z'=\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2x}}\cdot\frac{1}{\cos^2x}-\frac{1}{1+\frac{\sin^2x}{\cos 2x}}\times$$

$$\frac{\cos x\sqrt{\cos 2x}+\sin x\cdot\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}}{\cos 2x}=\frac{1}{\cos^2x\sqrt{1-\operatorname{tg}^2x}}-$$

$$\frac{\cos 2x}{\cos 2x+\sin^2x}\cdot\frac{\cos x\cos 2x+\sin x\sin 2x}{\cos 2x\sqrt{\cos 2x}}=$$

$$\frac{1}{\cos^2x\sqrt{1-\operatorname{tg}^2x}}-\frac{\cos x}{(\cos^2x-\sin^2x+\sin^2x)\sqrt{\cos 2x}}=$$

$$\frac{1}{\cos^2x\sqrt{1-\operatorname{tg}^2x}}-\frac{\cos x}{\cos^2x\sqrt{\cos 2x}}=$$

$$\frac{1}{\cos^2x\sqrt{1-\operatorname{tg}^2x}}-\frac{1}{\cos^2x}\cdot\frac{1}{\sqrt{\cos^2x-\sin^2x}}=$$

$$=\frac{1}{\cos^2x\sqrt{1-\operatorname{tg}^2x}}-\frac{1}{\cos^2x\sqrt{1-\operatorname{tg}^2x}}=0.$$

Ambele funcţii au astfel aceiaşi derivată, care este zero.

Au dat soluţii analoage d-nii: *Bâlă C-tin* (P.T.), *Banciu Gh.* (Lic. Beiuş), *Barbul Vasile* (Lic. Oradea), *Cârciu Ioan* (Colegiul Loga, Timişoara), *Cioară Alexandru* (P. T.), *Ciucescu Paul* (Lic. Slatina), *Coţiu Aurel* (student, Cluj), *Dăscălescu Hristache* (R.-Sărat), *De Sabota Ioan* (Lic. Beiuş), *Deutsch Emeric* (P. T.), *Gherlan Vasile* (P. T.), *Giurconiu Mihai* (P. T.), *Gongu Th.* (P. T.) *Hurezeanu R.* (Lic. Tg.-Jiu), *Man Octavian* (Cluj), *Marinescu D.* (Ploeşti), *Morega Titus* (Lic. Tg.-Jiu), *Moreno Hodar* (P. T.), *Munteanu Giuseppe* (Braşov), *Neguţ Ion* (Lic. Tg.-Jiu), *Novac Ion* (P. T.), *Pantea Alexandru* (Lic. Beiuş), *Păsărin Gh.* (Lic. Tg.-Jiu), *Pisanca Ionel* (Timişoara), *Roman C-tin* (Col. Loga, Timişoara), *Sârbu Ioan* (P. T.), *Stancu D-tru* (Lic. Arad), *Stănilă B. George* (Buzău), *Székely George* (P. T.), *Tămăşescu Virgil* (Lic. Tg.-Jiu), *Teodorescu Petre* (Lic. Matei Basarab, Bucureşti) *Toderaşc Vasile* (P. T.), *Turbuţiu Gh.* (P. T.) şi *Zbârcea Ion* (P. T.).

Soluţia 2-a, dată de *Novac Ion* (P. T.).

Punem, $y=u-v$, $z=w-t$

Putem scrie succesiv:

1°. $\sin u=\frac{2\sqrt{x}}{1+x}$, $\operatorname{cotg}\frac{v}{2}=\frac{1}{\sqrt{x}}$, sau $\operatorname{tg}\frac{v}{2}=\sqrt{x}$.

Apoi,

$$\sin v=\frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}v}{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}v}=\frac{2\sqrt{x}}{1+y}=\sin u,$$

deci $u-v=2k\pi=ct$, şi prin urmare $y'=0$.

2°. $\sin w=\operatorname{tg}x$, $\operatorname{tg}t=\frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}$, deducem

$$\sin t=\frac{\operatorname{tg}t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2t}}=\frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2x}}:\sqrt{1+\frac{\sin^2x}{\cos^2x}}=$$

$$\frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x+\sin^2x}}=\frac{\sin x}{\cos x}=\sin w$$

deci, $w-t=2k\pi=ct$ şi prin urmare $z'=0$.

Astfel funcţiile y şi z au acelaşi derivată, care este nulă.

Soluţii analoage date de d-rele: *Madelena Alice* (P.T.), *Raţiu Maria* (P. T.) precum şi de d-nii: *Chiriac Iovănel. Chioreanu Ion* (P. T.), *Cioca Ioan* (P. T.), *Deutsch Emi* (P. T.), *Marinescu D.* (Ploeşti), *Păunescu Gh.* (Lic. Mate Basarab, Bucureşti) şi *Teodorescu Petre* (Lic. Matei Basarab, Bucureşti).

Problema 2524. — *Să se elimine α şi β între relaţiile*

$$a\sin^4\alpha + b\cos^4\alpha = c,$$
$$a_1\sin^4\beta + b_1\cos^4\beta = c_1,$$
$$m\operatorname{tg}\alpha = n\operatorname{tg}\beta.$$

EUGEN WEGENER

Soluţie dată de D-nii *Soare V. Mircea* (Bucureşti), *Stancu D. Dumitru* (Cluj) şi *Teodorescu P. Petre* (Bucureşti). Inlocuind pe $\sin\alpha$ şi $\cos\alpha$ în funcţie de $\operatorname{tg}\alpha$, prima ecuaţie se transformă în

$$(1)\qquad (a-c)\operatorname{tg}^4\alpha - 2\operatorname{ctg}^2\alpha + (b-c) = 0.$$

A doua ecuaţie este analoagă cu aceasta. Dacă în ea înlocuim pe $\operatorname{tg}\beta$ prin valoarea sa dată de ultima, obţinem ecuaţia

$$(2)\quad (a_1-c_1)m^4\operatorname{tg}^4\alpha - 2c_1m^2n^2\operatorname{tg}^2\alpha + (b_1-c_1)n^4 = 0.$$

Problema s'a redus astfel la a elimina pe $\operatorname{tg}^2\alpha$ între două ecuaţii de gr. 2. Rezultatul acestei eliminări este cunoscut şi în cazul nostru este

$$4m^2n^2[(a_1-c_1)cm^2 - (a-c)c_1n^2][(b-c)c_1m^2 - (b_1-c_1)cn^2] = [a_1-c_1)(b-c)m^4 - (a-c)(b_1-c_1)n^4]^2.$$

Au găsit rezultatul eliminării sub formă iraţională D-rele *Alexa M.* (P. T.), *Raţiu M.* (P. T.) şi D-nii: *Cioara Gh. Alex.* (P. T.), *Gherlan I. Vas.* (P. T.), *Giurconiu M.* (P.T.), *Hurezeanu R.* (Tg.-Jiu), *Marinescu S. D.* (Ploeşti), *Neguţ A. I.* (Tg.-Jiu), *Novac I. I.* (P. T.), *Pantea N. Alex.* (Beiuş), *Popa F. P.* (Oradea), *Popa Gh. S.* (Beiuş), *Popescu S.* (Tg.-Jiu), *Purcea M. I.* (Caracal), *Simeon L.* (P. T.) şi *Toderaşc I. V.* (P. T.).

Gh. Th. Gh

Problema 2547. — *Se dau ecuaţiile*

$$x^2 + \alpha x - 3 = 0,\quad (\alpha+1)x^3 - 3x + 2 = 0.$$

Să se determine rezultantul lor. Considerând ecuaţia ce se obţine egalând rezultantul cu zero, se cere: 1° Să se afle rădăcinile comensurabile. 2° Să se determine numărul rădăcinilor incomensurabile. 3° Să se calculeze rădăcinile incomensurabile cu două zecimale exacte.

E. ARGHIRIADE

Soluţia. Inmulţind prima ecuaţie cu $(\alpha+1)x$ şi scăzând o din a doua, eliminarea lui x între ecuaţiile date se reduce la eliminarea lui x între ecuaţiile

$$\alpha(\alpha+1)x^2 - 3\alpha x - 2 = 0,\quad x^2 + \alpha x - 3 = 0.$$

Ţinând seama de eliminantul a două ecuaţii de gr. 2, găsim

$$[\alpha^2(\alpha+1)+3\alpha](9\alpha+2\alpha) = [-3\alpha(\alpha+1)+2]^2;$$

$$(1)\qquad 2\alpha^4 - 7\alpha^3 + 36x^2 + 12\alpha - 4 = 0.$$

1° Rădăcinile comensurabile ale acestei ecuaţii sunt de forma a/b unde a este un divizor al lui 4 iar b un divizor al lui 2 (cu semnul $\pm$). Prin incercări se găseşte că ecuaţia dată se divide cu $2\alpha+1$, adică singura rădăcină comensurabilă este $\alpha = -\frac{1}{2}$.

2° Eliminând această rădăcină, ecuaţia (1) se reduce la ecuaţia

$$f(\alpha) \equiv \alpha^3 - 4\alpha^2 + 20\alpha - 4 = 0.$$

Cum ecuaţia derivată a acesteia,

$$f'(\alpha) \equiv 3\alpha^2 - 8\alpha + 20 = 0,$$

are rădăcini imaginare, ecuaţia precedentă are o singură rădăcină reală, deci o singură rădăcină incomensurabilă.

3° Cum în intervalul (0, 1),

$$f''(\alpha) = 2(3\alpha - 4) < 0,$$

metoda tangentei va da aproximaţia intervalului prin lipsă, iar *metoda coardei* prin adaos. Pentru prima aproximare avem

$$a = 0,\ b = 1,\ f(a) = -4,\ f(b) = 13,\ f'(a) = 20$$

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} = 0{,}20;\quad b_1 = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)} = 0{,}23$$

Pentru a două aproximaţie avem

$$a_1 = 0{,}20;\ b_1 = 0{,}23;\ f(a_1) = -0{,}15;\ f(b_1) = 0{,}40,$$
$$f'(a_1) = b_1 = 0{,}20 + 0{,}018 = 0{,}21$$

adică rădăcina cu două zecimale exacte este 0,20.

Au rezolvat foarte bine problema D-nii: *Dodu A. Eug.* (Bucureşti), *Novac I. I.* (P. T.) şi *Teodorescu P. P.* (Bucureşti).

Gh. Th. Gh.

Problema 2606. — *Pentru o lucrare care trebue terminată în 6 zile au fost tocmiţi m lucrători. În primele două zile au fost prezenţi la muncă toţi lucrătorii în următoarele trei zile au lipsit în fiecare zi doi lucrători. Câţi lucrători mai trebuesc*

să fie tocmiți suplimentar în ajunul ultimei zile pentruca lucrarea să fie isprăvită în termen? (Se presupune pentru fiecare din ei aceiași putere de muncă constantă tot timpul lucrării).

VIRGIL GHITESCU

Soluția. Cum în timpul execuției lucrării au lipsit trei zile câte doi lucrători, în ultima zi vor mai trebui angajați 6 lucrători pentruca lucrarea să fie terminată.

Au rezolvat problema D-nii *Bogoevici I. Nic.* (cl. 7, lic. Caransebeș), *Breazu M.* (cl. 8, lic. Deva), *Mihăilescu C. C.* (cl. 4, lic. Șincai, București), *Nemoianu C.* (P. T.) și *Nicoară M.* (cl. 8, Oradea).

Gh. Th. Gh.

Problema 2608. — *Să se demonstreze că dacă polinomul*

$$f(x,y,z) = A x^2 + 2B xy + C y^2 + 2D xz + 2E yz + F z^2.$$

este un pătrat perfect, atunci expresia

$$E = (\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z)^2 - 4 f(\alpha,\beta,\gamma) f(x,y,z),$$

este identic nulă oricare ar fi α, β, γ.

GH. TH. GHEORGHIU

Generalizare dată de D-l *Purcea M. I.* (elev cl. 8-a lic., *Ioniță Asan*, Caracal). Să considerăm un polinom omogen de gr. II cu n variabile $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ care prin ipoteză este un pătrat perfect, adică se poate scrie sub forma

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n)^2.$$

Avem

$$f'_{x_1} = 2a_1 (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f'_{x_n} = 2a_n (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n)$$

relații cari spun că

$$E = (\alpha_1 f'_{x_1} + a_2 f'_{x_2} + \cdots + \alpha_n f'_{x_n}) - 4 f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) f(x_1, \ldots, x_n)$$
$$= [2(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + \alpha_n x_n)(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n)]^2$$
$$- 4 f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) f(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Au rezolvat probiema D-nii *Breazu M.* (Deva), *Gherlan I. V.* (P. T.), *Nemoianu C.* (P. T.), *Nicoară M.* (Oradea), *Pantea N. Alex.* (Beiuș), *Petcu Al. Val.* (București), și *Soare V. M.* (București).

O parte din corespondenți a căutat să dea o interpretare geometrică a problemei, dar, n'au reușit. Iată care este interpretarea. Ecuația $f(x,y,z) = 0$ reprezintă o conică pentru care ecuația $E = 0$ reprezintă fascicolul de tangente duse la curbă din punctul $M(\alpha, \beta, \gamma)$. Să considerăm cazul când conica este degenerată. Avem două cazuri: a) conica se reduce la două drepte concurente, la distanță finită sau la infinit) într'un punct A. Considerând tangenta ca o dreaptă ce taie conica în două puncte confundate, singura dreaptă din plan (în cazul când M nu este pe conică) ce se bucură de această proprietate este dreaptă MA. Ecuația $E = 0$ va reprezenta această dreaptă luată de două ori, adică polinomul E va fi un pătrat perfect. b) conica se reduce la două drepte confundare. In acest caz orice punct al curbei este socotit de două ori și deci orice dreaptă din plan ce trece prin M poate fi socotită ca o tangentă, adică ecuația $E = 0$ trebue să fie o identitate. Este cazul problemei noastre.

Gh. Th. Gh.

Problema 2613. — *Să se arate că într'un triunghiu oarecare* ABC, *notațiile fiind cele obișnuite, avem relațiile*

$$\frac{\sin B}{\sin(A+B)} = \frac{p(p-a)}{c^2 \cos^2 \frac{1}{2} A},$$

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{2}A + B\right)}{\sin(A+B)} = \frac{(p + c\cos\frac{1}{2}A)(p + c\cos\frac{1}{2}A - a)}{4c^2 \cos\frac{1}{2}A \cos^2\frac{1}{4}A}.$$

EMERIC DEUTSCH

Soluția. Ținând seama de formula care ne dă pe $\cos^2 \frac{1}{2} A$ în funcție de laturi, avem

$$\frac{p(p-a)}{c^2 \cos^2 \frac{1}{2} A} = \frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\sin B}{\sin(A+B)},$$

adică prima relație din enunț. Pentru a doua relație calculăm mai întâiu expresia

$$(p + c\cos\tfrac{1}{2}A)(p + c\cos\tfrac{1}{2}A - a) = p(p-a) +$$
$$c(2p-a)\cos\tfrac{1}{2}A + c^2\cos^2\tfrac{1}{2}A = c(b\cos\tfrac{1}{2}A +$$
$$2p - a + c\cos\tfrac{1}{2}A)\cos\tfrac{1}{2}A = c(b+c)(1 + \cos\tfrac{1}{2}A$$
$$\cos\tfrac{1}{2}A = 2c(b+c)\cos^2\tfrac{1}{4}A\cos\tfrac{1}{2}A,$$

încât partea a 2-a a celei de a doua relații din enunț se mai poate scrie

$$\frac{b+c}{2c\cos\frac{1}{2}A} = \frac{\sin B + \sin C}{2\sin C\cos\frac{1}{2}A} =$$
$$\frac{\sin\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\sin C\cos\frac{1}{2}A} =$$
$$\frac{\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}[B - (180^\circ - B - A)]}{\sin C\cos\frac{1}{2}A} = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}A + B\right)}{\sin(A+B)}$$

Au rezolvat problema D-nii *Breazu M.* (Deva), *Drăghici I.* (Caransebeș), *Gherlan I. V.* (P. T.), *Păunescu Șt. Gh.* (București), *Purcea M. I.* (Caracal) și *Seracin E.* (P. T.).

Gh. Th. Gh.

PROBLEME PROPUSE

2635*. — Să se formeze *toate* numerile de trei cifre abc pentru care produsele $a \times b$, $a \times c$ sunt numere inversate de câte două cifre.

G-l Gh. Buicliu

2436*. — Dacă a, b, c sunt trei numere întregi, atunci numărul

$$N = (10b + c) + 2(10c + a) + 4(10 + b)$$

este totdeauna un multiplu de 7.

D. Pompeiu

2637. — Se dă sistemul de ecuații

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} = \dfrac{c}{a-b} \\ \dfrac{1+xy}{1-xy} = \dfrac{a+b}{c} \\ (x^2-y^2)(1-x^2y^2) = a^2-b^2. \end{cases}$$

Să se arate că dacă avem relația

$$(a+b+c)^3 - (a+b+c)(a-b+c) = 16c^2(a+b-c),$$

sistemul este compatibil și să se rezolve.

C. Ionescu-Tiu

2638. — Dându-se α și β, să se determine a și b astfel ca ecuațiile

$$(x-\alpha)^m - a^m = 0$$
$$(x-\beta)^n - b^n = 0$$

să admită rădăcini comune. *Discuție.* (m, n întregi pozitivi) (α, β, a, b, reali).

V. Alaci

2639. — Să se studieze și să reprezinte grafic variația funcției,

$$y = \frac{1}{x}\, e^{\frac{1}{x}}.$$

Eugen Visa

2640. — Vârfurile A, B și D, C ale unui trapez ABCD se mișcă pe două drepte paralele date, în așa fel că laturile neparalele AD și BC se taie în punctul P pe o dreaptă fixă PI, punctul I fiind pe dreapta ce unește mijloacele laturilor AD, BC. Trasăm cercurile având ca diametre AD și BC, iar din P ducem spre dreapta câte o tangentă PM și PN la aceste cercuri, M și N fiind punctele de contact.

Se cere locul intersecțiilor dreptei MN cu cercul descris pe IP ca diametru.

Fl. Nedelcu

2641. — Se consideră un cerc fix (C) și două puncte A, B deasemenea fixe, în același plan. Un cerc variabil dus prin punctele A, B intersectează cercul (C) în punctele M, N. Să se demonstreze că expresia

$$\frac{AM \cdot AN}{BM \cdot BN}$$

păstrează o valoare constantă k_1.

2. Dacă se ia un al 3-lea punct C, în același plan, apoi se repetă cu perechile de puncte B, C și C, A aceleași construcții, se obțin alte două rapoarte k_2, k_3. Să se demonstreze relația:

$$k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 = 1.$$

3. Dacă în general, avem n puncte A, B, C, .., P, pe care le asociem două câte două: (A, B), (B, C), ..., (P, A) și notăm cu $k_1, k_2, \ldots, k_r$ constantele corespunzătoare, să se cerceteze în ce caz avem relația:

$$k_1 \cdot k_2 \ldots k_r = 1.$$

Cezar Cosnita

2642. — Avem un triunghiu ABC și β un unghiu asociat. Dacă se dă,

$$sp\,\tfrac{1}{2}A = \tfrac{5}{11}, \quad cp\,\tfrac{1}{2}B = \tfrac{37}{57},$$

atunci să se arate că

$$\operatorname{tg}\beta = \tfrac{1}{2}.$$

C-pt. C-dor C. V. Costachescu

2643. — Să se arate că într'un triunghiu oarecare ABC, avem relația

$$\frac{b-c}{sp\,\frac{1}{2}(B-C)} + \frac{c-a}{sp\,\frac{1}{2}(C-A)} + \frac{a-b}{sp\,\frac{1}{2}(A-B)} = 4(R+r),$$

notațiile fiind cele obicinuite.

Emeric Deutsch

2644. — Să se integreze ecuația diferențială vectorială $\bar{r}\bar{r}' = \bar{u}$, unde $\bar{r}$ și $\bar{u}$ sunt vectori ce depind de o variabilă scalară t, $\bar{u}$ fiind dat, iar r' este derivata vectorului $\bar{r}$ în raport cu t. Discuție. $\bar{a}\bar{b}$ reprezintă produsul vectorial al vectorilor $\bar{a}$ și $\bar{b}$.

M. Ghermanescu

E R A T Ă

lu ultima paranteză din problema 2626 în loc de $b\,\frac{1-ab}{a+b}$ se va scrie $b + \frac{1-ab}{b+b}$.

INFORMAŢII

1. Nu se publică în revistă decât manuscrise dela abonaţi.

2. Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol, trebuesc scrise citeţ (în special iscălitura) numai pe o parte a hârtiei. Probleme propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor, iar cele rezolvate, de enunţ. Nu sunt luate în considerare probleme rezolvate iscălite de mai mulţi corespondenţi. Problemele rezolvate vor fi redactate îndependent una de alta, şi nu în continuare.

3. Numele colaboratorilor dela cari s'au primit soluţii la problemele publicate în acest număr şi care au sosit la redacţie după data de 15 a lunei precedente, nu mai pot fi trecute în corpul revistei. Numele lor este însă menţionat pe copertă împreună cu numărul problemei rezolvate.

4. Rugăm pe corespondenţii noştrii la orice schimbare de adresă sau lipsă din localitate fără a avea pe cineva să le primească revista, să ne anunţe din vreme. În caz contrar revista ne vine înapoi şi cu regret anunţăm că a doua oară nu o mai putem expedia. Mai mult, se suspendă expedierea numerelor următoare până ce abonatul va reclama aceste numere.

5. La Concursul R. M. T. pe anul în curs, s'au înscris D-nii :

Blaga A. cl. VII, Colegiul Diaconovici Loga, Timişoara.

Breazu M. cl. VIII, lic. Decebal, Deva.

Deleanu I. Ar., cl. VI, lic. Maiorescu, Bucureşti.

Deutsch Em., P. T. an. 1 C.

Pantea N. Alex., cl. VIII, lic. S. Vulcan, Beiuş.

Păunessu Şt. Gh. cl. VII, lic. Matei Basarab, Bucureşti.

Purcea M. I. cl. VIII, lic. I. Asan, Caracal.

Tibăr A., cl. VII, lic. Mircea cel Bătrân, Constanţa.

Turbuţiu Gh., P. T. an. IA.

6. *Cǫdreanu Fl.* (Bihor). Rog mai trimiteţi 30 lei pentru complectarea abonamentului.

7. *Sârbu Ol.* (Deva), Fasc. III şi V din „67 examene“ nu pot apărea anul aceasta. Rog scriţi-ne ce să vă trimitem de banii primiţi.

8. *Nicoară M.*, Col. Armatei Roşii 12, Oradea, roagă pe cei ce pot să-i procure „Culegere de Probleme de geometrie“ de *G. Ţiţeica* să i se adreseze pe adresa de mai sus, indicându-i condiţiile.

Pentru „Geometria triunghiului“ de *Tr. Lalescu* adresaţi-vă D-lui *R. Racliş*, aleea Vulpache 21, Bucureşti 3.

Manuscrise primite de la corespondenții noștrii până la 1 a lunei curente și anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) și probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

---

Brandler D. (N.): *Bogoevici N.* (2552, 2622, 2628); *Coatu Gh.* (N; 2615, 2628); *Deleanu Aristide* (2596, 2599, 2501, 2606, 2609, 2611, 2612); *Deutsch Emeric* (N; P; 382, 1485, 1808, 1881, 1921, 2063, 2094, 2096, 2199, 2210, 2292, 2463, 2470, 2494. 2502, 2503, 2510, 2515, 2524, 2526, 2529, 2560, 2581, 2597, 2598, 2599, 2602, 2603, 2604, 2606, 2607, 2608, 2609, 2611, 2612, 2614, 2622, 2625, 2628, 2630, 2632, 2633); *Drăghici Iosif* (2617, 2622, 2628); *Giurconiu Mihai* (2552, 2587, 2606, 2625, 2628); *Hurezeanu Romulus* (2436, 2632); *Manoilă Dan* (2596, 2601, 2617, 2621); *Nedelcu Fl.* (P); *Păunescu Gh.* (P. 2502, 2510, 2517, 2545, 2602, 2607); *Petcu V.* (P); *Radu Corneliu* (2606, 2607), 2609, 2611, 2612); *Soare Mircea* (P); *Tibăr Aurel* (P; 2210, 2308, 2362, 2471, 2493, 2502, 2510, 2523, 2545, 2580, 2587, 2601, 2602, 2605, 2606, 2608, 2613, 2617, 2628, 2629); *Trifu Nicolae* (P; 2599, 2605, 2606).

ANUL XXVIII. AUGUST 1948. No. 6.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIŞOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA
PREŢUL ABONAMENTULUI ESTE 300 LEI ANUAL PENTRU PARTICULARI
ŞI 600 LEI PENTRU INSTITUŢII
PREŢUL ABONAMENTULUI PENTRU STRĂINĂTATE ESTE DE 600 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **G. IUGA:** SIRURI DE FORME TERNARE REPREZENTATE PRIN DETERMINANTI.
2. NOTA MATEMATICA 8.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 1188, 1534, 2087, 2094 2103, 2327, 2486, 2531 2569, 2612.
5. PROBLEME PROPUSE: 2645-2654.
6. INFORMATII.

„Tipografia Românească", Timişoara.
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebue să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă"

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara, conţinând articole, note, probleme propuse şi rezolvate, vor fi trimise pe adresa: Prof. V. Alaci, Politehnica, Timişoara.

Administraţia revistei aduce la cunoştinţa generală următoarele:

1. Abonamentul pe anul XXVIII (15 Martie 1948 — 15 Februarie 1949) este 300 lei pentru particulari şi 600 pentru instituţii.

2. Taxa de membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este de 200 lei.

3. Volumele I, XXIII, XXV, XXVI şi XXVII sunt epuizate. Celelalte volume broşate se găsesc de vânzare cu preţul de 300 lei fiecare. La această sumă se va adăoga 50 lei costul expediţiei. In caz că se comandă mai multe volume se va adăoga la taxa de 26 lei pentru recomandat, câte 20 lei pentru fiecare volum.

4. Se găsesc de vânzare numere izolate din colecţie chiar din volumele epuizate. Preţul unui număr este de 30 lei la care se adaogă 2 lei expediţia. Din vol. XXVII se găsesc de vânzare no. 1, 4—12.

5. Se primesc reclamaţii că se pierde revista prin poştă. Aceste reclamaţii sunt adunate în ordinea sosirii lor şi vor fi sătisfăcute la 15 Februarie 1949 când se vor vedea ce numere rămân descomplectate după legarea volumelor întregi. Orice reclamaţie de pierderea unui număr nu este luată în seamă decât la o lună dela data apariţiei acelui număr.

6. Tot ce priveşte administraţia se va adresa D-lui Prof. Gh. Th. Gheorghiu str. Voltaire Nr. 1, Timişoara I. Reclamaţiile ce necesită răspuns vor fi însoţite de o carte poştală timbrată legal.

7. Orice sumă destinată revistei se poate trimite prin CEC sub contul n-rul 85208 sau prin mandat poştal D-lui Prof. Gh. Th. Gheorghiu pe adresa de mai sus.

ANUL XXVIII — No 6. TIMISOARA, 1948 AUGUST 15

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

Preţul abonamentului este 300 lei pentru particulari şi 600 lei pentru instituţii.
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACŢIA: Prof. V. ALACI
Politehnica Timişoara.
ADMINISTRAŢIA: Prof. GH. TH. GHEORGHIU
Timişoara I, Str. Voltaire, No. 1.

ŞIRURI DE FORME TERNARE REPREZENTATE PRIN DETERMINANŢI

DE

G. IUGA

1. Determinantul de ordinul m

$$(1)\qquad P_m(x,y,z)=\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z & x & y & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & x & y & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & z & x & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & z & x & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & z & x \end{vmatrix},$$

în care toate elementele diagonalei principale sunt egale cu x şi elementele paralelelor alipite de o parte şi de alta acestei diagonale egale cu y resp. z, iar restul elementelor egale cu zero, defineşte un polinom de gradul m, omogen în raport cu cele trei variabile x, y, z şi simetric în raport cu y şi z.

Dacă desvoltăm acest determinant după elementele liniei întâia, obţinem relaţia de recurenţă

$$(2)\qquad P_m = x\,P_{m-1} - yz\,P_{m-2}.$$

In particular, avem potrivit definiţiei de mai sus cele două condiţii iniţiale

$$P_3 = x^3 - 2xyz$$
$$P_4 = x^4 - 3x^2yz + y^2z^2,$$

apoi aplicând relaţia de recurenţă, găsim

$$P_5 = x^5 - 4x^3yz + 3xy^2z^2$$
$$P_6 = x^6 - 5x^4yz + 6x^2y^2z^2 - y^3z^3$$
$$P_7 = x^7 - 6x^5yz + 10x^3y^2z^2 - 4xy^3z^3$$

şi aşa mai departe. Relaţia (2) ne mai dă, in mod retrograd, $P_2 = x^2 - yz$, $P_1 = x$, $P_0 = 1$, $P_{-1} = 0$, $P_{-2} = -(yz)^{-1}$, $P_{-3} = -x(yz)^{-2}$ şi în general $P_{-n} = -P_{n-2}(yz)^{-n+1}$.

Coeficienţii acestor polinoame sunt numere întregi, cu semne alternate, ce se obţin din triunghiul aritmetic al lui *Pascal*

$$\begin{array}{ccccccc} C_0^0 & & & & & & \\ C_1^0 & C_1^1 & & & & & \\ C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & & & & \\ C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & & & \\ C_4^0 & C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 & C_4^4 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \end{array}$$

luând termenii pe drepte la 45° spre dreapta. Putem scrie de pildă

$$P_6 = C_6^0 x^6 - C_5^1 x^4 yz + C_4^2 x^2 y^2 z^2 - C_3^3 y^3 z^3.$$

Prin metoda inducţiei complete stabilim formula

$$(3)\qquad P_m(x,y,z) = \sum_{\nu=0}^{\mu} (-1)^\nu C_{m-\nu}^{\nu}\, x^{m-2\nu} y^\nu z^\nu,$$

unde μ este egal cu $\frac{1}{2}m$ resp. $\frac{1}{2}(m-1)$, după cum m este par resp. impar.

Din (3) urmează pentru şirul de determinanţi definiţi sub (1) identitatea

$$P_m(x,y,z) \equiv P_m(x, uy, u^{-1}z),$$

unde u poate primi valori arbitrare, întocmai ca şi variabilele x, y, z.

Dacă notăm mai scurt, $P_m(1, -1, 1)$ cu s_m, atunci această cantitate reprezintă suma valorilor absolute ale coeficienţilor, iar relaţia (2) devine $s_m = s_{m-1} + s_{m-2}$.

2. Introducând în determinantul (1) în locul elementelor zero dela extremităţile diagonalei secundare valorile z resp. y

$$(4)\qquad Q_m(x,y,z)=\begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 & z \\ z & x & y & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & x & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & z & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & z & x \end{vmatrix},$$

obținem un determinant *circulant*[1], care reprezintă de asemenea un polinom omogen, adică o formă ternară.

Desvoltarea acestui determinant după elementele primei linii ne dă

$$Q_m = x\,P_{m-1} - y\,[z\,P_{m-2} + (-1)^{m-2} y^{m-1}] + (-1)^{m-1} z\,[z^{m-1} + (-1)^{m-2} y\,P_{m-2}],$$

unde parantezele mari reprezintă minorii corespunzători elementelor y resp. z din linia întâia, desvoltați după elementele coloanei întâia a acelor minori. Vom scrie, prin urmare, mai concentrat

$$Q_m = x\,P_{m-1} - 2\,y\,z\,P_{m-2} + (-1)^{m-1}(y^m + z^m),$$

iar dacă ținem seamă și de relația (2), vom avea noua relație de recurență

$$(5)\qquad Q_m = P_m - y\,z\,P_{m-2} + (-1)^{m-1}(y^m + z^m),$$

prin care forma ternară Q_m se poate calcula cu ajutorul formelor ternare P_m și P_{m-2}, ale căror desvoltări sunt date de formula (3). Găsim

$$Q_m = \sum_{\nu=0}^{\mu} (-1)^\nu C_{m-\nu}^{\nu} x^{m-2\nu} y^\nu z^\nu - y\,z \sum_{\nu_1=0}^{\mu-1} (-1)^{\nu_1} C_{m-\nu_1}^{\nu_1} x^{m-2-2\nu_1} y^{\nu_1} z^{\nu_1} + (-1)^{m-1}(y^m + z^m).$$

Aici termenii asemenea se obțin luând $\nu_1 = \nu - 1$. Dacă adoptăm simbolul $C_n^{-1} = 0$ și luăm în considerare relația numerică

$$C_{m-\nu}^{\nu} + C_{m-\nu-1}^{\nu-1} = \frac{m}{\nu} C_{m-\nu-1}^{\nu-1},$$

ajungem la desvoltarea căutată

$$(6)\qquad Q_m(x,y,z) = \sum_{\nu=0}^{\mu} (-1)^\nu \frac{m}{\nu} C_{m-\nu-1}^{\nu-1} x^{m-2\nu} y^\nu z^\nu + (-1)^{m-1}(y^m + z^m),$$

unde luăm $\frac{m}{\nu} C_{m-\nu-1}^{\nu-1}$ egal cu 1 pentru $\nu = 0$.

Dacă eliminăm din egalitatea (5) polinoamele P, putem stabili, fără greutate, relația de recurență *directă* între polinoamele Q, anume

$$(7)\qquad Q_m = x\,Q_{m-1} - y\,z\,Q_{m-2} + (-1)^{m-1}(x+y+z)(y^{m-1} + z^{m-1}).$$

Nu este lipsit de interes să prezentăm expresiile primelor polinoame ale șirului Q_m

$$Q_3 = x^3 - 3\,x\,y\,z + y^3 + z^3$$
$$Q_4 = x^4 - 4\,x^2\,y\,z + 2\,y^2 z^2 - y^4 - z^4$$
$$Q_5 = x^5 - 5\,x^3 y\,z + 5\,x\,y^2 z^2 + y^5 + z^5$$
$$Q_6 = x^6 - 6\,x^4 y\,z + 9\,x^2 y^2 z^2 - 2\,y^3 z^3 - y^6 - z^6$$
$$Q_7 = x^7 - 7\,x^5 y\,z + 14\,x^3 y^2 z^2 - 7\,x\,y^3 z^3 + y^7 + z^7.$$

Un polinom oarecare se calculează ușor dacă cunoaștem coeficienții celor două polinoame premergătoare în șir.

Când m este un număr prim, toți coeficienții termenilor mixti sunt divizibili cu m. Aceasta rezultă din formula (6).

In mod retrograd găsim $Q_2 = x^2 - 2yz - y^2 - z^2$; $Q_1 = x + y + z$; $Q_0 = 0$ și, în general, $Q_{-n} = Q_n (yz)^{-n}$.

Dacă înlocuim în determinantul (4) pe y cu $u\,y$ și pe z cu $v\,z$, atunci din (6) deducem că expresia lui Q_m rămâne neschimbată în cazul când sunt satisfăcute simultan condițiile $u\,v = 1$ și $u^m = 1$, cu consecința $v^m = 1$, adecă u și v să fie rădăcini reciproce de ordinul m ale unității. Ne vom servi de cunoscuta proprietate a determinantului circulant, că el este divizibil cu suma elementelor situate pe aceeași linie (coloană). In cazul nostru, determinantul Q_m, în baza celor arătate mai sus, este divizibil cu $x + \varepsilon\,y + \varepsilon^{-1} z$, unde ε este o rădăcină oarecare de ordinul m a unității. Rezultă imediat că polinomul Q_m se descompune într'un produs de m factori lineari

$$(8)\qquad Q_m(x,y,z) = \prod_{k=1}^{m-1} (x + \varepsilon_k y + \varepsilon_k^{-1} z),$$

unde $\varepsilon_0, \varepsilon_1 \dots, \varepsilon_{m-1}$, sunt cele m rădăcini *distincte* de ordinul m ale unității.

Constatăm că toate polinoamele Q_m sunt divizibile cu $x + y + z$, iar când m este par, și cu $x - y - z$.

Din teoria rădăcinilor unității rezultă următoarele descompuneri în factori ale polinomului Q_m.

---

[1]) *Th. Angheluță*, Curs de Algebră superioară, I, p. 91.

In particular:

$$(9)\qquad \begin{aligned} Q_m &\equiv Q_1 R_{m-1} \\ Q_{2n} &\equiv Q_2 S_{2n-2}. \end{aligned}$$

In general:

$$\begin{aligned} Q_m &\equiv Q_p T_{m-p} \\ Q_m &\equiv Q_p Q_q (x+y+z)^{-1} U_{m-p-q+1} \\ Q_m &\equiv Q_p Q_q Q_r (x+y+z)^{-2} V_{m-p-q-r+2}, \end{aligned}$$

dacă p, q, r sunt divizori primi *distincți* ai lui m, ș. a. m. d.

Polinoamele R, S, T, U, V sunt deasemenea omogene în raport cu x, y, z și simetrice în raport cu y și z, iar coeficienții lor sunt numere întregi.

Din egalitățile (7) și (9) rezultă relația de recurență pentru polinoamele R

$$R_m = x R_{m-1} - y z R_{m-2} + (-1)^m (y^m + z^m),$$

cu condițiile inițiale $R_0 = 1$ și $R_1 = x - y - z$.

Tot din teoria rădăcinilor unității mai rezultă, fără dificultate, și identitatea

$$Q_{4\mu+2}(x, y, z) \equiv Q_{2\mu+1}(x, y, z)\, Q_{2\mu+1}(x, -y, -z),$$

3. Formula (6) se poate scrie mai desvoltat

$$Q_m = x^m - \frac{m}{1} x^{m-2} yz + \frac{m}{2} C^1_{m-3} x^{m-4} y^2 z^2 -$$

$$\frac{m}{3} C^3_{m-4} x^{m-6} y^3 z^3 + \cdots + (-1)^\mu \frac{m}{\mu} C^{\mu-1}_{m-\mu-1} x^{m-2\mu} y^\mu z^\mu$$

$$+ (-1)^{m-1} (y^m + z^m).$$

Observăm imediat că subsistă identitatea

$$(10)\qquad Q'_m = m P_{m-1},$$

convenind să notăm pretutindeni în cele următoare cu un simplu accent derivata parțială în raport cu x, în loc de $\frac{\partial}{\partial x}$.

Derivând în raport cu x egalitățile (5) și (2), și ținând seamă de relația precedentă, găsim

$$m P_{m-1} = P'_m - y z P'_{m-2}$$

$$P'_m = x P'_{m-1} + P_{m-1} - y z P'_{m-2}.$$

Prin scăderea, resp. adunarea acestor două egalități, obținem

$$(11)\qquad 2 P'_m = (m+1) P_{m-1} + x P'_{m-1}$$

$$(m-1) P_{m-1} + 2 y z P'_{m-2} = x P'_{m-1}.$$

Dacă înlocuim pe m prin $m+1$ în ultima egalitate, ea se va scrie

$$2 y z P'_{m-1} = x P'_m - m P_m,$$

de unde deducem printr'o nouă derivare în raport cu x

$$2 y z P''_{m-1} = x P''_m - (m-1) P'_m.$$

Derivarea ecuației (11) ne dă

$$2 P''_m = (m+2) P'_{m-1} + x P''_{m-1}.$$

Din ultimele trei egalități rezultă ecuația diferențială

$$(12)\qquad (x^2 - 4yz) P''_m + 3x P'_m - m(m+2) P_m = 0,$$

care reprezintă un caz particular al ecuației lui *Gegenbauer*. Conchidem că, dacă considerăm numai pe x variabil, iar pe y și z constante parametrice, polinoamele P sunt *ortogonale* pentru $m > 0$. In adevăr, ecuația premergătoare se poate pune sub forma

$$[(4yz - x^2)^{\frac{3}{2}} P'_m]' = -m(m+2)(4yz - x^2)^{\frac{1}{2}} P_m,$$

de unde se verifică ușor că

$$\int_{-2\sqrt{yz}}^{+2\sqrt{yz}} (4yz - x^2)^{\frac{1}{2}} x^s P_m \, dx = 0 \text{ pentru } s = 0, 1, 2, \ldots, m-1,$$

sau

$$\int_{-2\sqrt{yz}}^{+2\sqrt{yz}} (4yz - x^2)^{\frac{1}{2}} P_m \cdot P_n \, dx = 0 \text{ pentru } m \neq n.$$

Din proprietatea de ortogonalitate rezultă că polinomul P_m în x are m rădăcini reale și distincte, cuprinse în intervalul $(-2\sqrt{yz}, +2\sqrt{yz})$, dacă presupunem că produsul yz reprezintă o valoare pozitivă, adică y și z sunt sau cantități reale și de același semn, sau mărimi complexe conjugate.

Cum polinomul $P_m(x, y, z)$ este identic cu produsul $(yz)^{\frac{m}{2}} P_m(w_1, 1, 1)$, unde am luat $w = x(yz)^{-\frac{1}{2}}$ rezultă că rădăcinile polinomului în w sunt proporționale cu rădăcinile polinomului în x, amândouă polinoamele având aceiași coeficienți numerici. Vom avea, de pildă:

$$\begin{aligned} P_6(w, 1, 1) &= w^6 - 5w^4 + 6w^2 - 1 \\ P_7(w, 1, 1) &= w^7 - 6w^5 + 10w^3 - 4w \\ P_8(w, 1, 1) &= w^8 - 7w^6 + 15w^4 - 10w^2 + 1. \end{aligned}$$

Se observă că polinoamele de grad par au termenul constant egal cu $+1$ sau -1, deci n'au

rădăcini nule, iar cele de grad impar câte una singură. Polinoamele de grad par (resp. impar) sunt funcţiuni pare (resp. impare) de w, prin urmare rădăcinile lor sunt, două câte două, egale şi de semn contrar, la polinoamele de grad impar adăogându-se şi rădăcina zero. Rădăcinile w sunt cuprinse în intervalul $(-2, +2)$.

Insemnând cu $\pm w_1, \pm w_2, \ldots, \pm w_\mu$ rădăcinile diferite de zero, avem următoarele descompuneri în factori

$$P_{2\mu}(w, 1, 1) = \prod_{k=1}^{\mu}(w^2 - w_k^2), \text{ sau}$$

$$P_{2\mu}(x, y, z) = \prod_{k=1}^{\mu}(x^2 - w_k^2 y z). \tag{13}$$

La polinoamele de grad impar se mai adaogă factorul w resp. x.

Vom reveni asupra acestor produse mai târziu.

Observare Polinoamele $P_m(w, 1, 1)$ mai pot fi generalizate şi prin desvoltarea, după puterile crescătoare ale lui α, a câtului

$$\frac{1}{1 - w\alpha + \alpha^2} = 1 + w\alpha + (w^2 - 1)\alpha^2 + (w^3 - 2w)\alpha^3 + \cdots$$

4. Ecuaţia (12), fiind valabilă pentru orice valori întregi ale indicelui m, se mai poate scrie

$$(x^2 - 4yz)P''_{m-1} + 3xP'_{m-1} - (m^2 - 1)P_{m-1} = 0.$$

Ţinând seamă de relaţia (10), ea se transformă apoi în

$$(x^2 - 4yz)Q'''_m + 3xQ''_m - (m^2 - 1)Q'_m = 0$$

sau mai departe

$$[(x^2 - 4yz)Q''_m]' + [xQ'_m]' - m^2 Q'_m = 0.$$

Integrând această ultimă ecuaţie, primim

$$(x^2 - 4yz)Q''_m + xQ'_m - m^2 Q_m = F(y, z),$$

rămânând să determinăm funcţiunea arbitrară de integrare în aşa fel, ca polinomul (4) să satisfacă în mod identic această ecuaţie diferenţială de ordinul al doilea. In acest scop, este suficient să determinăm valoarea particulară $F(y, z)$, atribuind în ecuaţia premergătoare variabilei x valoarea zero.

In cazul $m = 2\mu + 1$, ultimii termeni ai polinomului Q_m sunt

$$(-1)^{\mu-1} m\frac{\mu(\mu+1)}{6} x^3 (yz)^{\mu-1} + (-1)^\mu mx(yz)^\mu + y^m + z^m,$$

deci Q''_m se anulează pentru $x = 0$, prin urmare $F(y, z) = -m^2(y^m + z^m)$.

In cazul $m = 2\mu$, ultimii termeni ai polinomului considerat sunt

$$(-1)^{\mu-1}\mu^2 x^2 (yz)^{\mu-1} + (-1)^\mu 2(yz)^\mu - y^m - z^m,$$

deci pentru $x=0$ avem $Q''_m = (-1)^{\mu-1} 2\mu^2 (yz)^{\mu-1}$. Deducem că, în acest caz, $F(y, z) = m^2(y^m + z^m)$.

Concluziunea este că, în general, polinomul Q_m este o integrală a ecuaţiei diferenţiale cu membrul al doilea

$$(x^2 - 4yz)Q''_m + xQ'_m - m^2 Q_m = (-1)^m m^2 (y^m + z^m).$$

Pentru m impar şi $z = -y$, această ecuaţie devine omogenă.

5. Atribuind variabilelor x, y, z, presupuse de astă dată reale, rolul de coordonate carteziene dreptunghiulare, ne propunem să studiem structura suprafeţelor reprezentate prin ecuaţiile

$$P_m(x, y, z) = 0 \quad \text{şi} \quad Q_m(x, y, z) = 0. \tag{14}$$

Orice formă ternară egalată cu zero reprezintă o suprafaţă conică cu vârful aşezat în originea O a sistemului de coordonate.

Descompunerea în factori (13) ne arată că suprafeţele $P_{2\mu} = 0$ sunt alcătuite din μ conuri distincte de ordinul al doilea, cu vârful comun aşezat în O. Punând x const., obţinem ca directoare pentru oricare dintre aceste cuadrice câte o iperbolă echilateră, cu centrul pe axa x şi cu asimptote parale axelor y şi z. Pentru $y = \text{const.}$ sau $z = \text{const.}$ directoarele aceloraşi conuri parţiale sunt parabole, a căror aşezare în spaţiu se stabileşte cu uşurinţă, aşa că nu este nevoe să insistăm în acest sens.

Suprafeţele $P_{2\mu+1} = 0$ se descompun la fel, numai că la cele μ cuadrice, similare ca formă celor de mai sus, se mai adaogă, pentru completarea suprafeţei, planul $x = 0$.

Ecuaţia $Q_{2\mu+1}(x, y, z) = 0$ ne dă o suprafaţă conică compusă din planul $x + y + z = 0$ şi μ generatoare izolate, căci factorii cu coeficienţi imaginari din membrul al doilea al egalităţii (8) reprezintă planuri imaginare, conjugate două câte două, cari dau deci drepte de intersecţie reale. Conul $Q_{2\mu}(x, y, z) = 0$ se descompune în două planuri reale, $x + y + z = 0$ şi $x - y - z = 0$, şi în $\mu - 1$ generatoare izolate. Se verifică uşor că toate genera-

toarele izolate, mai sus menţionate, sunt situate în planul $y = z$.

Ecuaţia $Q_{2\mu+1}(x, y, c) = 0$ ne dă secţiunea conului cu planul $z = c$, adică o curbă algebrică de ordinul $2\mu + 1$, alcătuită din dreapta $x+y+z=0$, $z = c$ şi din cele μ puncte izolate obţinute prin intersecţia generatoarelor izolate cu planul $z = c$. Curba $Q_{2\mu}(x, y, c) = 0$ este formată din dreptele $x + y + z = 0$, $z = c$ şi $x - y - z = 0$, $z = c$, completate cu $\mu - 1$ puncte izolate situate pe dreapta $y = z = c$.

Curbele $Q_m(x, y, c) = 0$ şi $Q_m(x, c, z) = 0$ au structură identică, dar aşezări deosebite în spaţiu. Curba $Q_m(c, y, z) = 0$ diferă de ele şi ca structură.

6. Ne propunem să găsim soluţiile în numere întregi ale ecuaţiilor (14). Polinoamele fiind omogene, este suficient să cercetăm soluţiile *simple*, adecă cele cu elemente prime între ele, căci soluţiile *amplificate* se subînţeleg.

Incepem cu ecuaţia $P_m(x, y, z) = 0$. Soluţiile sale *necomplete*, adecă cu elemente, în parte sau în totalitatea lor nule sunt evidente, anume (0, 0, 1), (0, 1, 0), precum şi în plus, pentru cazurile $m=2\mu+1$, soluţiile întregi $(0, y, z)$, cu două elemente arbitrare. In toate cazurile, amplificarea cu zero dă soluţia improprie (0, 0, 0).

Trecând la cercetarea soluţiilor *complete*, vedem din structura polinomului P că elementele y şi z trebue să fie considerate prime între ele, căci orice divizor comun al lor ar urma să dividă şi pe x. Polinomul $P_{2\mu}(w, 1, 1)$ fiind funcţiune pară de w, ecuaţia corespunzătoare se va scrie, dacă luăm $w^2 = W$

$$W^\mu - (2\mu-1)W^{\mu-1} + \cdots + (-1)^{\mu-1}C^2_{\mu+1}W + (-1)^\mu = 0.$$

Am văzut că rădăcinile în w sunt toate reale în ipoteza $yz > 0$, pe care o considerăm valabilă în tot cursul cercetărilor noastre, deoarece în ipoteza contrară toţi termenii polinomului ar avea acelaş semn şi în consecinţă suma lor nu s'ar putea anula. Urmează că W, în aceste condiţii, este pozitiv

Având $W = \frac{x^2}{yz}$, problema noastră de analiză nedeterminată cere ca această mărime să fie raţională, dar ecuaţia de mai sus ne arată că ea nu admite alte rădăcini raţionale şi pozitive, decât cel mult pe 1,

Din relaţia de recurenţă (2), aplicată succesiv diverselor valori numerice $P_m(1, 1, 1)$, pornind dela $P_0 = P_1 = 1$, deducem că aceste valori sunt nule numai pentru $m = 3r - 1$. Cum însă în cazul de faţă m este par, luând $r = 2n + 1$, găsim că numai polinoamele de gradul $6n + 2$ admit rădăcinile $w = \pm 1$ şi în consecinţă soluţiile complete şi simple, sunt

$$(15) \qquad (pq, p^2, p^2),$$

unde numerele întregi p şi q, arbitrare, însă prime între ele, pot fi de acelaş semn sau de semne contrare. La acestea se mai adaogă soluţiile simple obţinute din cele precedente prin amplificarea lor cu -1, adică soluţiile *opuse*.

Termenii polinomului $P_{2\mu+1}(w, 1, 1)$ au factorul comun w, a cărui anulare duce la soluţiile necomplete $(0, y, z)$ menţionate mai sus. După înlăturarea acestui factor, polinomul rămas se poate pune sub forma

$$W^\mu - 2\mu W^{\mu-1} + \cdots + (-1)^\mu(\mu + 1).$$

Primul termen având coeficientul redus la unitate, eventualele rădăcini întregi şi pozitive trebuesc căutate printre divizorii lui $\mu + 1$, cum însă rădăcinile w sunt cuprinse între -2 şi $+2$ urmează că $W < 4$, deci valorile admisibile pentru W sunt 1, 2 şi 3, iar pentru w valorile ± 1, $\pm\sqrt{2}$ şi $\pm\sqrt{3}$.

Mai sus am stabilit că $P_{3r-1}(1, 1, 1)$ este egal cu zero şi ţinând seamă că aici m este impar, urmează că polinoamele de gradul $m = 6n - 1$ încă admit soluţiile simple (15).

Formula (2) ne mai arată că valorile numerice $P_m(\sqrt{2}, 1, 1)$ sunt nule numai pentru $m=4n-1$, iar valorile $P_m(\sqrt{3}, 1, 1)$ numai pentru $m=6n-1$. Având în vedere că $x^2 = W yz$, conchidem că polinoamele P_{4n-1} admit soluţiile simple

$$(16) \qquad (2pq, p^2, 2q^2) \text{ şi } (2pq, 2p^2, q^2)$$

şi că polinoamele P_{6n-1} admit soluţiile simple

$$(17) \qquad (3pq, p^2, 3q^2) \text{ şi } (3pq, 3p^2, q^2),$$

unde p şi q îndeplinesc condiţiile necesare ca soluţiile să fie în adevăr simple, condiţii uşor de stabilit. In rezumat, putem enunţa că

polinoamele P_{6n+2} admit soluţiile (15)
„ P_{4n-1} „ „ (16)
„ P_{6n-1} „ „ (15) şi (17)
„ P_{12n-1} „ „ (15), (16) şi (17),
la cari se mai adaogă de fiecare dată şi soluţiile opuse.

Polinoamele P_m, cari nu se încadrează în nici una din categoriile de mai sus, nu admit soluţii complete.

Din formula (13) rezultă că polinoamele cu soluţii complete conţin unul, resp. doi dintre factorii $x^2 - yz$, $x^2 - 2yz$, $x^2 - 3yz$, resp. toţi trei.

7. Trecem la rezolvirea în numere întregi a ecuaţiei $Q_m(x, y, z) = 0$. Soluţiile necomplete sunt şi în acest caz uşor de stabilit. Pentru oricare valoare a lui m vom avea soluţiile simple $(0, 1, -1)$, $(1, 0, -1)$, $(1, -1, 0)$, la cari se mai adaogă $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$ pentru valorile pare ale lui m, precum şi $(0, 1, 1)$ pentru m multiplu de 4. Evident că simultan cu soluţiile precedente sunt valabile şi soluţiile opuse acestora. Menţionăm de asemenea soluţia improprie $(0, 0, 0)$.

In ceeace priveşte soluţiile complete remarcăm în primul rând că pentru orice valoare a lui m, pară sau impară, polinomul Q admite factorul $x + y + z$. Aşadară, orice combinaţie de trei numere întregi, a căror sumă anulează acest factor, constitue o soluţie cu două elemente arbitrare, de pildă $(x, y, -x - y)$. In cazul când m este par, mai există şi soluţiile $(y + z, y, z)$ corespunzătoare celui de al doilea factor linear real $x - y - z$, al produsului din dreapta egalităţii (8).

Oricare dintre factorii cu coeficienţi imaginari ai aceluiaş produs (8) se poate scrie

(18) $x + (\cos\theta + i\sin\theta)y + (\cos\theta - i\sin\theta)z,$

unde rădăcinile respective ale unităţii sunt exprimate în forma lor trigonometrică. Anularea factorului de mai sus conduce la ecuaţiile

$$x + \cos\theta(y + z) = 0 \text{ şi } \sin\theta(y - z) = 0.$$

Cazurile $\theta = 0$ şi $\theta = \pi$ s'au discutat mai sus, cu prilejul anulării factorilor cu coeficienţi reali. Cazul $\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$ dă $x = 0$ şi $y = z$, deci soluţii necomplete. Pentru orice altă valoare a arcului θ urmează $y = z = \pm 1$ şi $x = \mp 2\cos\theta$, ştiut fiind că pentru soluţii simple y şi z sunt prime între ele. Vedem că valoarea absolută a lui x se prezintă inferioară lui 2, deci egală cu 1. Conchidem că singurele valori admisibile pentru $\cos\theta$ sunt $\mp\frac{1}{2}$, adecă $\theta = \pm\frac{2}{3}\pi$ resp. $\pm\frac{1}{3}$, ceeace denotă că numai în cazurile particulare, când factorul imaginar (8) conţine rădăcini cubice resp. de ordinul al şaselea ale unităţii pozitive, există soluţiile simple $(1, 1, 1)$ resp. $(1, 1, 1)$ şi $(1, -1, -1)$, cari sunt distincte de soluţiile obţinute prin anularea factorilor reali. Condiţiunile acestea sunt împlinite numai dacă m este multiplu de 3 resp. de 6. Se înţelege dela sine că şi de astădată sunt valabile şi soluţiile opuse.

In rezumat, conchidem:

Polinoamele Q_{6m+3} admit, pe lângă soluţiile complete $(x, y, -x - y)$, singura soluţie simplă $(1, 1, 1)$ şi opusa acesteia. Polinoamele Q_{6m} admit, pe lângă soluţiile complete $(x, y, -x - y)$ şi $(y + z, y, z)$, singurele soluţii simple $(1, 1, 1)$, $(1, -1, -1)$ şi opusele acestora. Celelalte polinoame, al căror grad nu este multiplu de 3, admit numai soluţiile complete rezultate din anularea factorilor lineari reali, existenţi în produsul corespunzător (8).

NOTA MATEMATICA

8. — *O simplificare.*

Domnul profesor *V. Alaci* în articolul *„O clasă specială de forme nedeterminate“* partea II, publicat în R. M. T. vol. XXV. pag. 87, stabileşte între altele următoarele:

Fiind dată expresia

$$(1) \qquad G = \frac{f(a, b, c, B, C)}{\varphi(a, b, c, B, C)}$$

în care f şi φ sunt funcţii de elementele unui triunghiu oarecare ABC, *atunci pentru un triunghiu echilateral, adică* pentru $b = a$, $c = a$ şi $C = B$ şi dacă

$$f(a, a, a, B, B) = 0, \quad \varphi(a, a, a, B, B) = 0,$$

adevărata valoare a expresiei (1) *este*

$$(2)\ G = \left[\frac{\begin{vmatrix} f'_b & f'_c & f'_C \\ \sin(B+C) & 0 & b\cos(B+C) \\ 0 & \sin(B+C) & c\cos(B+C) - a\cos C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi'_b & \varphi'_c & \varphi'_C \\ \sin(B+C) & 0 & b\cos(B+C) \\ 0 & \sin(B+C) & c\cos(B+C) - a\cos C \end{vmatrix}} \right]_{\substack{b=a \\ c=a \\ C=B}}$$

Imi propun să dau o expresie mai simplă pentru G din relaţia (2). Intr'adevăr în liniile 2 şi 3 ale determinanţilor din expresia (2) putem face direct înlocuirile $b=a$, $c=a$ şi C=B. Ţinând însă seamă că triunghiul este echilateral şi deci $B=60^0$ şi $\sin 2B=\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos B=-\frac{1}{2}$, numărătorul membrului al doilea din relaţia (2) devine

$$\left|\begin{matrix} f'_b & f'_c & f'_C \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & -\frac{1}{2}a \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -a \end{matrix}\right|_{\substack{b=a\\c=a\\C=B}} = \left[\frac{a\sqrt{3}}{4}f'_b+\frac{a\sqrt{3}}{2}f'_c+\frac{3}{4}f'_C\right]_{\substack{b=a\\c=a\\C=B}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[a\sqrt{3}\,f'_b+2a\sqrt{3}\,f'_c+3f'_c\right]_{\substack{b=a\\c=a\\C=B}}.$$

Analog obţinem pentru numitorul membrului al doilea al relaţiei (2)

$$\frac{1}{4}\left[a\sqrt{3}\,\varphi'_b+2a\sqrt{3}\,\varphi'_c+3\varphi'_C\right]_{\substack{b=a\\c=a\\C=B}}$$

şi astfel relaţia (2) devine

$$(3)\qquad G=\left[\frac{a\sqrt{3}\,f'_b+2a\sqrt{3}\,f'_c+3f'_C}{a\sqrt{3}\,\varphi'_b+2a\sqrt{3}\,\varphi'_c+3\varphi'_C}\right]_{\substack{b=a\\c=a\\C=B}}$$

care este o formă mai simplă a relaţiei (2).

Observare. Dacă funcţiile f şi φ verifică relaţiile

$$(4)\qquad \begin{cases} [f'_b]_{\substack{b=a\\c=a\\C=B}} = [f'_c]_{\substack{b=a\\c=a\\C=B}} \\ [\varphi'_b]_{\substack{b=a\\c=a\\C=B}} = [\varphi'_c]_{\substack{b=a\\c=a\\C=B}} \end{cases}$$

relaţia (3) ia forma şi mai simplă

$$G=\left[\frac{a\sqrt{3}\,f'_b+f'_C}{a\sqrt{3}\,\varphi'_b+\varphi'_C}\right]_{\substack{b=a\\c=a\\C=B}}.$$

EMERIC DEUTSCH

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul LIII, N-rul 11, Iulie 1948. † Profesorul inginer *Cezar D. Orăşanu*, de *Cr. Mateescu*. Triunghiuri întregi, triunghiuri raţionale şi total raţionale, de *N. Ciorănescu*. Raport pentru decernarea premiului „*Gh. Ţiţeica*", de *S. Gheorghiu* şi *N. N. Mihăileanu*. Note matematice. Chestiuni de examen. Probleme rezolvate şi propuse.

2. *Bulletin de Science et technique de la Polytechnique de Timişoara*, Tome 13, Fasc. 1. Une classe de fonctions simplement-discontinues, par *V. Alaci*. Solutions mesurables de certaines équations fonctionnelles linéaires à plusieurs variables, par *M. Ghermănescu*. La transformation par centres radicaux, par *E. Arghiriade*. Sur les tensions fictives équivalentes aux actions pondéromotrices des champs physiques, par *Remus Răduleţ*. Zur theorie der Oxy-Reduktionsmethoden der Mass-analyse, von *I. G. Murgulescu*. Étude, projet et construction d'un groupe redresseur de haute tension pour travaux de laborateur, par Ing. *Constantin Honae*. Cultura Coc-saghizului în Romănia, de *Gh. Văluţă*.

Comptes-rendus. Asupra hidrogerăii petrolului de Dr. Ing. *C. Cândea*. Planificarea semînţelor selecţionate în regiunea Banatului şi a judeţului Arad, de *A. Potlog* şi *Gh. Văluţă*.

Comptes rendus des livres réçus, et *des seances de la Société Sciantifique de la Polytechnique de Timişoara*.

3. *J. G. Murgulescu:* Zur theorie der Oxi-Reduktionsmethoden der Mass-analyse.

4. *Mihail Şt. Botez*. Studiul Geometriei descriptive acum o sută de ani în România.

5. *Mihail Şt. Botez*. Contribuţie pentru o simplificare a a sistemului de proecţie *Monge* într'un caz special.

6. *Mihail Şt. Botez*, † *Nicolae Abramescu*.

6. *Mihail Şt. Botez*. Sur une nouvelle Géométrie côtée.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1188. — *Să se demonstreze că cercul circumscris unui triunghiu este locul geometric al punctelor ale căror proecţii pe înălţimele triunghiului, dau un triunghiu asemenea celui de referinţă.*

C-TIN P. LATEA

Soluţie. Fie M un punct oare care în planul triunghiului ABC şi M_a, M_b, M_c proecţiile lui M pe înălţimele AH, BH, CH ale triunghiului. Patrulaterul MM_bM_aH având unghiurile HM_aM şi HM_bM drepte, este inscriptibil în cercul de diametru MH. La fel se arată că şi M_c se află pe acest cerc. Fie B' piciorul înălţimei BB'. În patrulaterul inscriptibil $M_cHM_aM_b$ avem

$$\sphericalangle M_cM_aM_b=\sphericalangle M_cHM_b.$$

Dar ultimul unghiu este egal cu unghiul A deci şi unghiul $M_cM_aM_b$ este egal cu A. La fel se arată că celelalte unghiuri ale triunghiului $M_aM_bM_c$ sunt egale respectiv cu unghiurile B şi C. Triunghiurile ABC şi $M_aM_bM_c$ sunt deci asemeni *oricare ar fi punctul* M *în plan.*

Notă. 1° Au dat această soluție D-nii: *Apostol V. Radu, Ionescu D-tru* (Liceul militar, Târgoviște); *Păslașiu V. Vasile* (Lic. „Codreanu". Bârlad); *Șubac Gh. Ion* (Liceul militar, Târgoviște); *Săli Mihai* (P. T.) și *Țițeica Ion Ilie* (Liceul „Mănăstirea Dealului").

2° S'au mărginit la demonstrarea proprietății așa cum este dată în enunțul problemei, d-nii: *Budeanu C-tin* (București); *Ceaușescu Vasile* (Călărași); *Mehedinți D. D-tru* (Lic. militar, Tg.-Mureș); *Postelnicescu C. M.* (Lic. milit. „Mănăstirea Dealului) și S-lt. *Sâmbotin Gh.*

3° D-l *N. N. Mihăileanu* a trimis la 29 Aprilie, 1933, când era student București ,următoarea generalizare: *Proecțiile de același unghiu φ și de același senz ale unui punct* M *pe cevienele* AP, BP, CP *ale unui triunghiu* ABC, *sunt vârfurile unui triunghiu* $M_a M_b M_c$ *asemenea cu triunghiul antipodar al punctului* P.

În adevăr poligonul $M M_a M_b M_c P$ este inscriptibil pentru că

$$\sphericalangle M M_b P = \sphericalangle M M_a P = \varphi \text{ etc.}$$

De aici deduce

$$\sphericalangle M_b M_a M_c = \sphericalangle M_b P M_c = \pi - B P C = \sphericalangle P A_p C$$

unde A_p este intersecția perpendicularelor în B și C pe BP și PC. Relația precedentă demonstrează proprietatea

G-l. Gh. B.

Problema 1534. — Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a-x} = y + y^2 z, \\ \dfrac{1}{b-y} = z + z^2 x, \\ \dfrac{1}{c-z} = x + x^2 y. \end{cases}$$

ADRIAN POPESCU

Soluția. Prima ecuație se mai poate scrie

$$2 + \frac{1}{y+y^2 z} = \frac{(1+xy)(1+yz) - yz}{y(1+yz)} =$$

$$\frac{1+xy}{y} - \frac{z}{1+yz} = a,$$

încât dacă facem substituția

$$(1) \qquad \frac{1+xy}{y} = u, \quad \frac{1+yz}{z} = v, \quad \frac{1+zx}{z} = w,$$

sistemul dat se reduce la sistemul

$$u - \frac{1}{v} = a, \quad v - \frac{1}{w} = b, \quad w - \frac{1}{u} = c.$$

Din prima și a treia ecuație scoatem

$$(2) \qquad v = \frac{1}{u-a}, \quad w = \frac{1}{u} + c$$

valori cari introduse în a doua ecuație ne dau, după ce facem toate calculele,

$$(bc+1)u^2 - (abc + a - b + c)u - (ab+1) = 0,$$

de unde

$$(3) \qquad u = \frac{abc + a - b + c \pm \sqrt{(abc+a+b+c)^2 + 4}}{2(bc+1)}$$

valori cari introduse în (2) ne dau

$$(4) \begin{cases} v = \dfrac{abc + a + b - c \pm \sqrt{(abc+a+b+c)^2+4}}{2(ca+1)} \\ w = \dfrac{abc - a + b + c \pm \sqrt{(abc+a+b+c)^2+4}}{2(ab+1)} \end{cases}$$

unde semnele se corespund.

Cunoscând valorile lui u, v, w, sistemul (1) ne va da pe x, y, z. In adevăr, acest sistem se mai scrie

$$x + \frac{1}{y} = u, \quad y + \frac{1}{z} = v, \quad z + \frac{1}{x} = w;$$

din prima și a treia ecuație scoatem

$$y = \frac{1}{u-x}, \qquad z = w - \frac{1}{x}$$

valori cari introduse în a doua ecuație a sistemului ne dă

$$(vw-1)x^2 + (u - v + w - uvw)x + uv - 1 = 0$$

și de unde

$$\begin{cases} x = \dfrac{uvw - u + v - w \pm \sqrt{(uvw-u-v-w)^2 - 4}}{2(vw-1)}, \\ y = \dfrac{uvw - u - v + w \pm \sqrt{(uvw-u-v-w)^2 - 4}}{2(wu-1)}, \\ z = \dfrac{uvw + u - v - w \pm \sqrt{(uvw-u-v-w)^2 - 4}}{2(uv-1)}, \end{cases}$$

u, v, w, având valorile date de (3) și (4). Sistemul admite în total patru grupe de soluții

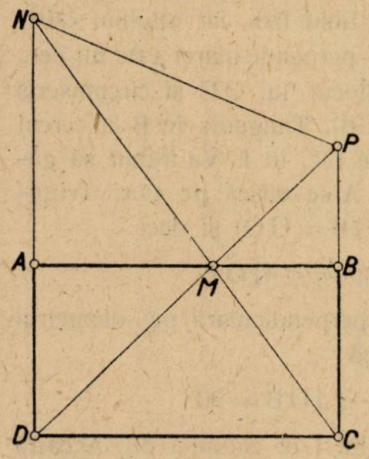
Gh. Th. Gh.

Problema 2087. — *Pe latura* AB *a dreptunghiului* ABCD *se ia un punct variabil* M. *Dreptele* CM *și* DM *intersectează respectiv laturile* AD *și* BC *în punctele* N *și* P. *Să se demonstreze că aria*

triunghiului MNP *este constantă şi egală cu jumătatea ariei dreptunghiului.*

EUG. WEGENER

Soluţia. Fie $AD=a$, $AB=b$, $AM=x$. Din asemănarea perechilor de triunghiuri (AMN, MBC) şi (BMP, AMD) scoatem



$$\frac{AN}{b}=\frac{x}{a-x};$$

$$AN=\frac{bx}{a-x}$$

$$\frac{BP}{b}=\frac{a-x}{x};$$

$$BP=\frac{b(a-x)}{x}.$$

Avem

$$S_{MNP}=S_{ABPN}-(S_{AMN}+S_{BMP}).$$

Dar

$$S_{ABPN}=\frac{a(AN+BP)}{2}=\frac{ab}{2}\,\frac{(a-x)^2+x^2}{x(a-x)},$$

$$S_{AMN}=\frac{AM\cdot AN}{2}=\frac{bx^2}{2(a-x)},$$

$$S_{BMP}=\frac{MB\cdot BP}{2}=\frac{b(a-x)^2}{2x};$$

$$S_{AMN}+S_{BMP}=\frac{b[x^3+(a-x)^3]}{2x(a-x)}=\frac{ab(a^2-3ax+3x^2)}{2x(a-x)},$$

încât

$$S_{MNP}=\frac{ab}{2}\cdot\frac{(a-x)^2+x^2-(a^2-3ax+3x^2)}{x(a-x)}=$$

$$\frac{ab}{2}=\frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Au rezolvat problema geometric D-nii: *Deutsch Em.* (P. T.) şi *Novac I. I.* (P. T.).

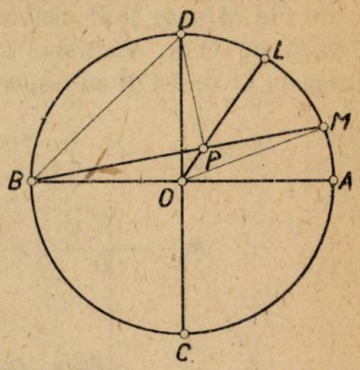
Au rezolvat problema analitic D-nii: *Deutsch Em.* (P. T.), *Giurconiu M.* (P. T.), *Popescu D-tru* (P. T.) şi *Turbuţiu Gh.* P. T.).

Gh. Th. Gh.

Problema 2094. — *Se dă cercul* O, *doi diametri* AB, CD *perpendiculari şi un punct* M *pe cerc. Fie* P *intersecţia lui* MB *cu bisectoarea interioară a unghiului* DOM. *Se cere locul lui* P *când* M *variază pe cerc.*

MATEI WEBER

Soluţia geometrică. Bisectoarea unghiului DOM taie cercul în L şi fie $\sphericalangle AOM=2\alpha$. Avem $\sphericalangle BPO=\sphericalangle LOA-\sphericalangle MBO=\left[2\alpha+\frac{1}{2}(90^0-2\alpha)\right]-\alpha=45^0$, deoarece: $\sphericalangle MBO=\frac{1}{2}$ arc$AM=\frac{1}{2}\sphericalangle AOM=\alpha$. În baza demonstraţiei de mai sus $\sphericalangle BPO=\sphericalangle BDO$ adică patrulaterul BOPD este inscriptibil şi deci $\sphericalangle BPD=\sphericalangle BOD=90^0$. Cum punctele B şi D sunt fixe, rezultă că locul lui P va fi un cerc de diametru BD.



Soluţia analitică Alegem pe AB drept axă Ox şi pe DC ca axă Oy, şi fie a raza cercului. Cum BM face cu Ox unghiul α, ecuaţia ei va fi

$$y=\operatorname{tg}\alpha(x+a).$$

Tot aşa cum OL face cu Ox unghiul $45^0+\alpha$ calculat mai sus, ecuaţia dreptei OL este

$$y=[\operatorname{tg}(45^0+\alpha)]x;\quad y=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}x.$$

Eliminând pe x între aceste două ecuaţii se găseşte că, locul punctului P este cercul

$$x^2+y^2+ax-ay=0.$$

Observare. Inversând punctele C cu D se obţine drept loc simetricul cercului precedent faţă de axa Ox.

A rezolvat problema analitic de d-l: *Deutsch Em.* (P.T.).

Gh. Th. Gh.

Problema 2103. — *In raport cu un sistem de axe rectangulare, se consideră în plan punctele* A(*a*, 0), B(0, *b*) *şi* C(*a*, *b*). *Fie* M *un punct variabil pe dreapta* BC. *Se cere:*

1°. *Locul piciorului perpendicularei din* C *pe dreapta* OM.

2°. *Locul intersecţiei tangentei în* B *la curba loc dela* 1° *cu dreapta* OC, *când* A *se mişcă pe axa* O *x.*

3°. *Infăşurătoarea tangentei în* B *la curba loc de la* 1°, *când punctul* B *se mişcă pe* O *y.*

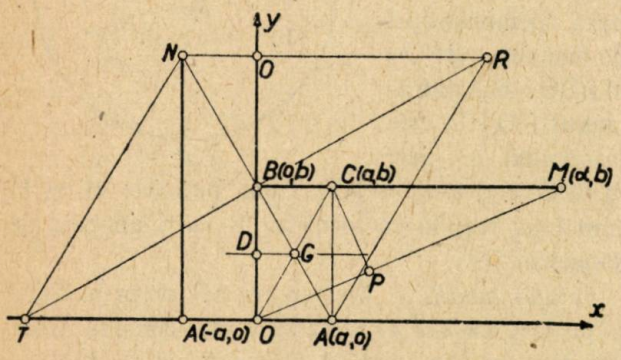
EUGEN WEGENER

Soluţie dată de D-l Prof. *Loziciu I.* (Caransebeş).

I. *Soluţie analitică.*

1°. Fie $M(\alpha, b)$ şi P piciorul perpendicularei din $C(a, b)$ pe OM. Va trebui să găsim locul lui P. Dreptele OM şi CP au respectiv ecuaţiile:

(1) $y = \frac{b}{\alpha} x$ (2) $y - b = \frac{\alpha}{b}(x - a)$.



Eliminăm parametrul α între ecuaţiile (1) şi (2) şi găsim ecuaţia locului:

(3) $x^2 + y^2 - a x - b y = 0$,

un cerc cu centrul în $G\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ şi raza $\frac{1}{2}$OC.

2°. Cum cercul (3) trece prin B, ecuaţia tangentei în B la cercul (3) este:

(4) $b y - a x - b^2 = 0$,

iar ecuaţia dreptei OC este:

(5) $y = \frac{b}{a} x$.

Când A se mişcă pe Ox, locul intersecţiei acestor drepte îl găsim eliminând pe a între (4) şi (5). Găsim ecuaţia locului:

$$-x^2 + \left(y - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{4} b^2 = 0 \text{ sau:}$$

(6) $$\frac{\left(y - \frac{1}{2} b\right)^2}{\left(\frac{1}{2} b\right)^2} - \frac{x^2}{\left(\frac{1}{2} b\right)^2} = 1,$$

o iperbolă echilateră cu centru în $D\left(0, \frac{1}{2} b\right)$, adică în mijlocul lui OB, (de axă transversă OB.).

3°. Când B se mişcă pe Oy există o familie de tangente familiilor de cercuri circumscrise dreptunghiului OACB, tangente, definite de ecuaţia (4) în care b este parametrul variabil.

Derivăm ecuaţia (4) în raport cu b şi obţinem:

(7) $y - 2b = 0$.

Eliminând pe b între ecuaţiile (4) şi (7) obţinem înfăşurătoarea de ecuaţie:

(8) $y^2 = 4ax$,

care este o parabolă tangentă în origină axei Oy, de parametru $2a$ şi cu focarul în punctul A.

II. *Soluţie geometrică.*

1°. Punctele O şi C fiind fixe, iar unghiul OPC drept, locul piciorului perpendicularei este un cerc cu centrul în G, mijlocul lui OC şi circumscris dreptunghiului (OACB). Tangenta în B la cercul (OACB) întâlneşte pe OC în I. Va trebui să găsim locul lui I când A se mişcă pe Ox. Triunghiul BGO isoscel (GB = GO) şi deci

$$\sphericalangle GBO = \sphericalangle GOB.$$

Tangenta în B fiind perpendiculară pe diametrul BA al cercului, rezultă:

(9) $\sphericalangle IBO - \sphericalangle IOB = 90°$.

Se cere deci locul lui I în condiţia (9). Această problemă este însă cunoscută. (Problema 65 pag. 110 din culegere de probleme de geometrie de *G. Ţiţeica*). Locul lui I este o iperbolă echilateră de axă transversă OB.

3°. Fie T punctul de intersecţie al tangentei în B cu axa Ox şi fie punctul R astfel ca (10) TB = BR. Fie apoi N simetricul lui A faţă de B. Patrulaterul ARNT este un romb având diagonalele perpendiculare şi împărţindu-se în părţi egale, deci (11) RA = RN.

Fie Q punctul de intersecţiei al axe Oy cu RN, latura rombului. Triunghiurile BQN şi OAB sunt egale. Rezultă că punctul N se găseşte pe perpendiculara ridicată pe Ox în punctul A' (OA' = OA = a).

Relaţia (11) ne demonstrează deci că punctul R este la egală depărtare de punctul A fix şi de perpendiculara A'N fixă. Locul lui R este o parabolă tangentă în O axei Oy. Ea are focarul în A şi ca directoare perpendiculara în A' pe Ox.

Dreapta BR este tangenta în R la această parabolă şi deci înfăşurătoarea ei este însăşi această curbă.

Au rezolvat problema analitic D-nii *Bitang Alex., Chiriac I. Const., Colesnic D-tru., Constantinescu N. I., Coţiu A., Creţa F. G., Georgescu N., Gheorghiu C. O., Gligor N. I., Kinsky I., Pali S, Sabău Gh., Ştefănescu F. M. Stretea Alex., Tincu C. C. şi Wigh I.*

Gh. Th. Gh.

Problema 2327. — *Să se rezolve un triunghiu între elementele căruia există relaţiile*

$$a+b=c^2;\ a^3+b^3=c^4;\ l_c=c\operatorname{cotg} C$$

l_c fiind una din bisectoarele unghiului C.

G-l Gh. Buicliu

Soluţie. Primele 2 relaţii dau

$$a^2-ab+b^2=c^2.$$

Dar

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a+b$$

$$\therefore\ \cos C=\frac{a^2+b^2-(a+b)}{2ab}=\frac{(a+b)^2-2ab-c^2}{2ab}=$$

$$\frac{c^4-2ab-c^2}{2ab}.$$

Apoi

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=c^4$$

$$\therefore\quad c^6-3abc^2=c^4\quad\therefore\quad c^4-3ab=c^2$$

$$\therefore\ (1)\qquad (\partial)\ c^4-c^2=3ab,$$

aşa că

$$\cos C=\frac{3ab-2ab}{2ab}=\frac{1}{2}\quad\therefore\quad C=60^0.$$

Conform enunţului şi acestui rezultat, avem

$$(2)\qquad l_c=c\cot C=c\operatorname{cotg}60^0=\frac{c}{\sqrt{3}}.$$

Pe de altă parte

$$l_c=\frac{2}{a+b}\sqrt{p(p-c)ab}=$$

$$\frac{1}{a+b}\sqrt{[(a+b)^2-c^2]ab}$$

$$\therefore\qquad l_c=\frac{1}{c^2}\sqrt{(c^4-c^2)ab}=\frac{ab\sqrt{3}}{c^2}$$

şi egalând cu (2) găsim

$$3ab=c^3$$

care dus în (1) dă

$$c^4-c^3-c^2=0\quad\therefore\quad c^2-c-1=0$$

$$\therefore\qquad c=\tfrac{1}{2}1+\sqrt{5}=1{,}618.$$

Pentru calculul laturilor a şi b, observăm că din enunţ avem

$$(a+b)^2=a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$$

$$\therefore\quad a+b=(a+b)^2-3ab=(a-b)^2+ab$$

$$\therefore\ (a-b)^2=(a+b)-ab=c^2-\tfrac{1}{3}(c^4-c^2)=\tfrac{1}{3}(4c^2-c^4)$$

Avem deci de rezolvat sistemul în a, b;

$$a+b=c^2,\quad a-b=c\sqrt{\tfrac{1}{3}4-c^2}$$

unde c are valoarea găsită. Se găseşte după înlocuire

$$a=1{,}851\ldots\ \text{şi}\ b=0{,}767\ldots$$

Cunoscând laturile, unghiurile se deduc imediat. De exemplu

$$\sin B=\frac{b\sin C}{c}=\frac{0{,}767\sqrt{3}}{2\times 1{,}618}=\frac{0{,}767\times 0{,}866\ldots}{1{,}618}.$$

Cu ajutorul logaritmilor, avem

$$\log\sin B=\log 0{,}767+\log 0{,}866\cdots+\operatorname{colog}1{,}618=$$

$$\bar{1},61334$$

$$\therefore\qquad B=24^0\,14'\,17''$$

şi

$$A=95^0\,45'\,43''.$$

In rezumat triunghiul căutat, în cazul bisectoarei interioare l_c este acela ale cărui elemente sunt

$$a=1{,}851\ldots;\ b=0{,}767\ldots;\ c=1{,}618\ldots$$

$$A=95^0\,45'\,43'';\ B=24^0\,14'\,17'';\ C=60^0.$$

Dacă în enunţ se înlocueşte bisectoarea interioară l_c prin bisectoara exterioară l_c se găseşte triunghiul

$$a=1{,}722\ldots;\ b=0{,}580\ldots;\ c=1{,}517\ldots$$

$$A=100^0\,38'\,19'';\ B=19^0\,21'\,41'';\ C=60^0$$

Aceasta soluţie este data de D-l *Teodorescu P. T.* (cl. VI. Lic. „Matei Basarab" Bucureşti). D-sa a dat toate calculele numerice, cu 4 zecimale făcând o foarte corectă aplicare a logaritmilor, ceeace a şi fost scopul problemei.

Nu menţionăm soluţiile care au indicat numai principiul de rezolvare, fără a se ocupa de calcule.

G-l. Gh. B.

Poblema 2516. — *Să se studieze şi să se construiască curba*

$$y=(a+\sqrt{r^2-x^2})^3.$$

I. Nemeth

Soluția. Intervalul de existență a funcțiunei este $(-r, r)$ Derivata funcției

$$y' = \frac{-3x(a+\sqrt{r^2-x^2})^2}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

care se anulează pentru $x=0$ și pentru valorile lui x cari anulează paranteza. Cum în vecinătatea acestor valori derivata nu schimbă de semn, paranteza fiind la pătrat, ele nu vor da extreme pentru funcțiune. Tabloul de variație este

x	$-r$		0		$+r$
y'		$+$	0	$-$	
y	a^3	↗	$(a+r)^3$	↘	a^3

Pentru construcția curbei reprezentative, pe care o lăsăm pe seama cititorilor, facem următoarele observațiuni: 1° Cum funcțiunea nu se schimbă când schimbăm pe x în $-x$, curba va fi simetrică față de axa Oy. 2° La capetele intervalului derivata, în cazul $a \neq 0$, devine infinită, adică curba va avea în aceste puncte tangentele paralele cu axa Oy. În cazul $a=0$, derivata se reduce la

$$y' = -3x\sqrt{r^2-x^2}$$

adică în punctele de abscisă $x = \pm r$ curba va fi tangentă axei Ox. 3°. Cum derivata conține paranteza $(a+\sqrt{r^2-x^2})^2$, însemnează că valorile care o anulează, vor da puncte de inflexiune. Deoarece radicalul este aritmetic, pentruca să avem valori reale pentru x, este necesar ca $a<0$. În acest caz, curba va avea puncte de inflexiune pentru valorile

$$a+\sqrt{r^2-x^2}=0 \quad \therefore \quad \text{(I)} \quad x = \pm\sqrt{r^2-a^2},$$

evident iarăși în cazul $|r|>|a|$. Pentru a se găsi toate punctele de inflexiune ale curbei, va trebui să anulăm derivata a doua a funcțiunei, a cărei valoare este

$$y'' = \frac{-3(a+\sqrt{r^2-x^2})\left[ar^2+(r^2-2x^2)\sqrt{r^2-x^2}\right]}{(r^2-x^2)\sqrt{r^2-x^2}}.$$

Cum curba este simetrică față de Oy vom pune peste tot $x^2=u$ și vom căuta pentru u numai valori pozitive. In baza valoarei găsite mai sus pentru y'', alte puncte de inflexiune ale curbei vor fi date de ecuația

(e) $$ar^2+(r^2-2u)\sqrt{r^2-u}=0$$

care făcută rațională devine

$$f(u) \equiv 4u^3 - 8r^2u^2 + 5r^4u - r^4(r^2-a^2) = 0.$$

Mai departe va trebui să ținem seamă de discuția acestei ecuații și în acelaș timp de faptul dacă rădăcinile obținute verifică sau nu ecuația (e). Cum

$$f'(u) \equiv (2u-r^2)(6u-5r^2) \text{ și}$$

$$f(0) = -r^4(r^2-a^2),\ f\left(\tfrac{1}{2}r^2\right) = r^4a^2,$$

$$f\left(\tfrac{5}{6}r^2\right) = -r^4\left(\tfrac{2}{47}r^2-a^2\right)$$

discuția ecuației $f(u)=0$ va fi dată de teorema lui *Rolle* prin tabloul (unde am presupus $r\neq 0$ deoarece pentru $r=0$ funcția numai are sens pentru $x=0$).

r	$f(0)$	$f\left(\frac{1}{2}r^2\right)$	$f\left(\frac{5}{6}r^2\right)$	$f(+\infty)$
$-\infty$				
	$-$	$+$	$-$	$+$
$-3\sqrt{\frac{3}{2}}a$	$-$	$+$	0	$+$
	$-$	$+$	$+$	$+$
$-a$	0	$+$	$+$	$+$
	$+$	$+$	$+$	$+$
$+a$	0	$+$	$+$	$+$
	$-$	$+$	$+$	$+$
$3\sqrt{\frac{3}{2}}a$	$-$	$+$	0	$+$
	$-$	$+$	$-$	$+$
$+\infty$				

In acest tablou am presupus $a>0$; în caz contrar trebue să schimbăm pe $-\infty$ cu $+\infty$ în tabloul de mai sus și restul rămâne același. Această discuție trebue confruntată cu ecuația (e) care spune că dacă $a>0$, atunci trebue ca $r^2-2u<0$, iar dacă $a<0$, trebue ca $r^2-2u>0$. Ținând seamă de aceste lucruri, vom avea următoarele rezultate:

$a>0$ 1. $r<-a$ sau $r>a$ curba are două puncte de inflexiune simetrice față de axa Oy, plus punctele (I).

2. în toate celelalte cazuri singurele puncte de inflexiune ale curbei sunt (I).

$a<0$ 1. $r<3\sqrt{\frac{3}{2}}a$ sau $r>-3\sqrt{\frac{3}{2}}a$ curba are patru puncte de inflexiune simetrice câte două față de axa Oy, plus punctele (I).

2. In toate celelalte cazuri singurele puncte de inflexiune ale curbei sunt (I).

Singurele soluţii cari merită să fie citate sunt ale D-lor *Barbul V. Vasile* (Oradea), *Novac I. I.* (P. T.) şi *Teodorescu P. P.* (Bucureşti).

Gh. Th. Gh.

Problema 2531. — *Să se stabilească identitatea*

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+k(1-x^2)}{1-x^2-2kx}-2\operatorname{arc\,tg}x=\operatorname{arc\,tg}k.$$

V. ALACI

Soluţia 1-a. Ţinând seamă de relaţiile cunoscute

$$2\operatorname{arc\,tg}x=\operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{1-x^2},$$

$$\operatorname{arc\,tg}\alpha-\operatorname{arc\,tg}\beta=\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}$$

şi notând cu E primul membru al identităţii din enunţ, putem scrie succesiv,

$$E=\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+k(1-x^2)}{1-x^2-2kx}-\operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{1-x^2}=$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{\dfrac{2x+k(1-x^2)}{1-x^2-2kx}-\dfrac{2x}{1-x^2}}{1+\dfrac{2x}{1-x^2}\cdot\dfrac{2x+k(1-x^2)}{1-x^2-2kx}}$$

$$=\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+k-kx^2-2x^3-kx^2+kx^4-2x+2x^3+4kx^2}{1-x^2-2kx-x^2+x^4+2kx^3+4x^2+2kx-2kx^3}$$

$$=\operatorname{arc\,tg}\frac{k+2kx^2+kx^4}{1+2x^2+x^4}=\operatorname{arc\,tg}\frac{k(1+2x^2+x^4)}{1+2x^2+x^4}=\operatorname{arc\,tg}k.$$

Astfel identitatea cerută este stabilită.

Soluţii analoage date de d-ra: *Raţiu Maria* (P. T.), şi de d-nii: *Bălă C-tin*: (P. T.), *Blaga Ovidiu* (P. T.), *Barbul Vasile* (Lic. Oradea), *Cândea Victor* (Satul Mare), *Chioreanu Ion* (P. T.), *Cioca Ioan* (P. T.), *Ciucescu Paul* (Lic. Slatina), *Constantinescu Virgil* (Lic. Slatina), *Coţiu Aurel* (student, Cluj), *Deutsch Emeric* (P. T.), *Giurconiu Mihai* (P. T.), *Hurezeanu Romulus* (Lic. Tg.-Jiu), *Iovănel Chiriac* (P. T.), *Neguţ Ionel* (Lic. Tg.-Jiu), *Nemoianu C-tin* (P. T.), *Novac Ioan* (P. T.), *Păunescu Gh.* (Lic. Matei Basarab, Bucureşti), *Pisanca Ionel* (Timişoara), *Popa Pavel* (Oradea), *Purcea Ion* (Lic. Caracal), *Râmboiu Septimiu* (Cluj), *Ristea Gh.* (Lic Piteşti), *Roman C-tin* (Colegiul Loga, Timişoara), *Seracin Eugen* (P. T.), *Simeon Liviu* (P. T.), *Sororean Emil* (P. T.), *Stanciu D-tru* (Lic. Arad), *Teodorescu Petre* (Lic. Matei Basarab, Bucureşti) şi *Toderaşc Vasile* (P. T.).

Soluţia autorului. Scriem întâi identitatea dată sub forma

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+k(1-x^2)}{1-x^2-2kx}=\operatorname{arc\,tg}k+\operatorname{arc\,tg}x+\operatorname{arc\,tg}x.$$

Notăm cu E partea a 2-a şi luăm tangenta în ambii membrii, observând că în membrul al 2-lea avem de luat tangenta unei sume de trei arce. Avem succesiv

$$\operatorname{tg}E=\frac{k+x+x-kx^2}{1-kx-kx-x^2}=\frac{2x+k(1-x^2)}{1-x^2-2kx},$$

deci

$$E=\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+k(1-x^2)}{1-x^2-2kx}.$$

Identitatea din enunţ este astfel stabilită.

Soluţia 3-a Luăm derivata funcţiei

$$y=\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+k(1-x^2)}{1-x^2-2kx}-2\operatorname{arc\,tg}x$$

şi avem

$$y'=\frac{1}{1+\left[\dfrac{2x+k(1-x^2)}{1-x^2-2kx}\right]^2}\cdot\frac{2(1-kx)(1-x^2-2kx)+2(x+k)[2x+k(1-x^2)]}{(1-x^2-2kx)^2}-\frac{2}{1+x^2}$$

$$=2\frac{(1-kx)(1-x^2-2kx)+(x+k)[2x+k(1-x^2)]}{(1-x^2-2kx)^2+[2x+k(1-x^2)]^2}-\frac{2}{1+x^2}$$

$$=2\frac{1-x^2-2kx-kx+kx^3+2k^2x^2+2x^2+kx-kx^3+2kx+k^2-kx^2}{1+x^4+4k^2x^2-2x^2-4kx+4kx^3+4x^2+k^2+k^2x^4+4kx-4kx^3-2k^2x^2}-\frac{2}{1+x^2}$$

$$=2\frac{1+k^2+k^2x^2+x^2}{1+k^2+2k^2x^2+2x^2+x^4+k^2x^4}-\frac{2}{1+x^2}=2\frac{(1+k^2)(1+x^2)}{(1+k^2)(1+2x^2+x^4)}-\frac{2}{1+x^2}$$

$$=2\frac{1+x^2}{(1+x^2)^2}-\frac{2}{1+x^2}=0.$$

Derivata lui y fiind nulă urmează că y este o constantă, când x variază, constantă ce o aflăm dând lui x o valoare particulară. Facem astfel în expresia lui y pe $x=0$ şi obţinem că valoarea constantei căutate este, arc tg k.

Rezultă de aci. că

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+k(1-x^2)}{1-x^2-2kx}-2\operatorname{arc\,tg}x=\operatorname{arc\,tg}k,$$

identitatea cerută.

Soluţia analoagă dată de d-ra *Funt Carmen* (P. T.) şi de d-nii: *Deutsch Emeric* (P. T.) şi *Păunescu Gh.* (Lic. Matei Basarab, Bucureşti).

Soluţia 4-a. În articolul autorului: *Funcţii trigonometrice inverse cu aceiaşi derivată* „R. M. T." Vol. XXV, N-rile 11 — 12 şi vol. XXV!, n-rul 1, se demonstrează că, *pentru ca funcţiile*

$$y=\operatorname{arc\,tg}Y,\quad z=2\operatorname{arc\,tg}Z,$$

(unde Y şi Z sunt funcţii de variabila x,) *să admită aceiaşi derivată*, trebue să avem verificată relaţia

$$(1)\qquad Y=\frac{2Z+k_1(1-Z^2)}{1-Z^2-2k_1Z},\quad (k_1,\text{ o constantă}).$$

Ori în cazul nostru

$$Y=\frac{2x+k(1-x^2)}{1-x^2-2kx},\quad Z=x$$

şi relaţia (1) este în adevăr verificată, identic, luând $k_1=k$ fiindcă ea devine

$$\frac{2x+k(1-x^2)}{1-x^2-2kx}\equiv\frac{2x+k(1-x^2)}{1-x^2-2kx}.$$

Urmează că funcţiile y şi z diferă printr'o constantă, care se determină ca în soluţia 3-a.

Identitatea dată este astfel stabilită

Soluţie analoagă dată de d-nii: *Deutsch Emeric* (P. T.) şi *Păsărin Gh.* (Lic. Tg.-Jiu).

D-l *Deutsch Emeric* observă că se obţine o identitate mai generală, înlocuind pe x printr'o funcţie oarecare $f(x)$.

Soluţia 5-a. Notând cu E primul membru şi trecând dela funcţiile arc tg la cele logaritmice, având în vedere relaţia cunoscută,

$$\operatorname{arc\,tg}X=\frac{1}{2i}\log\frac{1+iX}{1-iX},\quad (i=\sqrt{-1}),$$

avem succesiv:

$$E=\frac{1}{2i}\log\frac{1+i\dfrac{2x+k(1-x^2)}{1-x^2-2kx}}{1-i\dfrac{2x+k(1-x^2)}{1-x^2-2kx}}-\frac{1}{i}\log\frac{1+ix}{1-ix}$$

$$=\frac{1}{2i}\log\frac{1-x^2-2kx+i(2x+k-kx^2)}{1-x^2-2kx-i(2x+k-kx^2)}-\frac{1}{2i}\log\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2i}\log\frac{(1-x^2+2ix)(1+ik)}{(1-x^2-2ix)(1-ik)}\cdot\left(\frac{1-ix}{1+ix}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2i}\log\frac{(1+ix)^2(1+ik)(1-ix)^2}{(1-ix)^2(1-ik)(1+ix)^2}=$$

$$=\frac{1}{2i}\log\frac{1+ik}{1-ik}=\operatorname{arc\,tg}k.$$

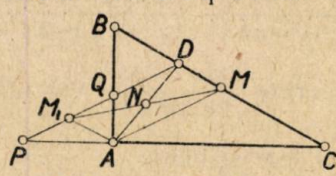
In felul acesta, identitatea din enunţ este stabilită.

Soluţii date de d-nii: *Cioară Alexandru* (P. T.), *Gherlan Vasile* (P. T.), *Pantea Alexandru* (Lic. Beiuş), *Popa Septimiu* (Lic. Beiuş) şi *De Sabota Ioan* (Lic Beiuş).

Problema 2599. — *Fie* M *mijlocul ipotenuzei unui triunghiu dreptunghic* A B C, *iar* D *un punct oarecare pe ipotenuza* BC. *Fie* N *mijlocul segmentului* A D, *iar* M_1 *simetricul lui* M *în raport cu* N. *Dreapta* M_1 D *taie catetele* A C *şi* A B *respectiv în punctele* P *şi* Q. *Să se arate că segmentele* P M_1 *şi* M_1 Q *sunt egale.*

MARIA NEUMANN

Soluţia. Conform enunţului, diagonalele patrulaterului A M D M_1 se taie în părţi egale; deci este un paralelogram. Laturile opuse vor fi deci paralele. Dreptele paralele BC şi M_1A tăiate de secanta AC spun că $\sphericalangle M_1AP=\sphericalangle MCA$; iar dreptele paralele PD şi A M tăiate de aceiaşi secantă spun că $\sphericalangle M_1PA=\sphericalangle MAC$. Dar $\sphericalangle MCA=\sphericalangle MAC$, triunghiul AMC fiind isoscel (A M mediană în triunghiul dreptunghic B A C este jumătate din ipotenuză). Rezultă că $\sphericalangle M_1AP=\sphericalangle M_1PA$, adică triunghiul M_1 A P este isoscel. Analog se demonstrează că şi triunghiul M_1 A Q este isoscel. Deci:



$$M_1P=M_1A=M_1Q.$$

Au rezolvat problema geometric D-nii *Bogoevici I. N.* (Caransebeş), *De Sabata I.* (Beiuş). *Deleanu Ar.* (Bucureşti), *Deutsch Em.* (P. T.), *Dodu A. Eug.* (Bucureşti), *Gherlan I. V.* (P. T.), *Man I.* (P. T.), *Nicoară M.* (Oradea), *Pantea N. Alex.* (Beiuş), *Purcea M. I.* (Caracal), *Stănescu D. C.* (Reşiţa) şi *Trifu N.* (Slatina).

Au rezolvat problema analitic D-rele: *Oros M.* (Caran-

sebeș), *Simionescu S.* (Caransebeș) și D-nii: *Breazu M.* (Deva), *Găzdău M.* și *Seracin E.* (P. T.).

Gh. Th. Gh.

Problema 2612. — *Fie două paralelelipide dreptunghice asemenea. Primul are ca lungimi ale muchiilor a_1, b_1, c_1 și diagonala d_1; al doilea are muchiile a_2, b_2, c_2 și diagonala d_2. Să se demonstreze relația*

$$d_1 d_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2,$$

elementele analoage fiind următoarele (a_1, a_2), (b_1, b_2) (c_1, c_2).

GH. DUMITRESCU

Soluția. Se știe că

$$d_1^2 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2, \quad d_2^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2,$$

relația de demonstrat se reduce la

$$(1)\quad (a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2) = (a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)^2.$$

Cum paralelipidele sunt asemenea, însemnează că

$$(2)\qquad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k,$$

sau

$$a_1 = k a_2, \quad b_1 = k b_2, \quad c_1 = k c_2$$

Înlocuind în (1) pe a_1, b_1, c_1 dați de aceste relații, obținem imediat o identitate evidentă și deci relația din enunț este verificată.

Observare. Ne propunem să demonstrăm și reciproc, că dacă relația din enunț este verificată, paralelipidele sunt asemenea. În adevăr, relația din enunț este totuna cu (1). Ori, conform identității lui *Lagrange*, relația (1) cere ca

$$(a_1b_2-a_2b_1)^2+(b_1c_2-b_2c_1)^2+(c_1a_2-c_2a_1)^2 = 0.$$

Această egalitate nu poate avea loc între numere reale fără ca să avem simultan

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = b_1 c_2 - b_2 c_1 = c_1 a_2 - c_2 a_1 = 0,$$

relații care se pot scrie imediat sub forma

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}, \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}, \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1}{a_2},$$

adică avem relațiile (2) care spun că paralelipidele sunt asemenea.

Au rezolvat problema D-nii: *Breazu M.* (Deva), *Deleanu Ar.* (București), *Deutsch Em.* (P. T.), *Drăghici I.* (Caransebeș), *Gherlan V.* (P. T.), *Man I.* (P. T.), *Mihăilescu C. N.* (București), *Nicoară M.* (Oradea), *Purcea I.* (Caracal), *Radu Cor. Seracin E.* și *Soare V. M.* (București).

Gh. Th. Gh.

Problema 2486. — *Într'un triunghiu oarecare* ABC *ducem mediana* AA′ *și însemnăm cu* α *și* β *măsurile unghiurilor* A′AB *și* A′AC. *Să se stabilească relațiile*

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\sin(B-C)}{\sin B\sin C},$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{b-c}{b+c}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A.$$

O. N. TINO

Soluția. Se cunosc formulele*)

$$\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{cotg} B + 2\operatorname{cotg} A,$$
$$\operatorname{cotg}\beta = \operatorname{cotg} C + 2\operatorname{cotg} A,$$

care prin scădere dau

$$\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}\beta = \operatorname{cotg} B - \operatorname{cotg} C,$$

și care nu este altceva decât prima relație din enunț.

Pentru a doua relație, aplicând teorema sinusurilor în triunghiurile A′AB, A′AC avem

$$\frac{\sin\alpha}{\sin B} = \frac{\frac{1}{2}a}{AA'}, \quad \frac{\sin\beta}{\sin C} = \frac{\frac{1}{2}a}{AA'}$$

de unde

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{b}{c}.$$

Aplicând o proprietate a proporțiilor deducem

$$\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta} = \frac{b-c}{b+c}$$

sau

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)} = \frac{b-c}{b+c}$$

și cum $\alpha+\beta=A$ avem mai departe

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A = \frac{b-c}{b+c},$$

care este a doua relație din enunț.

Au rezolvat problema D-nii: *De Sabota I.* (Beiuș), *Deutsch Em.* (P. T.), *Georgescu Nicolin* (P. T.) *Gherlan I. V.* (P. T.), *Haret Sp. R.* (București), *Manolescu G.* (P. T.), *Novac I. I.* (P. T.) și *Teodorescu P. P.* (București),

Gh Th. Gh.

PROBLEME PROPUSE

2645. — Să se găsească două numere știind că au pe 1764 ca c. m. m. m. c. și pe 12826485 ca diferență a cuburilor lor.

G-L GH. BUICLIU

---

*) A se vedea: F. G.M. *„Exercices de Trigonometrie"*, pag. 158, formula (97).

2646. — Să se găsească un patrat de cinci cifre ştiind că se obţine prin adunarea unui patrat perfect, cu un cub perfect.

IONEL PISANCA

2647. — Să se rezolve sistemul

$$\frac{2ax}{a-y}=\frac{a+y}{a-x}+b,\quad \frac{2ay}{a-x}=\frac{a+x}{a-y}-b;$$

apoi să se verifice: Cazuri particulare: $a=b+1$; $a=b=1$.

C. IONESCU-TIU

2648. — Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} xy+z\Sigma x=a \\ yz+x\Sigma x=b \\ zx+y\Sigma x=c. \end{cases}$$

MAIOR G. P. BOERESCU

2649. — Să se separe planul unei parabole-cubice, în regiuni, după numărul tangentelor reale ce se pot duce acestei curbe din diferite puncte ale lui.

E. VISA

2650*. — Se dă un triunghiu isoscel ABC (AB = AC). Să se arate că:

1. Cercul ce trece prin A, C şi este tangent în C la BC este egal cu cercul circumscris triunghiului ABC.

2. Cercul ce trece prin A, C şi este tangent în A la AB trece prin centrul triunghiului ABC.

Fie ABC un triunghiu oarecare, în care se duc cercurile ce trec prin (A, C), (A, B) şi sunt tangente în C, B laturii BC, precum şi cercurile ce trece prin aceleaşi perechi de puncte şi sunt tangente respectiv la AB, AC.

1. Să se arate că raza cercului ABC este medie proporţională între razele primelor două cercuri.

2. Să se determine relaţia dintre unghiurile triunghiului ABC, astfel ca ultimele două cercuri să treacă prin centrul cercului ABC.

3. Să se extindă, atât cât este posibil, la tetraedru, proprietăţile precedente.

CEZAR COSNITA

2651. — In triunghiul dreptunghic ABC se duce înălţimea AA_1, iar din A_1 se duc bisectoarele A_1B_1, A_1C_1, respectiv în triunghiurile AA_1B şi AA_1C. Se procedează analog cu triunghiul $A_1B_1C_1$ şi se obţine un triunghiu $A_2B_2C_2$. Notaţiile fiind cele obişnuite, să se stabilească relaţia

$$B_2C_2 = 2a\sin^2 B\, cp^2 B.$$

Să se generalizeze.

V. ALACI

2652. — Un submarin în imersiune măsoară cu ajutorul periscopului distanţa până la unul din catargele unei nave şi unghiul sub care se vede nava Dacă distanţa măsurată este D, distanţa catarg-pròva l, distanţa catarg-pupa l_1, iar unghiul măsurat ω, se cere:

1. Unghiul format între drumul navei şi direcţia periscop-catarg

2. Unghiurile sub care se văd distanţele l şi l_1.

C-PT. C-DOR C. V. COSTACHESCU

2653. — Dacă se proiectează vârfuriie unui patrulater pe diagonalele sale, se obţine un alt patrulater a cărui suprafaţă se obţine de suprafaţa celui iniţial înmulţită cu cosinusul unghiului făcut de diagonale.

GH. TH. GHEORGHIU

2654*. — Parcurgând perimetrul unui triunghiu ABC în acelaş sens, se împart laturile în acelaş raport k, prin punctele A', B', C'. Se împart apoi dreptele AA', BB', CC' în acelaşi raport k', egal sau diferit de k prin punctele A_1, B_1, C_1 începând de la vârfuri Triunghiul $A_1B_1C_1$ are acelaşi centru de greutate ca şi ABC, A'B'C'.

M. GHERMANESCU

ERATA.

1. In problema 2436* din n-rul trecut, ultimul termen $4(10+b)$ se va înlocui prin $4(10a+b)$.

2. La articolul: *„Axe de simetrie la cubice"*.

Pag 68. Relaţia (27') se scrie: $H_1+A_1X_0^2+2E_1X_0=0$.

Pag. 69 Membrul al 2-lea în a doua relaţie (41) este $2A_1\lambda$

Pag 69 rândul 4 de jos. Se citeşte $(x^2+2ax-2a^2)$ în loc de $(x^2+2ax=2a^2)$.

Pag. 70. Primul membru al relaţiei (49) este

$(a_{11}AB+a_{12}B^2-a_{22}AB-a_{12}A^2)$ în loc de

$(a_{11}AB+a_{12}B^2-a_{22}ABa_{12}A^2)$.

INFORMAȚII

1. Nu se publică în revistă decât manuscrise dela abonați.

2. Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol, trebuesc scrise citeț (în special iscălitura) numai pe o parte a hârtiei. Probleme propuse trebuesc însoțite și de soluțiile lor, iar cele rezolvate, de enunț. Nu sunt luate în considerare probleme rezolvate iscălite de mai mulți corespondenți. Problemele rezolvate vor fi redactate îndependent una de alta, și nu în continuare.

3. Numele colaboratorilor dela cari s'au primit soluții la problemele publicate în acest număr și care au sosit la redacție după data de 15 a lunei precedente, nu mai pot fi trecute în corpul revistei. Numele lor este însă menționat pe copertă împreună cu numărul problemei rezolvate.

4. Rugăm pe corespondenții noștrii la orice schimbare de adresă sau lipsă din localitate fără a avea pe cineva să le primească revista, să ne anunțe din vreme. În caz contrar revista ne vine înapoi și cu regret anunțăm că a doua oară nu o mai putem expedia. Mai mult, se suspendă expedierea numerelor următoare până ce abonatul va reclama aceste numere.

5. Ing. *Marinescu D.* (Ploești). Pentru numărul pe care-l pretindeți vă rog trimeteți 32 lei.

Manuscrise primite de la corespondenții noștrii până la 1 a lunei curente și anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) și probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Bandler D. (P.); *Bălăuța M.* (P, 2597, 2604, 2607, 2612, 2614, 2627, 2621. 2631, 2632, 2633, 2635, 2636. *Bogoevici N.* (2543, 2566, 2567, 2591, 2612); *Breazu Mihai* (2607, 2617, 2622, 2526, 2626, 2627. 2628, 2630, 2631, 2632, 2633); *Coatu Gh.* (P.); *Constantinescu I. Gh.* (2611, 2617, 2628, 2633); *Constantirescu Ilie* (A.); *Deleanu Aristide* (2617, 2618, 2621, 2622); *Deutsch Emeric* (N; P; 2617, 2618); *Manoilă Dan* (2611, 2632); *Murinescu S. D.* (2056, 2087, 2094, 2103, 2469, 2531, 2552, 2571, 2587); *Petcu Valeriu* 1938, 2625, 2628); *Pisanca Ionel* (N; P; 2510, 2538, 2602, 2603, 2612, 2614, 2628, 2634); *Purceu Ion* (1877, 1878, 1908, 1909, 1910, 2603, 2617, 2629, 2630, 2633); *Roth R. Eg.* (N); *De Sabota Ioan* (2608, 2611, 2612, 2613, 2614, 2617, 2618, 2632); *Soare Mircea* (2095, 2607, 2617, 2622, 2627, 2628, 2629, 2931, 2632); *Tibăr Aurel* (2496, 2625, 2635).

ANUL XXVIII. SEPTEMVRIE 1948. No. 7.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIŞOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA
PREŢUL ABONAMENTULUI ESTE 300 LEI ANUAL PENTRU PARTICULARI
ŞI 600 LEI PENTRU INSTITUŢII
PREŢUL ABONAMENTULUI PENTRU STRĂINĂTATE ESTE DE 600 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. C-PT. C-DOR C. COSTACHESCU: GENERALIZAREA UNEI PROBLEME DE CINEMATICA AERO-NAVALA.
2. NOTA MATEMATICA 9, 10, 11.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 1379, 1571, 1715, 2129, 2137, 2202, 2282, 2502, 2619.
5. PROBLEME PROPUSE: 2655-2664.
6. INFORMATII.

Tip. „Gh. Hălmăgeanu", Timişoara
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebue să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă"

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara, conţinând articole, note, probleme propuse şi rezolvate, vor fi trimise pe adresa: Prof. V. Alaci, Politehnica, Timişoara.

Administraţia revistei aduce la cunoştinţa generală următoarele:

1. Abonamentul pe anul XXVIII (15 Martie 1948 — 15 Februarie 1949) este 300 lei pentru particulari şi 600 pentru instituţii.

2. Taxa de membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este de 200 lei.

3. Volumele I, XXIII, XXV, XXVI şi XXVII sunt epuizate. Celelalte volume broşate se găsesc de vânzare cu preţul de 300 lei fiecare. La această sumă se va adăoga 50 lei costul expediţiei. In caz că se comandă mai multe volume se va adăoga la taxa de 26 lei pentru recomandat, câte 20 lei pentru fiecare volum.

4. Se găsesc de vânzare numere izolate din colecţie chiar din volumele epuizate. Preţul unui număr este de 30 lei la care se adaogă 2 lei expediţia. Din vol. XXVII se găsesc de vânzare no. 1, 4—12.

5. Se primesc reclamaţii că se pierde revista prin poştă. Aceste reclamaţii sunt adunate în ordinea sosirii lor şi vor fi satisfăcute la 15 Februarie 1949 când se vor vedea ce numere rămân descomplectate după legarea volumelor întregi. Orice reclamaţie de pierderea unui număr nu este luată în seamă decât la o lună dela data apariţiei acelui număr.

6. Tot ce priveşte administraţia se va adresa D-lui Prof. **Gh. Th. Gheorghiu** str. Voltaire Nr. 1, Timişoara I. Reclamaţiile ce necesită răspuns vor fi însoţite de o carte poştală timbrată legal.

7. Orice sumă destinată revistei se poate trimite prin CEC sub contul n-rul 85208 sau prin mandat poştal D-lui Prof. **Gh. Th. Gheorghiu** pe adresa de mai sus.

ANUL XXVIII — No 7. TIMISOARA, 1948 SEPTEMBRIE 15

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

Prețul abonamentului este 300 lei pentru particulari și 600 lei pentru instituții.

Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica Timișoara.

ADMINISTRAȚIA: Prof. GH. TH. GHEORGHIU
Timișoara I, Str. Voltaire, No. 1.

GENERALIZAREA UNEI PROBLEME DE CINEMATICĂ AERO-NAVALĂ

DE

CPT. C-DOR C. COSTACHESCU.

În manualele de Cinematică aero-navală este tratată problema recunoașterei unui punct (port, insulă, etc.) printr'o unitate detașată de escadră.

Fie ZZ' drumul unei escadre (navală, aeriană sau aero-navală), a cărei viteză este v. Din A se detașează o unitate (navă, avion, este) pentru a recunoaște un punct P. Din P, unitatea va ralia escadra în B.

În momentul când unitatea se află în P, escadra se află în A_1. Pe direcția de mers a escadrei construim vectorul $A_1C = v$. Din C ca centru cu o rază egală cu V (viteza unității), trasăm un arc de cerc, care intersectează dreapta A_1P în D. Din P se duce o paralelă la DC. B va fi punctul de întâlnire. Drumul PB poartă numele de drum de goană. Unitatea va lipsi dela escadră timpul

$$T = \frac{AB}{v} = \frac{AP + PB}{V}.$$

T este minim când $PA = PB$.

Voi generaliza și da o altă demonstrație acestei probleme.

Fie ZZ' drumul unei escadre. În punctul A se detașează o unitate pentru a recunoaște punctele B, C, D, ..., T. În unele din aceste puncte unitatea stă un timp, care este cunoscut.

După terminarea misiunei, unitatea trebuind ca în cel mai scurt timp să ralieze escadra, care își continuă drumul, se cere:

a) *În ce punct, unitatea va pleca în recunoaștere, ca să lipsească minimum de timp dela escadră.*

b) *Valoarea acestui timp.*

c) *Punctul de raliere.*

Presupunem problema rezolvată. Fie A punctul de plecare spre primul punct de recunoscut, iar T ultimul punct de recunoscut, din care unitatea dă goană escadrei, pe care o va întâlni în A_1.

Notații $AB_1 = x$, $T_1A_1 = y$, $BB_1 = a$, $TT_1 = b$ ($B_1, \ldots, T_1$ proecțiile pe zz_1 ale punctelor B,...T), $BC + CD + \cdots + MT = m_1$, $B_1T_1 = m$. T, timpul total cât unitatea lipsește dela escadră, t_0, timpul total cât unitatea oprește în punctele B, C, ..., T. $V =$ viteza unității, $v =$ viteza escadrei ($V > v$).

Observăm:

$$\sqrt{a^2 + x^2} = V \times t_1$$
$$BC = V \times t_2$$
$$\cdots\cdots$$
$$\sqrt{b^2 + y^2} = V \times t_n,$$

adunând obținem:

$$(1) \qquad \sqrt{a^2 + x^2} + BC + \cdots + \sqrt{b^2 + y^2}$$
$$= \sqrt{a^2 + x^2} + m_1 + \sqrt{b^2 + y^2} = V(t_1 + t_2 + \cdots + t_n)$$
$$= V(T - t_0),$$

$$AB_1 = x = v \times t', \qquad B_1T_1 = m = v \times t'',$$
$$T_1A_1 = y = v \times t''',$$

adunând obținem:

$$(2) \qquad x + y + m = v(t' + t'' + t''') = vT.$$

Din (2) scoatem valoarea lui y și o înlocuim în (1).

$$(3) \quad F(x, T) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{(vT - m - x)^2 + b^2} + m_1 - V(T - t_0) = 0.$$

Minimum lui T, va fi dat de $\frac{dT}{dx} = 0$

$$(4) \qquad \frac{dT}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial T}} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial T}=\frac{v(vT-m-x)}{\sqrt{(vT-m-x)^2+b^2}}-V\neq 0 \quad (V>v),$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}-\frac{vT-m-x}{\sqrt{(vT-m-x)^2+b^2}}=0,$$

sau $x^2[(vT-m-x)^2+b^2]=(x^2+a^2)(vT-m-x)^2$, deci

$$x^2b^2=a^2y^2,\quad \frac{x}{y}=\frac{a}{b},\quad \frac{x}{x+y}=\frac{a}{a+b}=\frac{x}{vT-m},$$

$$(5)\ x=(vT-m)\frac{a}{a+b},\qquad (6)\ y=(vT-m)\frac{b}{a+b},$$

Înlocuind valorile lui x şi y în (1), avem:

$$a\sqrt{1+\frac{(vT-m)^2}{(a+b)^2}}+b\sqrt{1+\frac{(vT-m)^2}{(a+b)^2}}+m_1$$

$$\sqrt{(a^2+b)^2+(vt-m)^2}+m_1=V(T-t_0),\ \text{sau}$$

$$(7)\quad T^2(V^2-v^2)-2T(V^2t_0+Vm_1-vm)+$$
$$m_1^2-m^2+V^2t_0^2-(a+b)^2=0.$$

Valoarea lui T, aleasă convenabil din (7) şi înlocuită în (5) şi (6), dau valorile lui x şi y.

Aplicaţii. 1° V=30 Mile/oră, v=20 Mile/oră, $m=m_1$=10 Mile, $a=b$=20 Mile, t_0=0.

$5T^2-2T-16=0$, $T_1=2$ ore, $T_2=-\frac{8}{5}$ ore.

T_2 se elimină $x=y=15$ Mile.

2° V=400 Km/oră, v=200 Km oră, a=50 Km, b=150 Km, $t_0=1^h$, m_1=200 Km, m=100 Km.

$$12T^2-44T+15=0.$$

$T_1=3^h\,17^m$, $T_2=0^h38^m$.

T_2 se elimină fiindcă $t_0+\frac{m_1}{V}=2^h>T_2$.

x=139.1 Km, y=417,5 Km.

Observare. Dacă $a=b$, $t_0=0$, $m=m_1=0$, $\frac{x}{y}=1$, $x=y$, $T=\frac{2a}{\sqrt{V^2-v^2}}$.

NOTE MATEMATICE

9. — *Despre explicaţie în Matematică.*

D-l profesor *Dimitrie Pompeiu*, termină articolul din No 5 al "R.M.T" c, cu exemplul fracţiei periodice $\frac{1}{7}$, pe care prefăcând-o în fracţie zecimală periodică, găseşte

$$\tfrac{1}{7}=0{,}142\,857\ldots$$

şi observă că:

$$1+8=9$$
$$4+5=9$$
$$2+7=9$$

şi atunci întrebarea: unde e *explicaţia* pentru aceste relaţii?

Interesându-mă în de aproape de chestiunea propusă, am ajuns la explicaţia cerută, explicaţie, înglobată în o nouă teoremă relativă la fracţiile continue $\frac{1}{x}$ de perioadă $2p$.

Teoremă. *Dacă $\frac{1}{x}$ e o fracţie continuă de perioadă $2p$, atunci suma semiperioadelor e 10^p-1.*

In adevăr, fie,

$$\frac{1}{x}=\frac{r}{10^{2p}-1}\quad \therefore\quad r=\frac{(10^p-1)(10^p+1)}{x}.$$

Se pot întâmpla două cazuri:

1) $\frac{10^p-1}{x}=r_1$; atunci $\frac{1}{x}=\frac{r_1}{10^p-1}$;

p, iar nu $2p$, ar fi perioada.

2) $\frac{10^p+1}{x}=1+r_1$; atunci $r=(10^p-1)(1+r_1)$,

sau $r=10^pr_1+10^p-1-r_1$.

Notând: $10^p-1-r_1=r_2$, atunci

$r=10^pr_1+r_2$, unde $r_1+r_2=10^p-1$, c. c. t. d.

Notă. Se observă că:

$$2p=\varphi(x).$$

$\varphi(x)$, fiind indicatorul lui x.

Dacă însă: $p=2p_1$,

iar: $\frac{10^p-1}{x}=\frac{10^{2p_1}-1}{x}=r$,

atunci perioada este $2p_1$.

În exemplul nostru, avem:

$$\frac{1}{7}=\frac{r}{999999},\quad \therefore\quad r=142\,857,$$

fiindcă $\varphi(7)=6=2p\quad \therefore\quad p=3$,

$$\frac{10^p+1}{x}=\frac{1001}{7}=1+\frac{994}{7}=1+142\ \therefore\ r_1=142,$$

$$r_2=999-142=857,$$

$$\begin{array}{ll} 142+ & \text{deci } 1+8=9 \\ \underline{857} & \quad\ 4+5=9 \\ 999 & \quad\ 2+7=9. \end{array}$$

Să luăm un alt exemplu:

$$\frac{1}{13}=\frac{r}{999999}; \qquad r=076\,923,$$

fiindcă: $\varphi(13)=12=2p$; $p=6$ $2p_1$,

deci perioada e $2p_1=6$, iar nu $2p$, pentru că:

$$\frac{10^6-1}{13}=076\,923.$$

Un exemplu interesant ar fi:

$$\frac{1}{17}=\frac{r}{\underbrace{999999\ldots99}_{\text{de 16 ori}}}, \qquad r=05882352\ 94117647,$$

fiindcă $\varphi(17)=16=2p \quad \therefore \quad p=8,$

iar $\dfrac{10^8-1}{17}$ nu e un număr întreg, deci perioada e 16.

ILIE N. CONSTANTINESCU
student.

---

10 — *Sur un système diophantien*

Résoudre le système diophantien

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3=\cdots=l_1+l_2+l_3 \\ a_1^2+a_2^2+a_3^2=b_1^2+b_2^2+b_3^2=\cdots=l_1^2+l_2^2+l_3^2 \\ a_1^n+a_2^n+a_3^n=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \\ a_1^{2n}+a_2^{2n}+a_3^{2n}=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2 \\ b_1^n+b_2^n+b_3^n=\beta_1+\beta_2+\beta_3 \\ b_1^{2n}+b_2^{2n}+b_3^{2n}=\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2 \\ \vdots \\ l_1^n+l_2^n+l_3^n=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \\ l_1^{2n}+l_2^{2n}+l_3^{2n}=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2 \end{cases}$$

n étant un nombre naturel donné.

Solution. J'ai montré comment on peut obtenir des chaînes bigrades à m éléments $(a_1+a_2+a_3,\ b_1+b_2+b_3,\ldots)$ à trois termes par membre (Voir „Sur les Egalités multigrades", par, *A. Gloden*, Luxembourg, 1938, pp. 62—67). Ayant construit une telle chaîne, j'applique le théorème suivant: Étant donnés trois nombres A_1, A_2, A_3 dont la somme est divisible par 3, on aura

$$A_1, A_2, A_3 \overset{p}{=} \frac{2A_2+2A_3-A_1}{3}, \quad \frac{2A_3+2A_2-A_3}{3},$$

$$\frac{2A_1+2A_2-A_3}{3}, \quad (p=1,2).$$

Il suffit de prendre $A_i=a_i^n$, $(i=1,2,3)$, en partant d'une solution de la chaîne bigrade pour laquelle $a_1^n+a_1^n+a_3^n$ est divisible par 3 et successivement $A_i=b_i^n$, $c_i^n\ldots$ jusqu'à l_i^n.

Exemple numérique. Prenons $n=4$

$$\begin{cases} 1,\cdot 22,\ 22\overset{2}{=}2,17,26\overset{2}{=}4,13,28\overset{2}{=}8,8,29 \\ 1^4+22^4+22^4=312\,341+78086+78086 \\ 1^8+22^8+22^8=312\,341^2+78086^2+78086 \\ 2^4+17^4+26^4=360\,326+276\,821+(-96634) \\ 2^8+17^8+26^8=360\,326^2+276\,821^2+(-96634)^2 \\ 4^4+13^4+28^4=428\,726+400\,421+(-185\,674) \\ 4^8+13^8+28^8=428\,726^2+400\,421^2+(-185\,674)^2 \\ 8^4+8^4+29^4=472\,886+472\,886+(-230\,299) \\ 8^8+8^8+29^8=472\,886^2+472\,886^2+(-230\,299)^2 \end{cases}$$

A. GLODEN

---

11. — *Calculul unor sume trigonometrice.*

Îmi propun să calculez sumele

$$S_p=\cos^p a+C_n^1\cos^p(a+b)+C_n^2\cos^p(a+2b)+\cdots+C_n^n\cos^p(a+nb)$$

$$T_p=\sin^p a+C_n^1\sin^p(a+b)+C_n^2\sin^p(a+2b)+\cdots+C_n^n.\sin^p(a+nb)$$

în cazul când $p=1$, 2 şi 3.

1. — Pentru a calcula S_1 şi T_1, înmulţesc prima sumă cu 1 şi cea de a doua cu numărul imaginar i, şi apoi le adun

$$S_1+iT_1=(\cos a+i\sin a)+C_n^1[\cos(a+b)+i\sin(a+b)]+\cdots+C_n^n[\cos(a+nb)+i\sin(a+nb)];$$

ţinând seamă de formula lui *Euler*

$$\text{(E)} \qquad \cos x+i\sin x=e^{ix},$$

şi dând factor comun pe e^{ia}, obţin

$$S_1+iT_1=e^{ia}(1+C_n^1e^{ib}+C_n^2e^{2ib}+\cdots+C_n^ne^{nib}).$$

În paranteză am însă desvoltarea unui binom, deci

$$S_1 + i\,T_1 = e^{ia}(1+e^{ia})^n$$

$$= e^{ia}\cdot e^{\frac{nib}{2}}\left(e^{\frac{ib}{2}}+e^{-\frac{ib}{2}}\right)^n = e^{i\left(a+\frac{nb}{2}\right)}\cdot\left(e^{\frac{ib}{2}}+e^{-\frac{ib}{2}}\right)^n,$$

şi ţinând seama de relaţia (E) şi de o relaţie tot a lui *Euler*

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x,$$

obţin

$$S_1 + iT_1 = 2^n\cdot\cos^n\frac{b}{2}\left[\cos\left(a+\frac{bn}{2}\right)+i\sin\left(a+\frac{bn}{2}\right)\right],$$

de unde avem sumele căutate

$$(1)\qquad S_1 = 2^n\cdot\cos^n\frac{b}{2}\cdot\cos\left(a+\frac{bn}{2}\right)$$

$$(2)\qquad T_1 = 2^n\cdot\cos^n\frac{b}{2}\cdot\sin\left(a+\frac{bn}{2}\right).$$

2. — Pentru a calcula pe S_2 şi T_2, voi aduna şi scădea cele două sume:

$$S_2 + T_2 = 1 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$$

$$(S)\quad S_2 - T_2 = \cos 2a + C_n^1\cos 2(a+b) + C_n^2\cos 2(a+2b) + \cdots + C_n^n\cos 2(a+nb),$$

$$(D)\quad S_2 - T_2 = 2^n\cos(2a+bn)\cdot\cos^n b.$$

Adunând şi scăzând relaţiile (S) şi (D), voiu obţine

$$(3)\qquad S_2 = 2^{n-1}\left[1+\cos(2a+bn)\cos^n b\right]$$

$$(4)\qquad T_2 = 2^{n-1}\left[1-\cos(2a+bn)\cos^n b\right].$$

3. — Calculul sumelor S_3 şi T_3 se face cu ajutorul formulelor

$$4\cos^3 x = \cos 3x + 3\cos x$$

$$4\sin^3 x = 3\sin x - \sin 3x,$$

şi în acest caz calculul sumelor S_3 şi T_3 se reduc la sume de forma S_1 şi T_1; obţin

$$(5)\qquad S_3 = 2^{n-2}\left[3\cos\frac{2a+bn}{2}\cos^n\frac{b}{2} + \cos\frac{3(2a+bn)}{2}\cos^n\frac{3b}{2}\right],$$

$$(6)\qquad T_3 = 2^{n-2}\left[3\sin\frac{2a+bn}{2}\cos^n\frac{b}{2} - \sin\frac{3(2a+bn)}{2}\cos^n\frac{3b}{2}\right].$$

4. — Dacă în (1) şi (2) fac $b=a$, am sumele mai simple

$$(7)\qquad \cos a + C_n^1\cos 2a + C_n^2\cos 3a + \cdots + C_n^n\cos(n+1)a = 2^n\cos\frac{n+2}{2}a\cos^n\frac{a}{2},$$

$$(8)\qquad \sin a + C_n^1\sin 2a + C_n^2\sin 3a + \cdots + C_n^n\sin(n+1)a = 2^n\sin\frac{n+2}{2}a\cos^n\frac{a}{2}$$

şi prin derivarea lor

$$(9)\qquad \sin a + 2C_n^1\sin 2a + 3C_n^2\sin 3a + \cdots + (n+1)C_n^n\sin(n+1)a = 2^{n-1}\cos^{n-1}\frac{a}{2}\left[n\sin\frac{n+3}{2}a + 2\sin\frac{n+2}{2}a\cos\frac{a}{2}\right],$$

$$(10)\qquad \cos a + 2C_n^1\cos 2a + 3C_n^1\cos 3a + \cdots + (n+1)C_n^n\cos(n+1)a = 2^{n-1}\cos^{n-1}\frac{a}{2}\left[n\cos\frac{n+3}{2}a + 2\cos\frac{n+2}{2}a\cos\frac{a}{2}\right].$$

Sumele (7) şi (8) se află şi în „Exercices d'algèbre, d'analyse et de trigonométrie, par *Aubert* et *Papelier*", vol. II, pag. 334.

ION RIZESCU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul LIII, No 12, August 1948. Asuupra unei cuartice periforme, de Ing. *Al. Scodreanu*. Raport asupra premiului de mecanină *„Spiru Haret"*, de Ing. *I. S. Antoniu*, Ing. *Al. Stoenescu*, Ing. *Gabriela Ţiţeica*. Note matematice. Probleme rezolvate şi propuse.

2. *V. G. Cavallaro*: Trigonometria patratica (quadratica). (Estratto dal Bolletino dell'Unione Matematica Italiana, serie II, Anno I, No 5, 1939).

3. *V. G. Cavallaro*: Sulla Nota „Pentagonno regolare e dodecaedro regolare (Id, 1940).

4. *V. G. Cavallaro*: Sulla formula che exprime una distanza variabile in funzione di tre distanz assegnate (Id. 1940).

5. *V. G. Cavallaro* : Sul centro di gravita del semicerchio eterogeneo con denzità proporzionale alla distanza dal centro (Id. 1941).

6. *V. G. Cavallaro :* Fattoriale del triangole e dei poligoni (id. 1926).

7. *V. G. Cavallaro :* Tetraedro trirettangolo (Il Boletino di Matematica, 1948).

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1379. — A', B', C', *fiind punctele unde trei ceviene concurente taie cercul circumscris triunghiului* ABC, *iar* M, N, P, *picioarele bisectoa-*

BIBLIOTECA ASTRA SIBIU

relor interioare unghiurilor A', B', C' *din triunghiurile* BA'C, CB'A, AC'B, *să se arate că dreptele* AM, BN, CP *sunt concurente.*

M. C. POSTELNICESCU

Soluție. Urmărind o figură ușor de construit și ținând seama de o proprietate cunoscută a bisectoarelor unui triunghiu, putem scrie pentru cazul problemei de față relațiile

$$(1)\qquad \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = -\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}, \quad \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = -\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}, \quad \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}.$$

Pe de altă, notând cu R raza cercului circumscris triunghiului ABC, avem relațiile

$$(2)\qquad \begin{cases} \overline{A'B} = R \sin \widehat{A'AB} \\ \overline{A'C} = R \sin \widehat{A'AC} \end{cases}$$

și analoagele lor, în cât (1) devin dacă avem în vedere și orientarea unghiurilor,

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \dfrac{\sin \widehat{A'AB}}{\sin \widehat{A'AC}}, \quad \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \dfrac{\sin \widehat{B'BC}}{\sin \widehat{B'BA}}, \\ \dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \dfrac{\sin \widehat{C'CA}}{\sin \widehat{C'CB}}, \end{cases}$$

Făcând acum produsul relațiilor (3) membru cu membru, obținem

$$(4)\qquad \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\sin \widehat{A'AB}}{\sin \widehat{A'AC}} \cdot \frac{\sin \widehat{B'BC}}{\sin \widehat{B'BA}} \cdot \frac{\sin \widehat{C'CA}}{\sin \widehat{C'CB}}.$$

Cevienele AA', BB', CC' sunt însă concurente, deci conform teoremei directe a lui *Ceva* exprimată sub formă trigonometrică, membrul al doilea al relației (4) are valoarea —1. Urmează atunci conform reciprocei teoremei respective că dreptele AM, BN, CN sunt de asemenea concurente, membrul întâi al relației (4) având aceeași valoare —1.

Soluții date de d-nii: *Dăscălescu Șt. Hristache* (Prof. Focșani), *Mihalcea N. N.* (Lic. Beiuș), *Mircea L. A. Negrea* (Prof. Brăila), *Lt. Gh. Sâmbotin, Stoica N. D-tru* (Lic. m., Tg.-Mureș), *Ștefănescu D. Nic.* (Lic. m., Tg.-Mureș), *și Țițeica I. Ioan* (Lic. Buzău). E. V.

Problema 1715. — *Să se găsească soluțiile întregi ale sistemelor*

$$\begin{cases} x^2 + a y^2 + b z^2 = t^2, \\ x + y + z = t, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = t^2, \\ x + ay + bz = t, \end{cases}$$

unde a și b sunt întregi dați (pozitivi, negativi sau nuli).

A. GLODEN

Soluție. Să considerăm primul sistem, în care facem schimbarea $x = tX$, $y = tY$, $z = tZ$; prima ecuație devine

$$X^2 + aY^2 + bZ^2 = 1,$$

Ecuația reprezintă o cuadrică, ce trece prin A(1, 0, 0) căreia urmează să-i determinăm toate punctele raționale. Vom obține toate punctele raționale ale cuadricei (care nu are puncte izolate), tăind-o cu o dreaptă dusă prin A, de ecuații

$$Y = \frac{u}{w}(X-1), \qquad Z = \frac{v}{w}(X-1),$$

unde u, v, w sunt întregi arbitrari. Găsim

$$X = \frac{a u^2 + b v^2 - w^2}{a u^2 + b v^2 + w^2},$$

deci soluția generală în întregi a primei ecuații din primul sistem este

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= k(a u^2 + b v^2 - w^2), \quad y = 2 k u w, \\ z &= 2 k v w, \quad t = k(a u^2 + b v^2 + w^2), \end{aligned}$$

unde u, v, w sunt întregi arbitrari, iar k întreg sau fracție, astfel aleasă încât x, y, z, t, dați de (1), să fie întregi.

Cu aceste expresii, a doua ecuație a primului sistem se reduce la $u + v = w$, astfel că (1) devine

$$(2)\qquad \begin{aligned} x &= k[a u^2 + b v^2 - (u+v)^2], \quad y = 2 k u (u+v), \\ t &= k[a u^2 + b v^2 + (u+v)^2], \quad z = 2 k v (u+v) \end{aligned}$$

și constitue soluția generală în întregi a primului sistem, cu aceaș restricție în privința lui k.

Soluția generală a primei ecuații din al doilea sistem se obține făcând $a = b = 1$ în (1); găsim

$$(3)\qquad \begin{aligned} x &= k(u^2 + v^2 - w^2), \quad y = k u w, \\ z &= 2 k v w, \quad t = k(u^2 + v^2 + w^2 + w^2), \end{aligned}$$

cu care a doua ecuție devine $a u + b v = w$, deci soluția generală în întregi a sistemului al doilea este

(4) $x=k[u^2+v^2-(au+bv)^2]$, $y=2ku(au+bv)$,
$t=k[u^2+v^2+(au+bv)^2]$, $z=2kv(au+bv)$,

cu aceiaş restricţie pentru k.

Notă. O soluţie cu rezultate apropiate de cele de mai sus, dar sub o formă particulară, a trimis d l *Joh. Mahrenholz.*

M. G.

Problema 2129. — *Să se stabilească identitatea:*

$$\cos 12t+\cos 10t+3\cos 8t+6\cos 6t+7\cos 4t+8\cos 2t+5=32\cos^2 t\cos^2 2t\cos^2 3t.$$

V. ALACI

Soluţie. Notând cu E primul membru şi folosind formula care transformă o sumă de două cosinusuri într'un produs de cosinusuri, avem succesiv:

$$\begin{aligned}
E&=(\cos 12t+\cos 10t)+(\cos 10t+\cos 8t)\\
&\quad+2(\cos 8t+\cos 6t)+4(\cos 6t+\cos 4t)\\
&\quad+3(\cos 4t+\cos 2t)+5(\cos 2t+1)\\
&=2\cos 11t\cos t+2\cos 9t\cos t+4\cos 7t\cos t\\
&\quad+8\cos 5t\cos t+6\cos 3t\cos t+10\cos^2 t\\
&=2\cos t(\cos 11t+\cos 9t+2\cos 7t+4\cos 5t\\
&\quad+3\cos 3t+5\cos t)\\
&=2\cos t[(\cos 11t+\cos 7t)+(\cos 9t+\cos 5t)\\
&\quad+(\cos 7t+\cos 3t)+3(\cos 5t+\cos t)\\
&\quad+2(\cos 3t+\cos t)]\\
&=2\cos t(2\cos 9t\cos 2t+2\cos 7t\cos 2t\\
&\quad+2\cos 5t\cos 2t+6\cos 3t\cos 2t+4\cos 2t\cos t,\\
&=4\cos t\cos 2t(\cos 9t+\cos 7t+\cos 5t+3\cos 3t\\
&\quad+2\cos t)\\
&=4\cos t\cos 2t[(\cos 9t+\cos 5t)+(\cos 7t+\cos 3t)\\
&\quad+2(\cos 3t+\cos t)]\\
&=4\cos t\cos 2t(2\cos 7t\cos 2t+2\cos 5t\cos 2t\\
&\quad+4\cos 2t\cos t)\\
&=8\cos t\cos^2 2t(\cos 7t+\cos 5t+2\cos t)\\
&=8\cos t\cos^2 2t[(\cos 7t+\cos t)+(\cos 5t+\cos t)]\\
&=8\cos t\cos^2 2t(2\cos 4t\cos 3t+2\cos 3t\cos 2t)\\
&=16\cos t\cos^2 2t\cos 3t(\cos 4t+\cos 2t)\\
&=16\cos t\cos^2 2t\cos 3t.2\cos 3t\cos t\\
&=32\cos^2 t\cos^2 2t\cos^2 3t.
\end{aligned}$$

Astfel identitatea dată este stabilită.

Soluţii bune date de d-nii: *Bolcaş Victor* (Lic. Beiuş), *Bossie Boris* (P. T), *Chiriac C-tin* (Of. de Marină), *Constantinescu Ilie* (P. T.), *Costea Florian* (Lic. Beiuş), *Cotariu Marcel* (Brăila), *Dăscălescu Hristache* (R.-Sărat), *Georgescu Nicolin* (P. T.), *Gligor Ioan* (student, Cluj), *Gloden A.* (Luxemburg), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Novac Ioan* (P. T), *Simeso Carol* (P. T), *Soare Secui* (Iaşi) şi *Tincu C-tin* (P. T.).

Soluţia autorului. Să pornim de la identitatea algebrică

$$(x^2+1)(x^4+1)(x^6+1)=x^{12}+x^{10}+2x^6+x^4+x^2+1$$

şi să împărţim ambii membrii prin x^6, avem

$$(1)\qquad \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=\left(x^6+\frac{1}{x^6}\right)+\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)+2+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right).$$

Dacă facem substituţia, $x=e^{it}$ $(i=\sqrt{-1})$ şi folosim formula lui *Euler*

$$x^\alpha+\frac{1}{x^\alpha}=e^{i\alpha t}+e^{-i\alpha t}=2\cos\alpha t,$$

atunci relaţia (1), simplificată prin 2, devine

$$4\cos t\cos 2t\cos 3t=\cos 6t+\cos 4t+\cos 2t+1.$$

Ridicând această relaţie la patrat şi în urmă făcând unele transformări evidente, obţinem succesiv;

$$\begin{aligned}
16\cos^2 t\cos^2 2t\cos^2 3t&=\cos^2 6t+\cos^2 4t+\cos^2 2t\\
&\quad+1+2\cos 6t\cos 4t+2\cos 6t\cos 2t+2\cos 6t\\
&\quad+2\cos 4t\cos 2t+2\cos 4t+2\cos 2t\\
&=\frac{1+\cos 12t}{2}+\frac{1+\cos 8t}{2}+\frac{1+\cos 4t}{2}\\
&\quad+1+(\cos 10t+\cos 2t)+(\cos 8t+\cos 4t)\\
&\quad+2\cos 6t+(\cos 6t+\cos 2t)+2\cos 2t,
\end{aligned}$$

relaţie, care după unele simplificări devine

$$32\cos^2 t\cos^2 2t\cos^2 3t=\cos 12t+2\cos 10t+3\cos 8t+6\cos 6t+7\cos 4t+8\cos 2t+5,$$

care este tocmai identitatea cerută.

Aceasta este metoda folosită de autor pentru a ajunge la identitatea propusă şi ea poate sugera corespondenţilor noştri formarea altor identităţi analoage.

Au folosit această metodă, dar prin calcule prea lungi, d-nii: *Barbul Virgil* (P. T.) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 2137. — *Se dă tringhiul* A B C. $\sphericalangle A = 135^0$. *Să se stabilească relaţia:*

$$b = \frac{\sqrt{2}\, c\, sp\, B\, sp(B+45^0)}{sp(B+135^0)}.$$

C-PT. C. V. COSTACHESCU

Soluţie. Construim triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 135^0$. Ducem segmentul AD astfel ca $\sphericalangle ACD = 45^0$ (D pe BC) şi în triunghiul semidreptunghic ACD, în care, evident că $\sphericalangle ADC$ este obtuz, aplicăm teorema din *Trigonometria patratică*, p. 47 şi avem

$$(1) \qquad b = \frac{AD}{\sqrt{2}\, sp(B+135^0)}.$$

Dar din triunghiul dreptunghic ADB, avem

$$AD = c\, tg\, B = \frac{c\, sp\, B}{1 - cp\, B},$$

astfel că relaţia (1) devine

$$(2) \qquad b = \frac{c\, sp\, B}{\sqrt{2}\, sp(B+135^0)} \cdot \frac{1}{1 - sp\, B}.$$

De altă parte, fiindcă $0 < 45^0 + B < 90^0$, formula (20) din *„Trig. patratică"*, p. 17, ne dă

$$sp(45^0+B) = \frac{sp\,45^0 + sp\,B - 2\,sp\,45^0\, sp\,B}{1 - 2\,sp\,45^0\, sp\,B} =$$

$$\frac{\frac{1}{2} + sp\,B - sp\,B}{1 - sp\,B} = \frac{1}{2(1 - sp\,B)},$$

de unde rezultă

$$\frac{1}{1 - sp\,B} = 2\, sp(45^0 + B),$$

valoare care întrodusă în (2), după simplificare, ne dă

$$b = \frac{\sqrt{2}\, sp\, B\, sp(B+45^0)}{sp(B+135^0)},$$

tocmai relaţia cerută.

Soluţii bune date de d-ra *Măran Ana* (P. T.) şi de d-nii: *Anton Ioan* (Lic. Beiuş), *Chiriac C-tin*, *Maliţa Mircea* (Lic. Beiuş), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Sabău Mihai* (P. T.), *Tincu C-tin* (P. T) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 2202 — *Să se găsească patru numere de câte trei cifre, două începând cu 4 şi două începând cu 5, ştiind că suma lor este 1944.*

G-L. GH. BUICLIU

Soluţie. Fie

$$(1) \qquad 4ab + 4a'b' + 5\alpha\beta + 5\alpha'\beta' = 1944$$

o soluţie a problemei. De oarece

$$4 + 4 + 5 + 5 = 18$$

înseamnă că va trebui ca

$$9 < a + a' + \alpha + \alpha' + \varepsilon < 20$$

ε fiind cifra zecilor adunării unităţilor b, b', β şi β'.

Se observă că trebuie să avem corespondenţa:

$$\therefore \quad \begin{aligned} S_u &= b + b' + \beta + \beta' = 4,\ 14,\ 24,\ \text{sau}\ 34 \\ S_z &= a + a' + \alpha + \alpha' = 14,\ 13,\ 12,\ \text{sau}\ 11. \end{aligned}$$

Problema revine la a găsi 2 grupe de câte 4 cifre ale căror sume să fie S_u şi S_z corespunzător.

Se observă că ordinea cifrelor b, b', β, β' sau a, a'. α, α' poate fi oarecare, ceiace înseamnă că odată găsită o grupă de 4 cifre, de exemplu b, b', β, β' celelalte soluţii se obţin prin permutări. Dacă cifrele b, b', β, β' sunt diferite între ele se obţin $P_4 = 24$ soluţii de grupe. Dacă 2 din aceste cifre sunt egale se vor obţine 12 soluţii. Dacă 3 cifre sunt egale între ele se obţin 4 grupe de soluţii, iar dacă toate cifrele sunt egale între ele se obţine o singură soluţie.

Acelaş număr de soluţii se obţine şi cu grupele de cifre a, a' α, α'.

Fie U numărul de soluţii al grupului cifrelor unităţilor şi Z acela al grupului cifrelor zecilor. La fiecare Z corespunzând U soluţii pentru cifrele unităţilor, înseamnă că vom avea în total U×Z soluţii. Vom căuta în cele ce urmează numai soluţiile în care

$$b \leqq b' \leqq \beta \leqq \beta' \quad \text{şi} \quad a \leqq a' \leqq \alpha \leqq \alpha'$$

pe care le vom numi *soluţii primitive*, celelalte soluţii se obţin din acestea prin permutări şi le vom numi *soluţii derivate*.

Pentru a obţine o soluţie, de exemplu în cazul

$$S_u = b + b' + \beta + \beta' = 14$$

procedăm în felul următor. Dăm lui β' cea mai mare valoare posibilă, 9 rămâne

$$b + b' + \beta = 5.$$

Dăm lui β cea mai mare valoare posibilă 5 şi rămâne

$$b = b' = 0$$

deci *soluţia primitivă*.

$$b = 0,\ b' = 0,\ \beta = 5,\ \beta' = 9.$$

Dăm acum lui β valoarea următoare 4 şi obţinem o nouă soluţie primitivă

$$b=0,\ b'=1,\ \beta=4,\ \beta'=9$$

şi aşa mai departe. Se procedează la fel cu a, a', α, α'.

Urmând această cale găsim rezultatele din următoarele tablouri.

1°. $S_u=4$ şi $S_z=14$. Avem tablourile:

S_u

b	0	0	0	0	1
b'	0	0	0	1	1
β	0	1	2	1	1
β'	4	3	2	2	1

S_z

a	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	2	0	0	0	1	0	1	1	2
a'	0	1	2	1	0	1	2	1	3	2	2	0	1	2	1	3	2	3	2
α	5	4	3	3	6	5	4	4	3	3	2	7	5	5	5	4	4	3	3
α'	9	9	9	9	8	8	8	8	8	8	8	7	8	7	7	7	7	7	7

a	0	1	0	1	0	1	2	2	0	1	2	1	2	2	3
b	2	1	3	2	4	3	2	3	4	3	2	4	3	4	3
α	6	6	5	5	4	4	4	3	5	5	5	4	4	4	4
α'	6	6	6	6	6	6	6	6	5	5	5	5	5	4	4

Adică 5 *soluţii primitive* pentru S_u şi 34 *soluţii primitive* pentru S_z sau în total $5\times 34=170$ *soluţii primitive*.

2°. $S_u=14$ şi $S_z=13$.

Găsim pentru S_u alte 34 soluţii primitive găsite la 1° pentru $S_{z'}$, iar pentru S_z, soluţiile din tabloul

a	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	2	0	0	1	0	1
a'	0	1	2	0	1	2	1	2	0	1	2	1	3	2	2	1	2	1	3	2
α	4	3	2	5	4	3	3	2	6	5	4	4	3	3	2	6	5	5	4	4
α'	9	9	9	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7	7	7	6	6	6	6	6

a	1	2	0	1	0	1	2	2	1	2
a'	3	2	3	2	4	3	2	3	4	3
α	3	3	5	5	4	4	4	3	4	4
α'	6	6	5	5	5	5	5	5	4	4

Total $34\times 30=1020$ *soluţii primitive*.

3°. $S_u=24$ şi $S_z=12$. Se găsesc tablourile următoare:

b	0	1	2	3	0	1	2	3	1	2	3	4	3	4	5	0	1	2	3	4
b'	6	5	4	3	7	6	5	4	7	6	5	4	6	5	5	8	7	6	5	4
β	9	9	9	9	8	8	8	8	7	7	7	7	6	6	5	8	8	8	8	8
β'	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	8	8	8	8	8

b	2	3	4	4	5	3	4	5	5	6
b'	7	6	5	6	5	7	6	5	6	6
β	7	7	7	6	6	7	7	7	6	6
β'	8	8	8	8	8	7	7	7	7	6

a	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	2
a'	0	1	1	0	1	2	1	0	1	2	1	2	1	2	1	2	1	3	2	2
α	3	2	1	4	3	2	2	5	4	3	3	2	5	5	5	4	4	3	3	2
α'	9	9	9	8	8	8	8	7	7	7	7	7	6	5	5	6	6	6	6	6

a	0	1	0	1	1	2	0	1	2	3
a'	2	1	3	2	3	2	4	3	2	3
α	5	5	4	4	3	3	4	4	4	3
α'	5	5	5	5	5	5	4	4	4	3

Total $30\times 30=900$ *soluţii primitive*.

4°. $S_u=34$ şi $S_z=11$, avem pentru S_u soluţiile $\beta=\beta'=b'=9$, $b=7$ şi $\beta=\beta'=9$, $b=b'=8$ iar pentru S_z tabloul:

a	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0
a'	0	1	0	1	1	0	1	2	1	0	1	2	1	2	1	2	1	3
α	2	1	3	2	1	4	3	2	2	5	4	3	3	2	5	4	4	3
α'	9	9	8	8	8	7	7	7	7	6	6	6	6	6	5	5	5	5

a	1	2	0	1	1	2	2
a'	2	2	3	2	3	2	3
α	3	2	4	4	3	3	3
α'	5	5	4	4	4	4	3

Total $2\times 25=50$ *soluţii primitive*.

Problema are deci

$$170+1020+900+50=2140$$

soluţii primitive, din care se deduc *soluţiile derivate* prin permutări, aşa cum s'a arătat la început.

După cum se vede, problema este un exerciţiu uşor, care nu cere de cât examinarea cu atenţie şi cu ceva răbdare a diferitelor cazuri care se pot prezenta.

Problema a fost compusă la 1 Ianuarie 1944.

Este interesant numărul de soluții găsit de rezolvitori. De și în dauna consumărei din spațiul restrâns al revistei, citez după cum urmează rezultatele la care au ajuns rezolvitorii. În paranteza care urmează numelui, este scris cu cifre numărul de soluții găsite și cu litere cursive numărul de soluții pe care le-au întrevăzut: *Avram Gh. Cristache* (4, *multe soluții*); *Anton Ioan* (4); *Birănaș T. Ioan* (1); *Bodea I.* (3, *în câte feluri vom combina condițiile...*); *Brașoveanu Gh.* (4, *destul de multe și fără interes*); *Chiriac Const.* (6, *nedeterminat*); *Cotariu D. Marcel* (1, *în multe moduri*); *Florian D. Costea* (4, *o mulțime de numere*); *Giurconiu Gh. Marcel* (2, *nenumărate*); *Miclea N.* (6, *multe astfel de numere*); *Popescu I. Barbu* (1, *o infinitate*); *Szabo V. Tulin* (1, *mai multe soluții*); *Tincu C. C.* (*Total 73 soluții*); *Vrânceanu Gh. Gh.* (9. *și alte multe numere*).

În afară de d-l Tincu C. C. toți ceilalți s'au ferit de preciziuni, unul făcând chiar aprecieri complect eronate „o infinitate".

G-ral Gh. B.

Problema 2282. — *Se construesc trei patrate* $abcd$, $cefg$, $fhij$ *așa în cât vârfurile* a, c, f, j *să fie în linie dreaptă. Să se scrie în fie-care vârf câte un număr astfel ca cele 10 numere să fie consecutive, iar dublul sumei numerelor de pe linia* $acfj$ *să fie egal cu suma tuturor numerelor scrise în celelalte vârfuri ale patratului.*

G-l Gh. Buicliu

Soluție. Problema revine la a găsi 10 numere întregi consecutive $n, n+1, \ldots, n+9$ astfel ca dublul sumei a 4 din ele să fie egal suma celorlalte 6, ceiace revine la a spune că *triplul sumei a patru din ele să fie egal cu suma tuturor celor 10 numere.*

Fie S suma celor 10 numere și S_4 suma a 4 din ele.

Avem

$$(1) \qquad S = 10n + 45 = 3S_4 \quad \therefore \quad n = 3t.$$

Cele 10 numere se găsesc deci în șirul

$$(2) \qquad 3t,\ 3t+1,\ 3t+2, \ldots, 3t+9,$$

în care trebuie găsite valorile lui t. Dacă se adună 4 din numerele șirului (2), se găsește

$$(3) \qquad S_4 = 12t + r,$$

unde r este suma a 4 din numerele $0, 1, 2, \ldots, 9$.

Sau ținând seamă de (1) se deduce

$$(4) \quad 36t + 3r = 30t + 45 \quad \therefore \quad 2t = 15 - r.$$

care arată că r este *nepereche* și cel *mult egal cu 15.* Cum din valorile lui r se vede că cea mai mică valoare a lui este 6, rezultă că r nu poate fi considerat de cât între numerele

$$r = 7,\ 9,\ 11,\ 13 \text{ și } 15,$$

care duse în (4) dau pentru t valorile

$$t = 4,\ 3,\ 2,\ 1 \text{ și } 0.$$

Prin urmare, grupele de 10 numere consecutive căutate sunt:

I.	12,	13,	14,	15,	16,	17,	18,	19,	20,	21;
II.	9,	10,	11,	12,	13,	14,	15,	16,	17,	18;
III.	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12,	13,	14,	15;
IV.	3,	4,	5,	6,	7,	8,	6,	10,	11,	12;
V.	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9.

Este suficient a găsi acum grupul de 4 numere de înscris pe linia $acfj$, căci celelalte 6 rezultă imediat. Pentru fiecare din șirurile I, II, III, IV, V se calculează S_4 din (3).

Astfel pentru șirul I se găsește

$$S_4 = 12 \times 4 + 7 = 55.$$

Se caută deci în grupul I, 4 numere a căror sumă este 55, procedând prin încercări, căutând limite pentru S_4 spre a nu face toate combinările de 10 numere luate câte 4. Astfel la grupa I se observă că suma primelor 4 numere este 54, iar a următoarelor 4 numere este 58, deci nu se va cauta S_4 de cât între 4 din primele 5 numere. Procedând pe această cale se găsesc următoarele soluții:

Grupa I: $S_4 = 55 = 12+13+14+16$;

Grupa II: $S_4 = 45 = 9+10+11+15$
$= 9+10+12+14$
$= 9+11+12+13$;

Grupa III: $S_4 = 35 = 6+7+8+14 = 6+7+9+13$
$= 6+7+10+12 = 6+8+9+12$
$= 6+8+10+11 = 7+8+9+11$;

Grupa IV: $S_4 = 25 = 3+4+6+12 = 3+4+7+11$
$= 3+4+8+10 = 3+5+6+11$
$= 3+5+7+10 = 3+5+8+9$
$= 4+5+6+10 = 4+5+7+9$
$= 4+6+7+8$;

Grupa V: $S_4 = 15 = 0+1+5+9 = 0+1+6+8$
$= 0+2+4+9 = 0+2+5+8$
$= 0+2+6+7 = 0+3+4+8$
$= 0+3+5+7 = 0+4+5+6$
$= 1+2+3+9 = 1+2+4+8$

$$=1+2+5+7=1+3+4+7$$
$$=1+3+5+6=2+3+4+6.$$

Problema are în total 33 de soluții.

D-l *Dimitrie D. Stancu* (student, Cluj) a rezolvat foarte bine și complect problema găsind toate soluțiile.

S-au mai primit trei soluții la care rezolvitorii au încercat căi complect greșite, sau au interpretat enunțul altfel de cum este.

Se poate pune o problemă analoagă pentru n numere în progresie aritmetică astfel ca suma a k din ele să fie de p ori suma celolalte $n-k$.

G-l. Gh. B.

Problema 2502. — *Dacă* X *și* Y *sunt funcții date, derivabile, de variabila* x, *să se demonstreze că funcțiile,*

$$u = a \operatorname{arc\,tg} i \frac{\sqrt[a]{(1-iX)^b(1-iY)^c} - k\sqrt[a]{(1+iX)^b(1+iY)^c}}{\sqrt[a]{(1-iX)^b(1-iY)^c} + k\sqrt[a]{(1+iX)^b(1+iY)^c}},$$
$$v = b \operatorname{arc\,tg} X + c \operatorname{arc\,tg} Y;$$

au aceiași derivată ($i = \sqrt{-1}$, a, b, c, k constante date).

V. ALACI

Soluția autorului. Notând,

$$X = \operatorname{tg}\varphi, \qquad Y = \operatorname{tg}\psi,$$

avem

$$v = b\varphi + c\psi \tag{1}$$

și apoi

$$u = a \operatorname{arc\,tg} i \frac{(1-i\operatorname{tg}\varphi)^{\frac{b}{a}}(1-i\operatorname{tg}\psi)^{\frac{c}{a}} - k(1+i\operatorname{tg}\varphi)^{\frac{b}{a}}(1+i\operatorname{tg}\psi)^{\frac{c}{a}}}{(1-i\operatorname{tg}\varphi)^{\frac{b}{a}}(1-i\operatorname{tg}\psi)^{\frac{c}{a}} + k(1+i\operatorname{tg}\varphi)^{\frac{b}{a}}(1+i\operatorname{tg}\psi)^{\frac{c}{a}}}$$
$$= a \operatorname{arc\,tg} i \frac{(\cos\varphi - i\sin\varphi)^{\frac{b}{a}}(\cos\psi - i\sin\psi)^{\frac{c}{a}} - k(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{b}{a}}(\cos\psi + i\sin\psi)^{\frac{c}{a}}}{(\cos\varphi - i\sin\varphi)^{\frac{b}{a}}(\cos\psi - i\sin\psi)^{\frac{c}{a}} + k(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{b}{a}}(\cos\psi + i\sin\psi)^{\frac{c}{a}}}.$$

Conform formulei lui *Euler* mai putem scrie

$$u = a \operatorname{arc\,tg} i \frac{e^{-i\frac{b}{a}\varphi} e^{-i\frac{c}{a}\psi} - k e^{i\frac{b}{a}\varphi} e^{i\frac{c}{a}\psi}}{e^{-i\frac{b}{a}\varphi} e^{-i\frac{c}{a}\psi} + k e^{i\frac{b}{a}\varphi} e^{i\frac{c}{a}\psi}}$$
$$= a \operatorname{arc\,tg} i \frac{e^{-i\frac{b\varphi+c\psi}{a}} - k e^{i\frac{b\varphi+c\psi}{a}}}{e^{-i\frac{b\varphi+c\psi}{a}} + k e^{i\frac{b\varphi+c\psi}{a}}}$$
$$= a \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{i} \frac{k^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{b\varphi+c\psi}{a}} - k^{-\frac{1}{2}} e^{-i\frac{b\varphi+c\psi}{a}}}{k^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{b\varphi+c\psi}{a}} + k^{-\frac{1}{2}} e^{-i\frac{b\varphi+c\psi}{a}}}.$$

Dar

$$k^{\frac{1}{2}} = e^{i\frac{\log k}{2i}},$$

astfel că avem

$$u = a \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{i} \frac{e^{i\left(\frac{b\varphi+c\psi}{a} + \frac{\log k}{2i}\right)} - e^{-i\left(\frac{b\varphi+c\psi}{a} + \frac{\log k}{2i}\right)}}{e^{i\left(\frac{b\varphi+c\psi}{a} + \frac{\log k}{2i}\right)} + e^{-i\left(\frac{b\varphi+c\psi}{a} + \frac{\log k}{2i}\right)}},$$

sau

$$\frac{u}{a} = \operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{b\varphi+c\psi}{a} + \frac{\log k}{2i}\right) = \frac{b\varphi+c\psi}{a} + \frac{\log k}{2i}. \tag{2}$$

Folosind relația (1), putem scrie încă

$$\frac{u}{a} = \frac{v}{a} + \frac{\log k}{2i},$$

sau

$$u - v = a\frac{\log k}{2i}.$$

Diferența între u și v fiind constantă, rezultă că funcțiile date u și v au aceiași derivată.

Soluția 2-a. Ținând seamă de relația cunoscută,

$$\operatorname{arc\,tg}\alpha = \frac{1}{2i}\log\frac{1+i\alpha}{1-i\alpha}, \tag{1}$$

funcția u se mai poate scrie

$$u = \frac{a}{2i}\log\frac{1 - \frac{\sqrt[a]{(1-iX)^b(1-iY)^c} - k\sqrt[a]{(1+iX)^b(1+iY)^c}}{\sqrt[a]{(1-iX)^b(1-iY)^c} + k\sqrt[a]{(1+iX)^b(1+iY)^c}}}{1 + \frac{\sqrt[a]{(1-iX)^b(1-iY)^c} - k\sqrt[a]{(1+iX)^b(1+iY)^c}}{\sqrt[a]{(1-iX)^b(1-iY)^c} + k\sqrt[a]{(1+iX)^b(1+iY)^c}}},$$

sau

$$u = \frac{a}{2i}\log\frac{\sqrt[a]{(1+iX)^b(1+iY)^c}}{\sqrt[a]{(1-iX)^b(1-iY)^c}}$$

$$= \frac{a}{2i}\log k + \frac{a}{2i}\log\left(\frac{1+iX}{2-iX}\right)^{\frac{b}{a}} + \frac{a}{2i}\log\left(\frac{1+iY}{1-iY}\right)^{\frac{c}{a}}$$

$$= \frac{a}{2i}\log k + \frac{b}{2i}\log\frac{1+iX}{1-iX} + \frac{c}{2i}\log\frac{1+iY}{1-iY}.$$

În virtutea relației (1) și a expresiei funcției v, mai putem scrie

$$u = \frac{a}{2i}\log k + b\operatorname{arc\,tg} X + c\operatorname{arc\,tg} Y = \frac{a}{2i}\log k + v$$

și prin urmare funcțiile u și v au aceiași derivată.

Soluții bune date de d-ra *Crăciun Sylvia* (P. T) și de d-ni: *Cioară Alexandru* (P. T.), *De Șabota Ioan* (Lic. Beiuș), *Deutsch Emeric* (P. T.), *Gherlan Vasile* (P. T), *Man Octavian* (student, Cluj), *Nemoianu C-tin* (P. T), *Pantea Alexandru* (Lic. Beiuș), *Popa Pavel* (Lic. Oradea), *Popa Septimiu* (Lic. Beiuș), *Seracin Eugen* (P. T.), *Simeon Liviu* (P. T.), *Teodorescu Petre* (Lic. Matei Basarab, București) și *Zelingher N.*

Problema 2619. — *Să se studieze și să se reprezinte graficul funcției*

$$y = \sin x - sp\, x.$$

Să se calculeze apoi aria cuprinsă între arcul de curbă construit și axa Ox, *corespunzătoare intervalului* $(0, \pi)$

V. ALACI

Soluție dată de d-l Prof. Eugen Vișa. Funcția dată, ca diferență a două funcții periodice, de perioadă 2π, fiind ea însăși periodică, de aceiași perioadă, este suficient a o studia în intervalul $(0, 2\pi)$, care, la rândul său, poate fi încă redus la intervalul $(0, \pi)$ și chiar la intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

În adevăr, notând pentru circumstanță această funcție prin simbolul $f(x)$, adică punând,

$$(1) \qquad f(x) = \sin x - sp\, x,$$

în virtutea relațiilor cunoscute,

$$(2) \qquad \begin{cases} \sin(\pi + x) = -\sin(\pi - x) \\ sp(\pi + x) = -\, sp(\pi - x) \end{cases}$$

deducem în prealabil,

$$(3) \qquad f(\pi + x) = -f(\pi - x),$$

ceeace arată că, în intervalul $(0, 2\pi)$, curba reprezentativă corespunzătoare este simetrică față de punctul de coordonate $(\pi, 0)$. De asemenea, în virtutea relațiilor,

$$(4) \qquad \begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ sp\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= sp\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \end{aligned}$$

avem,

$$(5) \qquad f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

ceeace arată apoi că, în intervalul $(0, \pi)$, curba reprezentativă a funcției date este simetrică față de dreapta de ecuație

$$(6) \qquad x = \frac{\pi}{2}$$

și astfel e învederat prin urmare că studiul acestei funcții poate fi redus la intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Cum însă, în intervalul astfel redus,

$$(7) \qquad sp\, x = \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{\sin x}{\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)},$$

urmează că funcția dată este echivalentă în acest interval cu următoarea

$$(8) \qquad y = f(x) = \sin x - \frac{\sin x}{\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)},$$

prima ei derivată găsindu-se a fi,

$$(9) \qquad y' = f'(x) = \cos x - \frac{1}{2\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Pentru a determina acum zerorile acestei prime derivate, care se prezintă tot sub forma unei diferențe, vom ține odată seama că, în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, primul ei termen, $\cos x$ este continu și descrescător dela 1 la 0. Pentru al doilea termen,

$$\frac{1}{2\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)},$$

care e de asemenea continu, vom observa întâi, că, x variind dela 0 la $\frac{\pi}{2}$, $x - \frac{\pi}{4}$ variază dela $-\frac{\pi}{4}$

la $+\frac{\pi}{4}$, deci $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ creşte întâi dela $\frac{\sqrt{2}}{2}$ la $+1$, în intervalul $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$, apoi descreşte dela 1 la $\frac{\sqrt{2}}{2}$, în întervalul $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$. Deci $\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ creşte dela $\frac{1}{2}$ la 1, apoi scade dela 1 la $\frac{1}{2}$. Deci, $2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ creşte del 1 la 2, apoi scade dela 2 la 1. Deci $\frac{1}{2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$ scade dela 1 la $\frac{1}{2}$, apoi creşte dela $\frac{1}{2}$ la 1.

Astfel dară, în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, cum atât $\cos x$ cât şi $\frac{1}{2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$ sunt continue şi descrescătoare, diferenţa lor nu se mai anulează în acest interval, după ce observăm că este odată nulă pentru $x=0$.

În intervalul $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ însă, $\cos x$ continuând a creşte dela $\frac{\sqrt{2}}{2}$ la 1, iar $\frac{1}{2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$, descrescând continu dela $1>\frac{\sqrt{2}}{2}$ la $\frac{1}{2}<1$, diferenţa lor se va anula în mod necesar odată şi numai odată în acest interval.

Urmează deci că derivata y' are o rădăcină şi numai una în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, anume în a doua jumătate a lui, $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, care, în grade, este echivalent intervalului $(45^0, 90^0)$.

Pentru a găsi aceasta rădăcină, avem de rezolvat ecuaţia

$$\cos x - \frac{1}{2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} = 0,$$

echivalentă încă, la rândul său, ecuaţiei,

$$\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos x = \frac{1}{2}$$

şi din care, prin logaritmare, deducem următoarea, de asemenea echivalentă,

$$(10)\quad 2\log\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\log\cos x = \bar{1},69897.$$

Cum ştim însă că rădăcina acestei ecuaţii e cuprinsă între 45^0 şi 90^0, notând primul ei membru cu $\varphi(x)$, adică punând

$$(11)\quad \varphi(x) = 2\log\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\log\cos x,$$

avem de căutat valoarea lui x pentru care avem

$$(12)\quad \varphi(x) = \bar{1},69897.$$

Ţinând seama de (11), după câteva încercări făcute cu ajutorul tablelor de logaritmii funcţiilor trigonometrice, deducem că x e cuprins între 58^0 şi 59^0, având anume,

$$\begin{cases} \varphi(58^0) = 2\log\cos(58^0-45^0)+\log\cos 58^0 \\ \varphi(59^0) = 2\log\cos(59^0-45^0)+\log\cos 59^0, \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} \varphi(58^0) = 2\log\cos 13^0+\log\cos 58^0 \\ \varphi(59^0) = 2\log\cos 14^0+\log\cos 59^0, \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} \varphi(58^0) = 2\,.\,\bar{1},98872+\bar{1},72421 \\ \varphi(59^0) = 2\,.\,\bar{1},98690+\bar{1},71184, \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} \varphi(58^0) = \bar{1},97744+\bar{1}\,72421 = \bar{1},70165 \\ \varphi(59^0) = \bar{1},97380+\bar{1},71184 = \bar{1},68564, \end{cases}$$

valori care sunt respectiv superioară şi inferioară lui $\bar{1},69897$.

Ducând acum aproximaţia mai departe, deducem în acelaş mod că rădăcina căutată e cuprinsă între $58^0\,10'$ şi $58^0\,11'$, pentru aceste valori având respectiv,

$$\begin{cases} \varphi(58^0\,10') = 2\log\cos 13^0\,10'+\log\cos 58^0\,10' \\ \varphi(58^0\,10') = 2\log\cos 13^0\,11'+\log\cos 58^0\,11', \end{cases}$$

adică

$$\begin{cases} \varphi(58^0\,10') = 2\,.\,\bar{1},98843+\bar{1},72218 \\ \varphi(58^0\,11') = 2\,.\,\bar{1},98840+\bar{1},72198, \end{cases}$$

deci

$$\begin{cases} \varphi(58^0\,10') = \bar{1},97686+\bar{1},72218 = \bar{1},69904 \\ \varphi(58^0\,11') = \bar{1},97680+\bar{1},72198 = \bar{1},69878, \end{cases}$$

valori care sunt de asemenea, respectiv superioară şi inferioară lui $\bar{1}69897$.

Pentru a găsi acum numărul de secunde s, tot cu aproximație bine înțeles, întrebuințăm metoda de interpolare prin părți proporționale. Avem anume

$$s = \frac{\varphi(58^\circ 10') - \varphi(58^\circ 10' s'')}{\varphi(58^\circ 10') - \varphi(58^\circ 11')} \cdot 60$$

$$= \frac{\bar{1},69904 - \bar{1},69897}{\bar{1},69904 - \bar{1}69878} \cdot 60 = \frac{7}{26} \cdot 60$$

$= 16''$ aproximativ.

Urmează astfel că, rădăcina căutată a primei derivate, cu aproximație de 1 secundă, este

(13) $$x_M \cong 58^\circ 10' 16'',$$

valoare pentru care, funcția prezintă evident un maxim, derivata trecând dela valori pozitive, la valori negative. Exprimată în radiani, valoarea rădăcinii de mai sus este,

(13′) $$x_M = (58^\circ 10' 16'') \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{2687}{2025}\pi \simeq 1,0153.$$

Pentru a calcula acum valoarea maximă a funcției, corespunzătoare acestei valori a lui x, vom transforma în prealabil expresia (8) a ei, în alta calculabilă prin logaritmi. Operațiile de transformare sunt destul de simple și, din acest punct de vedere, se găsește anume că funcția dată se poate pune sub forma,

(14′) $$y = f(x) = \frac{2 \sin x \sin \frac{x}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

adică, în grade,

(14′) $$y = f(x) = \frac{2 \sin x \sin \frac{x}{2} \sin\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right)}{\cos(x - 45^\circ)}.$$

Introducând aici valoarea lui x_M din (13) și notând valoarea corespunzătoare a lui y, prin y_M avem,

$$y_M = f(x_M) \cong \frac{2 \sin 58^\circ 10' 16'' \sin 29^\circ 5' 8'' \sin 15^\circ 54' 52''}{\cos 13^\circ 10' 16''}$$

de unde, aplicând apoi logaritmi, deducem,

$$\log y_M \cong \log 2 + \log \sin 58^\circ 10' 16'' + \log \sin 29^\circ 5' 8'' + \log \sin 15^\circ 54' 52'' + \operatorname{colog} \cos 13^\circ 10' 16''$$
$$\cong 0,30103 + \bar{1},92923 + \bar{1},68674 + \bar{1},43807 + 0,01158 \cong \bar{1},36665$$

ceeace, cu patru zecimale ne dă

(15) $$y_M \cong \operatorname{antilog} \bar{1},36665 \cong 0,2326.$$

Puncte de inflexiune. Plecând de la prima derivata, se găsește că derivata a 2-a este

(16) $$y'' = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sin^3\left(\frac{\pi}{4} + x\right)} - \sin x.$$

Derivata primului termen,

(17) $$z = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sin^3\left(\frac{\pi}{4} + x\right)},$$

al acestei a doua derivate, este

(18) $$z' = -\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + 3\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sin^4\left(\frac{\pi}{4} + x\right)},$$

care fiind negativă, însemnează că acest termen e continu descrescător. În intervalul $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ el descrește anume dela 2 la 0, iar în intervalul $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, dela 0 la -2.

În ceeace privește acum al doilea termen al derivatei y'', adică $\sin x$, acesta crește în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ dela 0 la $\frac{\sqrt{2}}{2}$, iar în intervalul $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, de la $\frac{\sqrt{2}}{2}$ la 1.

Din această analiză deducem că a doua derivată a funcției date se anulează odată și numai odată în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, anume în prima jumătate a lui $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

Pentru a găsi rădăcina respectivă, care ne va da punctul de inflexiune al curbei, unul singur prin urmare, vom rezolva ecuația,

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sin^3\left(\frac{\pi}{4} + x\right)} - \sin x = 0.$$

Această ecuație se mai scrie însă,

$$\frac{\sin x \sin^3\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=1,$$

de unde, prin logaritmare deducem,

$$\psi(x)=\log\sin x+3\log\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\operatorname{colog}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0. \tag{19}$$

Găsim aici, ca și în cazul punctului de maxim, că

$$\begin{cases}\psi(24^0)=\bar{1},60931+3.\bar{1},97015+0,44567=\bar{1},96543\\ \psi(25^0)=\bar{1},62595+3.\bar{1},97299+0,46595=0,01087,\end{cases}$$

apoi,

$$\begin{cases}\psi(24^0 45')=\bar{1},62186+3\,\bar{1},97229+0,46078=\bar{1},99951\\ \psi(24^0 46')=\bar{1},62214+3.\bar{1},97234+0,46112=0,00028\end{cases}$$

de unde, prin interpolare, găsim în sfârșit că punctul de inflexiune are loc pentru,

$$x_I\cong 24^0\,46'\,40'' \tag{20}$$

sau în radiani,

$$x_I\cong 0,4420. \tag{20'}$$

Introducând valoarea lui x_I din (20) în (14') și notând valoarea corespunzătoare a lui y prin y_I, deducem,

$$y_I=\frac{2\sin 24^0\,46'\,40''\sin 12^0\,22'\,50''\sin 32^0\,37'\,10''}{\cos 20^0\,14'\,20''},$$

apoi,

$$\log y_I=0,30103+\bar{1}62205+\bar{1},33123+\bar{1},73163+0,02768=\bar{1},61362$$

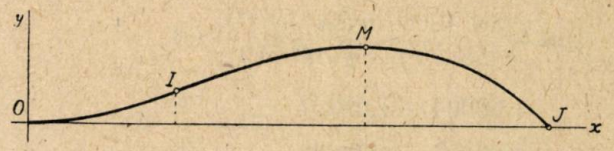
și de unde în ceje din urmă, vom avea

$$y_I\cong \text{antilog}\,\bar{1},61362\cong 0,1032 \tag{21}$$

Ținând acum seama de rezultatele găsite, putem alcătui ușor tabloul de variație a funcției date, care este anume,

x grade	0^0	$24^0 45' 40''$	45^0	$58^0 10' 16''$	$90''$
rad.	0	0,4420	$\frac{\pi}{4}=0,7854$	1,0153	$\frac{\pi}{2}=1,5708$
y''	2 +	0	—	—	—
y'	0 +		+	+ 0	— —1
y	0 ↗	0,1032	↗ 0,2071	↗ 0,2326	↘ 0

In baza acestui tablou, curba reprezentativă corespunzătoare se construește și ea ușor, având aspectul din figura alăturată.



Curba, după cum se vede, pleacă deci din origină, tangentă axei Ox, crescătoare, cu concavitatea spre y-cii pozitivi, ajunge în punctul de inflexiune $I(0,4420;\ 0,1032)$, de unde, continuă a crește, dar cu concavitatea spre y-cii negativi ajungând în punctul maxim $M(1,0153;\ 0,2326)$; de aici curba descrește apoi, tot cu concavitatea spre y-cii negativi, ajungând în punctul $J\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, tangentă dreptei dusă prin acest punct paralelă cu a doua bisectoare.

În intervalul $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ curba se continuă apoi cu simetricul graficului de mai sus față de dreapta $x=\frac{\pi}{2}$, iar în intervalul $(\pi, 2\pi)$ avem simetricul față de punctul $(\pi, 0)$ al graficului intreg din intervalul $(0, \pi)$.

Aria. Aria cuprinsă între arcul de curbă și axa Ox, corespunzătoare intervalului $(0, \pi)$ este evident dublul aceleia corespunzătoare intervalului $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Notând aria întreagă prin S, putem scrie deci

$$S=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-sp\,x)\,dx \tag{22}$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}sp\,x\,dx.$$

Avem însă

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=-\left|\cos x\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=1. \tag{23}$$

Fie apoi

---

[1]) Un corespondent a găsit că graficul ar avea ramuri infinite Greșeala provine din faptul că formula (7) este valabilă numai pentru primul cadran. (V. Trig patratică).

$$(24)\quad \begin{cases} I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} sp\,x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx \\ J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} cp\,x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx. \end{cases}$$

Deducem

$$(25)\quad \begin{cases} I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx=\dfrac{\pi}{2} \\ J-I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx= \\ \qquad |\log(\cos x+\sin x)|_0^{\frac{\pi}{2}}=0; \end{cases}$$

Rezultă prin urmare,

$$(26)\qquad I=J=\frac{\pi}{4}$$

și deci

$$(27)\qquad S=2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=2-\frac{\pi}{2}.$$

Problema 1571. — *Să se găsească patratele perfecte de șapte cifre de forma a bb a ccc.*

G-L GH. BUICLIU

Soluția. Singura terminație de patrat perfect de trei cifre egale, este 000 sau 444.

Dacă $c=0$, atunci $a=0$ și urmează că numărul $b\,b$ trebue să fie patrat perfect, ceiace nu se poate căci nu există patrat perfect de două cifre egale,

Fie $c=4$. Observăm că

$$N^2=a\,bb\,a\,444=11\,m+4$$

$$(1)\quad \therefore \qquad N=11\,p\pm 2.$$

Pe de altă parte patratele terminate în 444 au ca rădăcină numere de forma $500\,n\pm 38$[1].

In fine N^2 fiind de 7 cifre avem

$$0\leqslant N\leqslant 3163.$$

Numerele de forma (1) și de forma $500\,m\pm 38$ din acest interval sunt numai

1538, 2462 și 3038

pe care ridicându-le la patrat obținem soluția

$$3038^2=9229444.$$

Această soluție a fost dată de d-l *A. Gloden* (Luxemburg). Au dat soluții exactă prin diferite alte încercări D-nii: *Bossie Boris, Chiriac Const., Godca Ioan* și *Popescu Adrian.*

[1]) *Mathesis* 1932 pag. 419 și *Gazeta Matematică* Vol XLIX pag.

PROBLEME PROPUSE

2655. — Să se găsească un patrat perfect de patru cifre diferite și semnificative, astfel ca să avem

$$a\,b\,c\,d=(a\,d+b\,c)^2.$$

PETRE TEODORESCU

2656. — Să se rezolve ecuația

$$x^5+y^5=388100.$$

GL. GH. COATU.

2657* — Se dau expresiile:

$$A=(x+y)(x+z)(x+t)+(z+t)(y+t)(y+z),$$

B, C, D, ultimele trei deducându-se din prima prin permutările circulare ale literilor x, y, z, t precum și expresiile:

$$A_1=(x+y+z)(x+y+t)(x+z+t)+y\,z\,t$$

B_1, C_1, D_1, ultimele trei deducându-se din prima prin permutările circulare ale literilor x, y, z, t.

Să se arate că:

1. Fiecare din cele opt expresii A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1 este divizibilă prin $x+y+z+t$ și să se determine câturile diviziunii.

2. Avem relația:

$$A+B+C+D=(x+y+z+t)^3.$$

3. Expresiile A_1-A, B_1-B, C_1-C, D_1-D sunt proporționale respectiv cu produsele $x(y+z+t)$, $y(x+z+t)$, $z(x+y+t)$, $t(x+y+z)$.

CEZAR COSNITA

2658. — Să se discute sistemul omogen

$$\begin{cases} x+y+z-\alpha t=0 \\ 3x-y+\alpha z+4t=0 \\ 4x+3z+\alpha t=0 \\ \alpha x-2y+z+6t=0, \end{cases}$$

α fiind un parametru.

E ARGHIRIADE

2659. — În triunghiul dreptunghic BAC, fie D punctul unde bisectoarea unghiului C întâlneşte cercul circumscris triunghiului dat, E şi G proecţiile lui D respectiv pe AC şi AB, iar F punctul unde EG întâlneşte pe BC.

Să se arare că,

$$AB(BC+AC)=2\,EF\,.\,DC.$$

MAIOR G. P. BOERESCU

2660. — Să se stabilească identitatea

$$3\arcsin\frac{\sqrt[3]{(\sqrt{1-x^2}-ix)^2}-\sqrt[3]{(\sqrt{1-x^2}+ix)^2}}{2i}=2\arcsin x,$$

unde $i=\sqrt{-1}$.

V. ALACI

2661*) — Tangenta şi normala într'un punct M al parabolei

$$y^2=2px$$

taie axele de coordonate în T, T' şi N, N', punctele T şi N fiind pe Ox. Se cere:

1. Să se calculeze în funcţie de p, diametrele cercurilor circumscrise celor patru triunghiuri formate de punctele N, N' şi T, T'.

2. Să se determine M astfel în cât diametrul cercului N'TN să fie $p\sqrt{5}$.

G-L GH. BUICLIU

2662. — În sistemul de axe rectangulare xOy se dau elipsa (E) şi dreapta (D), având ecuaţiile

$$(E)\qquad x^2-2(\cos\alpha)xy+y^2-r^2\operatorname{tg}^2\alpha=0$$

$$(D)\qquad x=r\sec\alpha,$$

$$\left(0<\alpha<\tfrac{\pi}{2},\ r>0\right).$$

O dreaptă variabilă (Δ), dusă prin origină, taie dreapta (D) în punctul M. Paralela dusă prin M la axa Ox taie elipsa (E) în N_1 şi N_2, iar paralelele duse prin N_1 şi N_2 la axa Oy taie dreapta (Δ) respectiv în P_1 şi P_2.

1°. Să se afle ecuaţia locului punctelor P_1 şi P_2, când dreapta (Δ) se roteşte în jurul originei.

2°. Să se determine poziţiile dreptei (Δ), cărora le corespund puncte remarcabile ale locului, arătându-se că aceste puncte corespund şi unor puncte remarcabile ale elipsei.

3°. Elipsa (E) fiind descrisă de un punct curent al ei într'un sens determinat, să se evidenţieze cum este descrisă curba-loc de punctul corespunzător.

4°. Să se arate că elipsa (E) face parte din familia conicelor cu centrul în origină, osculatoare curbei-loc şi să se determine punctul de osculaţie corespunzător.

5°. Să se afle expresia ariei cuprinsă între elipsa (E) şi curba-loc, mărginită de punctul de osculaţie determinat şi punctul lor de intersecţie, care face ca această arie să fie exterioară elipsei.

6°. Să se figureze ansamblul celor două curbe, în cazul particular, $\alpha=\frac{\pi}{3}$ şi să se afle ce devine expresia ariei cerute mai sus în acest caz particular.

EUGEN VISA

2663. — Să se arate că unghiul θ al celor două cercuri directoare ale unei elipse, sau iperbole, este dat de relaţia

$$\sin\tfrac{1}{2}\theta=\tfrac{1}{2}e,$$

e fiind excentritatea conicei respective.

EMERIC DEUTSCH

2664. — Să se demonstreze identitatea;

$$(\operatorname{tg}x+2\sin 4x)(1-3\operatorname{tg}^2x)=(1+2\cos 4x)(3\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^3x).$$

FL. NEDELCU

ERATĂ.

1°. In problema 2623 din n-rul 3 membrii ai doilea a relaţiilor se vor înlocui respectiv cu

$$\frac{p^2-r^2-4Rr}{2p^2}\ \text{şi}\ \frac{p^2+r^2+4Rr}{4p^2}.$$

2°. In problema 2637, factorul $(a+b+c)$ din al 2-lea termen se va înlocui prin $(-a+b+c)$.

3°. Problema 2436* din n-r 5, are de fapt numărul 2636*.

INFORMAȚII

1. Nu se publică în revistă decât manuscrise dela abonați.

2. Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol, trebuesc scrise citeț (în special iscălitura) numai pe o parte a hârtiei. Probleme propuse trebuesc însoțite și de soluțiile lor, iar cele rezolvate, de enunț. Nu sunt luate în considerare probleme rezolvate iscălite de mai mulți corespondenți. Problemele rezolvate vor fi redactate îndependent una de alta, și nu în continuare.

3. Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

4. Numele colaboratorilor dela cari s'au primit soluții la problemele publicate în acest număr și care au sosit la redacție după data de 15 a lunei precedente, nu mai pot fi trecute în corpul revistei Numele lor este însă menționat pe copertă împreună cu numărul problemei rezolvate.

5. Rugăm pe corespondenții noștrii la orice schimbare de adresă sau lipsă din localitate fără a avea pe cineva să le primească revista, să ne anunțe din vreme. În caz contrar revista ne vine înapoi și cu regret anunțăm că a doua oară nu o mai putem expedia. Mai mult, se suspendă expedierea numerelor următoare până ce abonatul va reclama aceste numere.

6. Cine dorește poate să-și procure vol. 27 complect adresându-se D-lui *Dentsch Em.*, str. Bolintineanu 8, Timișoara.

Manuscrise primite de la corespondenții noștrii până la 1 a lunei curente și anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) și probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

---

Bogoevici N. (2538, 2630, 2634, 2650, 2653); *Bandler N.* (N ; P) ; *Bălăuță M.* (2392, 2597, 2604, 2607, 2609, 2612, 2614, 2627, 2628, 2631, 2632, 2633, 2635, 2636, 2648, 2653, 2654, P.) *Breazu Mihai* (2618, 2621, 2635, 2663, 2637, 2639, 2648); *Deleanu Aristide* (2614, 2632) ; *Deutsch Emeric* (P; 2635, 2636, 2642, 2648, 2651 2653 N); *Gloden A.* (N); *Gertler Richard* (2617, 2632, 2636, 2648, 2653, 2654) ; *Hurezeanu R.* (2537, 2639) ; *Nedelcu F.* (P.); *Neacșu V.* (2641, P) ; *Nicoară M* (N ; P ; 275, 291, 2531, 2557, 2635, 2636) ; *Păunescu Gh.* (2632, 2633) ; *Petcu Valeriu* (P. 2635, 2636, 2637); *Popovici C-tin* (2590, 2617, 2621, 2630, 2632) ; *Purcea Ion* (2602, 2625, 2635, 2646) ; *Radu Corneliu* (2616, 2617. 2620, 2621, 2622, 2625, 2627, 2628, 2629, 2630, 2631, 2632, 2633, 2634) ; *Stroe Ion* (P ; 2628) ; *Soare V. M.* (2118, 2636, 3637, 2639, P) ; *Tibăr Aurel* (P ; 2511, 2569, 2622, 2632, 2634, 2636) ; *Turbuțiu Ion* (2617) ; *Wegener E. N.* (1964, P).

ANUL XXVIII. OCTOMVRIE 1948. No. 8.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA
PREȚUL ABONAMENTULUI ESTE 300 LEI ANUAL PENTRU PARTICULARI
ȘI 600 LEI PENTRU INSTITUȚII
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRĂINĂTATE ESTE DE 600 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **E. ARGHIRIADE:** OBSERVATIUNI ASUPRA TEOREMEI LUI ROLLE.
2. NOTE MATEMATICE 12, 13.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 1245, 2126, 2440, 2449, 2455, 2529, 2533, 2581, 2587, 2590, 2598, 2603, 2604, 2614, 2617.
5. PROBLEME PROPUSE: 2655-2664.
6. INFORMATII.

Tip. „Gh. Hălmăgeanu", Timișoara
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebue să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă"

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara, conţinând articole, note, probleme propuse şi rezolvate, vor fi trimise pe adresa: Prof. V. Alaci, Politehnica, Timişoara.

Administraţia revistei aduce la cunoştinţa generală următoarele:

1. Abonamentul pe anul XXVIII (15 Martie 1948 — 15 Februarie 1949) este 300 lei pentru particulari şi 600 pentru instituţii.

2. Taxa de membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este de 200 lei.

3. Volumele I, XXIII, XXV, XXVI şi XXVII sunt epuizate. Celelalte volume broşate se găsesc de vânzare cu preţul de 300 lei fiecare. La această sumă se va adăoga 50 lei costul expediţiei. In caz că se comandă mai multe volume se va adăoga la taxa de 26 lei pentru recomandat, câte 20 lei pentru fiecare volum.

4. Se găsesc de vânzare numere izolate din colecţie chiar din volumele epuizate. Preţul unui număr este de 30 lei la care se adaogă 2 lei expediţia. Din vol. XXVII se găsesc de vânzare no. 1, 4—12.

5. Se primesc reclamaţii că se pierde revista prin poştă. Aceste reclamaţii sunt adunate în ordinea sosirii lor şi vor fi satisfăcute la 15 Februarie 1949 când se vor vedea ce numere rămân descomplectate după legarea volumelor întregi. Orice reclamaţie de pierderea unui număr nu este luată în seamă decât la o lună dela data apariţiei acelui număr.

6. Tot ce priveşte administraţia se va adresa D-lui Prof. Gh. Th. Gheorghiu str. Voltaire Nr. 1, Timişoara I. Reclamaţiile ce necesită răspuns vor fi însoţite de o carte poştală timbrată legal.

7. Orice sumă destinată revistei se poate trimite prin CEC sub contul n-rul 85208 sau prin mandat postal D-lui Prof. Gh. Th. Gheorghiu pe adresa de mai sus.

ANUL XXVIII — No 8. TIMISOARA, 1948 OCTOMBRIE 15

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

Prețul abonamentului este 300 lei pentru particulari și 600 lei pentru instituții.
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. GH. TH. GHEORGHIU
Timișoara I, Str. Voltaire, No. 1.

OBSERVAȚIUNI ASUPRA TEOREMEI LUI ROLLE

DE

E. ARGHIRIADE

1. Am atras atenția într'un articol precedent[1] asupra greutăților ce întâmpinăm când vrem să dăm unor teoreme din Elementele de Algebră Superioară pentru cl. VII și VIII științifică, o demonstrație care rămânând în cadrul Programei Analitice, să nu depășească puterea de înțelegere a elevilor acestor clase și în acelaș timp să păstreze suficientă rigoare și să nu altereze prea mult enunțul exact al teoremei în chestiune. În aceiaș ordine de idei, voi examina acum demonstrațiile date de diverși autori de manuale didactice, teoremei lui *Rolle*. Enunțul exact al acestei teoreme este următorul: *fie a și b două rădăcini ale ecuației* $f(x)=0$. *Dacă funcțiunea* $f(x)$ *este continuă în intervalul* (a, b) *și admite o derivată unică în fiecare punct al acestui interval, ecuația* $f'(x)=0$ *are cel puțin o rădăcină cuprinsă între a și b.* Teorema se demonstrează în felul următor: Dacă funcțiunea nu este identic nulă, (în care caz teorema este evidentă), ea va lua sau valori pozitive, sau valori negative. Presupunând că ia valori pozitive, rezultă din proprietățile funcțiunilor continui, că va admite un maxim pentru o valoare $x=c$, diferită de a și de b. Avem

$$f(c-h)-f(c)<0; \quad f(c+h)-f(c)<0; \quad (h>0)$$

de unde

$$A=\frac{f(c-h)-f(c)}{-h}>0 \quad B=\frac{f(c+h)-f(c)}{h}<0.$$

Când $h\to 0$, ambele rapoarte tind către aceiaș limită $f'(c)$, deoarece am admis că funcțiunea $f(x)$ admite o derivată în fiecare punct al intervalului (a, b), ceia ce înseamnă o derivată *unică*. Primul raport fiind pozitiv, limita sa nu poate fi decât pozitivă sau nulă; din cauză că al doilea raport este negativ, limita sa nu poate fi decât negativă sau nulă. Deci avem:

$$f'(c)\geqq 0 \quad f'(c)\leqq 0$$

de unde rezultă $f'(c)=0$. Deducem din demonstrația precedentă că pentru ca teorema lui *Rolle* să fie aplicabilă, funcțiunea $f(x)$ trebue să îndeplinească următoarele trei condițiuni *și numai aceste trei condițiuni.*

1°. *funcțiunea* $f(x)$ *să se auuleze pentru* $x=a$ *și* $x=b$.

2°. *să fie continuă în intervalul* (a, b).

3°. *să admită o derivată unică în fiecare punct al acestui interval.*

2. Să vedem acum cum este demonstrată această teoremă în diferite manuale didactice. În manualul D-lui prof. *P. Marinescu* se dă o demonstrație analitică simplă pentru cazul când $f(x)$ este un polinom și deoarece teorema lui *Rolle* trebue aplicată ulterior ecuațiilor transcendente, se consideră și cazul când $f(x)$ nu mai este un polinom; în acest caz se consideră o funcțiune care se reprezintă grafic printr'o curbă continuă și se face demonstrația pe figură. Acelaș procedeu e întrebuințat și de D-l prof. *N. Ciorănescu*, în manualul său de Algebră.

În manualul lui *N. Abramescu* se întrebuințează demonstrația grafică pe care am menționat-o mai sus și se dă și demonstrația analitică pe care am reprodus-o mai sus, la Nr. 1, fără a se insista însă asupra noțiunii de derivată unică.

Astfel fiind lucrurile, s'ar părea că teorema lui *Rolle* nu prezintă nici o dificultate de expunere. Aceste dificultăți însă apar când încercăm să ară-

[1] R. M. T. vol. XXVII. 1947.

tăm în ce cazuri teorema lui *Rolle, nu mai este aplicabilă*. Dintre cele 3 condiţiuni cerute la Nr. 1 pentru aplicabilitatea teoremei lui *Rolle*, condiţia 2^0 nu prezintă greutăţi; e uşor de arătat prin figuri potrivite că dacă $f(x)$ devine discontinuă în intervalul (a, b), teorema lui *Rolle* nu mai este aplicabilă. Cu condiţia 3^0, lucrurile se complică. De îndată ce vrem să arătăm cum se prezintă o funcţiune care nu mai admite o derivată unică, intrăm într'un teren periculos, căci nu vom putea evita să vorbim despre *derivată la dreapta* şi *derivată la stânga*, noţiuni care depăşesc puterea de înţelegere a unui elev.

3. Tocmai această încercare de a arăta în ce cazuri teorema lui *Rolle* nu este aplicabilă, a fost făcută de D-l prof. *A. Hollinger* în manualul său de Algebră, într'un paragraf intitulat:[2] *Condiţiuni de valabilitate ale teoremei lui Rolle*. Căutând să evite o expunere amănunţită a noţiunii delicate de derivată unică, D-sa dă un enunţ modificat teoremei lui *Rolle* şi anume cere pentru aplicarea acestei teoreme, condiţiunile următoare, evident supraabondente.

1^0 $f(x)$ e continuă şi finită

2^0 $f'(x)$ e continuă şi finită

D-sa adaogă:

„Toate ipotezele făcute asupra funcţiunii $f(x)$, pentru ca să i se aplice teorema lui *Rolle*, se pot exprima astfel:

Pentru ca funcţiunii $y = f(x)$ să i se aplice în intervalul (a, b) teorema lui Rolle, trebue ca în acest interval ea să fie reprezentată printr'un arc de curbă unic şi continu, având în orice punct o tangentă neparalelă cu axul Oy".

Condiţia ca $f'(x)$ să fie continuă (şi deci finită) este evident inexactă. Nicăeri în demonstraţia teoremei lui *Rolle* pe care am dat-o la Nr. 1, nu se cere ca $f'(x)$ să fie *continuă* sau *finită*, ci numai ca această derivată să fie *unică*. Iată şi enunţul dat teoremei lui *Rolle* în *Cours d'Analyse* de *Ch. J. de la Vallée Poussin*[3]: *Dacă funcţiunea $f(x)$ continuă în intervalul (a, b) se anulează pentru $x = a$ şi pentru $x = b$ şi admite o derivată unică (finită sau infinită) în orice punct al intervalului, (a şi b putând fi excluşi), această derivată se va anula într'un punct intermediar*

Figurile 1 şi 2 sunt reproduse din manualul Dl. prof. *A. Hollinger*. La fig. 1. D-sa spune: *„pentru $x = \alpha$* derivata e discontinuă, teorema lui *Rolle* nu se aplică". Acest lucru nu e exact; teorema lui *Rolle* nu e aplicabilă nu pentrucă derivata e discontinuă, căci vom vedea (fig. 3) că această teoremă rămâne aplicabilă şi când derivata e discontinuă, ci pentru că în punctul $x = \alpha$ nu avem o derivată unică, derivata la dreapta fiind diferită de derivata la stânga.

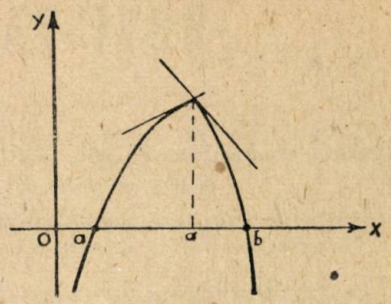


Fig. 1.

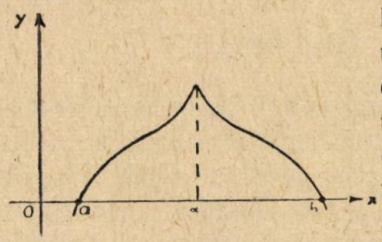


Fig. 2.

La fig. 2, D-l prof. *Hollinger* spune: „pentru $x = \alpha$ derivata este infinită, teorema lui *Rolle* nu se aplică". Nici această afirmaţie nu e exactă. Teorema lui *Rolle* nu se aplică, nu pentru că derivata e infinită, căci teorema rămâne aplicabilă şi în acest caz (vezi fig. 3), ci pentru că derivata nu e unică. În adevăr expresiunile A şi B considerate la Nr. 1, au limitele

$$\lim_{h \to 0} A = +\infty \qquad \lim_{h \to 0} B = -\infty$$

şi derivata în punctul $x = \alpha$, nu e unică adică expresia

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

nu tinde către aceiaş limită, ori cum ar tinde h către zero.

4. Aceste obiecţiuni pe care le aducem D-lui prof. *A. Hollinger* nu le considerăm ca importante. Recunoaştem că un autor de manuale didactice are dreptul pentru motive pedagogice, de a modifica într'o oarecare măsură enunţul unei teoreme. În definitiv D-l *A. Hollinger* nu face altceva decât înlocueşte condiţia mai delicată de *derivată unică*, cu aceia mai uşor de înţeles de *derivată continuă*

[2] pag. 148.
[3] pag. 66. Ed. 1926.

ceia ce nu prezintă prea mare gravitate. Dar chestiunea mai poate fi privită şi din alt punct de vedere. Să considerăm funcţiunea $f(x)$ a cărei reprezentare grafică o avem în fig. 3. Această funcţiune

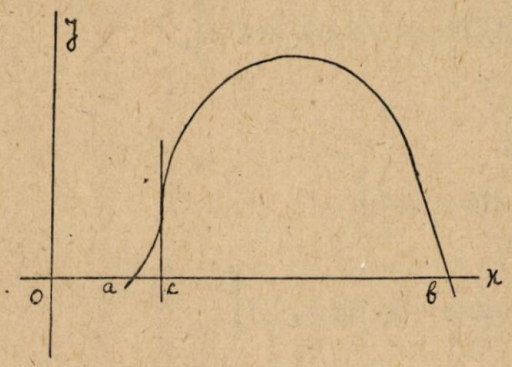


Fig. 3.

îndeplineşte cele 3 condiţiuni, cerute la Nr. 1, pentru aplicarea teoremei lui *Rolle*. Într'adevăr deşi derivata devine infinită pentru $x = c$, avem

$$\lim_{h\to 0} A = \lim_{h\to 0} B = +\infty$$

şi în acest punct avem o derivată unică *Teorema lui Rolle este aplicabilă deşi derivata devine infinită în interval.* Ori fig. 3 poate fi imaginată uşor de un bun elev de cl. VIII şi ridicată ca o obiecţiune teoremei lui *Rolle* aşa cum este enunţată de D-l prof. *A. Hollinger*. Prin urmare obiecţiunea ce o aducem D-lui prof. *A. Hollinger* nu este aceia că modifică teorema lui *Rolle*, ceiace în definitiv e permis pentru motive pedagogice, ci că o modifică de o manieră a cărei inexactitate poate fi uşor observată de un bun elev de liceu

Incercarea D-lui prof *A. Hollinger*, e o încercare interesantă de a preciza pentru elevii de liceu condiţiile exacte de aplicabilitate a teoremei lui *Rolle* şi trebue desigur privită cu toată simpatia; suntem însă nevoiţi a o considera ca o încercare nereuşită. Va trebui atunci să rămânem la vechile demonstraţii date în manualul D-lui prof. *P. Marinescu* sau în acela al lui *N. Abramescu*. Aceasta nu însemnează că nu trebuesc făcute alte încercări, mai reuşite, pe drumul deschis de D-l prof *A. Hollinger*. Am fi bucuroşi dacă articolul de faţă ar atrage atenţiunea asupra acestei importante chestiuni.

NOTE MATEMATICE

12. — *Asupra unor sume trigonometrice.* — In nota 11 din acest vol. al R. M. T. (pag. 99), D-l prof. *Ion Rizescu* dă formulele pentru calculul sumelor trigonometrice:

$$(1)\qquad \begin{cases} S_p = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos^p (a + k\,b) \\ T_p = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin^p (a + k\,b) \end{cases}$$

corespunzătoare respectiv cazurilor particulare $p=1$, $p=2$ şi $p=3$.

Îmi propun să complectez în nota de faţă rezultatele D-lui *Rizescu*, stabilind formulele pentru calculul acestor sume în cazul general, adică pentru un p oarecare.

In acest scop voiu utiliza anume formulele cunoscute ale lui *Euler*,

$$(2)\qquad \begin{cases} \cos^p x = \dfrac{1}{2^p}\left[C_p^{\frac{p}{2}} + 2\sum_{\lambda=0}^{\frac{p}{2}-1} C_p^{\lambda} \cos (p - 2\lambda)\, x \right] \\ \sin^p x = \dfrac{1}{2^p}\left[C_p^{\frac{p}{2}} + 2(-1)^{\frac{p}{2}} \sum_{\lambda=0}^{\frac{p}{2}-1} (-1)^{\lambda} C_p^{\lambda} \cos(p-2\lambda)x \right] \end{cases}$$

valabile pentru p par şi

$$(3)\qquad \begin{cases} \cos^p x = \dfrac{1}{2^{p-1}} \sum_{\lambda=0}^{\frac{p-1}{2}} C_p^{\lambda} \cos (p-2\lambda)x \\ \sin^p x = \dfrac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{2^{p-1}} \sum_{\lambda=0}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^{\lambda} C_p^{\lambda} \sin (p-2\lambda)\, x \end{cases}$$

valabile pentru p impar, precum şi formulele D-lui *Rizescu* pentru calculul sumelor (1) în cazul particular $p = 1$, care sunt în speţă:

$$(4)\qquad \begin{cases} S_1 = 2^n \cos^n \dfrac{b}{2} \cos (a + \dfrac{n\,b}{2}) \\ T_1 = 2^n \cos^n \dfrac{b}{2} \sin (a + \dfrac{n\,b}{2}). \end{cases}$$

Referindu-ne atunci în primul rând la formulele (2) şi (3), rezultă numai decât că, expresiile sumelor (1), în cazul general, se pot scrie respectiv,

$$(5)\quad \begin{cases} S_p = \dfrac{1}{2^p}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left[C_p^{\frac{p}{2}} + 2\sum_{\lambda=0}^{\frac{p}{2}-1} C_p^\lambda \cos(p-2\lambda)(a+kb) \right] \\ T_p = \dfrac{1}{2^p}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left[C_p^{\frac{p}{2}} + 2(-1)^{\frac{p}{2}} \sum_{\lambda=0}^{\frac{p}{2}-1} (-1)^\lambda C_p^\lambda \cos(p-2\lambda)(a+kb) \right] \end{cases}$$

pentru p par şi

$$(6)\quad \begin{cases} S_p = \dfrac{1}{2^{p-1}}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left[\sum_{\lambda=0}^{\frac{p-1}{2}} C_p^\lambda \cos(p-2\lambda)(a+kb) \right] \\ T_p = \dfrac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{2^{p-1}}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left[\sum_{\lambda=0}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^\lambda C_p^\lambda \sin(p-2\lambda)(a+kb) \right] \end{cases}$$

pentru p impar.

Cum însă,

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k C_p^{\frac{p}{2}} = C_p^{\frac{p}{2}} \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n C_p^{\frac{p}{2}},$$

în urma unor artificii de calcul uşor de urmărit, conchidem că relaţiile (5) şi (6), la rândul lor, se mai pot scrie respectiv şi sub formele,

$$(7)\quad \begin{cases} S_p = \dfrac{1}{2^p}\left[2^n C_p^{\frac{p}{2}} + 2\displaystyle\sum_{\lambda=0}^{\frac{p}{2}-1} C_p^\lambda \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(p-2\lambda)(a+kb) \right] \\ T_p = \dfrac{1}{2^p}\left[2^n C_p^{\frac{p}{2}} + 2(-1)^{\frac{p}{2}} \displaystyle\sum_{\lambda=0}^{\frac{p}{2}-1} (-1)^\lambda C_p^\lambda \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(p-2\lambda)(a+kb) \right] \end{cases}$$

pentru p par şi

$$(8)\quad \begin{cases} S_p = \dfrac{1}{2^{p-1}}\left[\displaystyle\sum_{\lambda=0}^{\frac{p-1}{2}} C_p^\lambda \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(p-2\lambda)(a+kb) \right] \\ T_p = \dfrac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{2^{p-1}}\left[\displaystyle\sum_{\lambda=0}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^\lambda C_p^\lambda \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin(p-2\lambda)(a+kb) \right] \end{cases}$$

pentru p impar.

Ţinând acum seama de formulele (4) ale D-lui *Rizescu*, formule care, în virtutea relaţiilor de definiţie (1), particularizate pentru $p=1$, după multiplicarea argumentului $a+kb$ prin factorul $p-2\lambda$, explicit se scriu respectiv,

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(p-2\lambda)(a+kb) = 2^n \cos^n \frac{(p-2\lambda)b}{2} \cos(p-2\lambda)\left(a+\frac{nb}{2}\right) \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin(p-2\lambda)(a+kb) = 2^n \cos^n \frac{(p-2\lambda)b}{2} \sin(p-2\lambda)\left(a+\frac{nb}{2}\right), \end{cases}$$

deducem că, relaţiile (7) şi (8) devin în cele din urmă respectiv,

$$(9)\qquad \begin{aligned} S_p &= 2^{n-p}\left[C_p^{\frac{p}{2}} + 2\sum_{\lambda=0}^{\frac{p}{2}-1} C_p^{\lambda}\cos^n\frac{(p-2\lambda)b}{2}\cos(p-2\lambda)\left(a+\frac{nb}{2}\right)\right] \\ T_p &= 2^{n-p}\left[C_p^{\frac{p}{2}} + 2(-1)^{\frac{p}{2}}\sum_{\lambda=0}^{\frac{p}{2}-1}(-1)^{\lambda} C_p^{\lambda}\cos\frac{(p-2\lambda)b}{2}\cos(p-2\lambda)\left(a+\frac{nb}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

pentru p par şi

$$(10)\qquad \begin{aligned} S_p &= 2^{n-p+1}\sum_{\lambda=0}^{\frac{p-1}{2}} C_p^{\lambda}\cos^n\frac{(p-2\lambda)b}{2}\cos(p-2\lambda)\left(a+\frac{nb}{2}\right) \\ T_p &= (-1)^{\frac{p-1}{2}}2^{n-p+1}\sum_{\lambda=0}^{\frac{p-1}{2}}(-1)^{\lambda} C_p^{\lambda}\cos^n\frac{(p-2\lambda)b}{2}\sin(p-2\lambda)\left(a+\frac{nb}{2}\right) \end{aligned}$$

pentru p impar.

Aceste relaţii (9) şi (10) constituesc precum vedem, chiar formulele generale privitoare la calculul sumelor trigonometrice S_p şi T_p definite prin relaţiile (1) pe care ne-am propus a le stabili drept completare a formulelor particulare corespunzătoare respectiv cazurilor $p=1$, $p=2$ şi $p=3$ ale D-lui Prof. *Rizescu* şi care de altfel, după cum se poate uşor constata, se regăsesc imediat din formulele generale (9) şi (10) de mai sus.

E. Visa

---

13. — *Asupra manualului de cl. VIII, algebră, de prof. Hollinger.*

1. In manualul de cl. VIII al d-lui prof. *Hollinger* din 1944, la pag. 182 găsim exerciţiul 4: *„Să se arate că o ecuţie algebrică, care nu e completă are cu siguranţă rădăcini imaginare“*. La p. 274 autorul dă soluţia: — *„Căci în acest caz* $v+v'<m$*“* — notând cu v numărul variaţiilor lui $P(x)$ şi cu v' numărul variaţiilor lui $P(-x)$ iar cu m gradul ecuaţiei.

Demonstraţia e inexactă. Dacă ecuaţia e completă avem $v+v'=m$. Dacă suprimăm unii termeni, v şi v' pot să scadă şi avem $v+v'\leqq m$; dar se poate întâmpla să nu scadă.

Exemple: 1° $x^2-1=0$ (incompletă şi totuşi are rădăcini reale).

2° O ecuaţie redusă poate avea toate rădăcinile reale. Ştim că în cazul ecuaţiei

$$x^3+px+q=0$$

pentru $\frac{1}{4}q^2+\frac{2}{27}p^3<0$ ecuaţia are trei rădăcini reale şi distincte.

Se pare că această eroare provine dintr'o scăpare din vedere în aplicarea teoremei lacunelor:

„Dacă într'o ecuaţie incompletă, lipseşte un termen între doi termeni de acelaş semn, sau dacă lipseşte mai mult decât un termen între doi termeni de semne oarecare, ecuaţia are în mod necesar rădăcini imaginare“. (B. Niewenglowski: Cours d'Algébre, tome II, 2-e ed. Paris 1891, pag. 384).

2. In acelaş manual la exerciţiul 7 se pretinde: *„Să se demonstreze că, pentru ca ecuaţia algebrică* $P(x)=0$ *să aibă rădăcini reale, trebue ca* $P(x)$ *să fie un polinom complet şi să aibă numai variaţiuni“*.

Şi aceasta este inexact tot din motivul de mai sus. Enunţul exact al acestei teoreme ar fi: *„Pentru ca o ecuaţie să aibe toate rădăcinile pozitive, trebuie ca* $P(x)$ *să fie complet şi să aibă numai variaţii.*

Intr'adevăr avem în general $p\leqq v$, — unde am notat cu p numărul rădăcinilor pozitive, — iar $v+v'\leqq m$. Adică $p\leqq v\leqq m$. Să considerăm acum cazul când $p=m$, din care deducem şi $v=m$ şi deci $v'=0$. Aceasta inseamnă că $P(x)$ trebuie să fie complet şi să aibă numai variaţii.

Roth Rudolf Egon

BIBLIOGRAFIE

Gazeta Matematică, Anul LIV, No. 1, Septembrie 1947. Lista membrilor Soc. Gazeta Matematică. Două teoreme din geometria triunghiului de *Maria Neumann*. Asupra transformării prin centre radicale de *E. Arghiriade*. Raport asupra decernării premiului *„G-l Sc. Panaitescu"*. Probleme rezolvate și propuse.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1245. — *Să se rezolve sistemul*:

$$\begin{cases} x - yz - xyz = 13 \\ y - zx - xyz = 17 \\ z - xy - xyz = 19 \end{cases}$$

ADRIAN POPESCU

Soluția. Adunând succesiv câte două ecuații și scăzând pe a treia, obținem:

$$(1)\quad \begin{cases} y+z+yz-x-xy-xz-xyz=23, \\ z+x+zx-y-yz-yx-xyz=15, \\ x+y+xy-z-zx-zy-xyz=11, \end{cases}$$

ecuații care se mai pot scrie

$$(2)\quad \begin{cases} 2(y+1)(z+1)-(x+1)(y+1)(z+1)=24, \\ 2(z+1)(x+1)-(x+1)(y+1)(z+1)=16, \\ 2(x+1)(y+1)-(x+1)(y+1)(z+1)=12. \end{cases}$$

Notând:

$$(3)\quad x+1=u,\quad y+1=v,\quad z+1=w;$$

ecuațile din (2) devin:

$$(4)\quad \begin{cases} 2vw-uvw=24, \\ 2uw-uvw=16, \\ 2uv-uvw=12, \end{cases}$$

sau încă

$$(5)\quad \begin{cases} 2vw=24+uvw, \\ 2uw=16+uvw, \\ 2uv=12+uvw. \end{cases}$$

Înmulțind și notând: (6) $uvw=t$, obținem:

$$8t^2=(24+t)(16+t)(12+t);$$

$$t^3+44t^2+864t+4608=0.$$

Această ecuație se mai scrie

$$(t+8)(t^2+36t+576)=0$$

cu rădăcinile:

$$7)\quad t_1=-8,\quad t_{2,3}=18\pm 6\sqrt{-7},$$

Ținând semă de prima relație din (7) de (6) și simplificând, (15) devine:

$$(8)\qquad vw=8,\quad uw=4,\quad uv=2;$$

cum: $uvw=t_1=-8$, avem mai departe

$$(9)\qquad u=-1,\quad v=-2,\quad w=-4.$$

Din (3) deducem:

$$(10)\quad x=u-1,\quad y=v-1,\quad z=w-1$$

și ținând seamă de (9), avem:

$$x=-2,\quad y=-3,\quad z=-5.$$

Analog, a doua relație din (7) dă

$$(11)\quad \begin{cases} vw=3\pm 3\sqrt{-7}, \\ uw=-1\pm 3\sqrt{-7}, \\ uv=-3\pm 3\sqrt{-7}; \end{cases}$$

cum: $uvw=t_{2,3}=-18\pm 6\sqrt{-7}$, (11) devine:

$$(12)\quad \begin{cases} u=\dfrac{-18\pm 6\sqrt{-7}}{3\pm 3\sqrt{-7}}=\dfrac{-6\pm 2\sqrt{-7}}{1\pm\sqrt{-7}}, \\ v=\dfrac{-18\pm 6\sqrt{-7}}{-1\pm 3\sqrt{-7}}, \\ w=\dfrac{-18+6\sqrt{-7}}{-3\pm 3\sqrt{-7}}=\dfrac{-6\pm 2\sqrt{-7}}{-1\pm\sqrt{-7}}, \end{cases}$$

sau încă

$$\begin{cases} x=\dfrac{-7\pm\sqrt{-7}}{1\pm\sqrt{-7}}=\pm\sqrt{-7}, \\ y=\dfrac{-17\pm 3\sqrt{-7}}{-1\pm 3\sqrt{-7}}=\dfrac{5\pm 3\sqrt{-8}}{4} \\ z=\dfrac{-5\pm\sqrt{-7}}{-2\pm\sqrt{-7}}=\dfrac{3\pm\sqrt{-7}}{2}. \end{cases}$$

Problema admite deci trei grupe de soluții.

Dintre toți rezolvitorii, singurul care a găsit toate soluțiile, pe o cale mai lungă, este D-l *Cazanacli P.* (Iași).

Gh. Th. Gh.

Problema 2126. — *Să se studieze seria cu termenul general*

$$u_n=\frac{1}{\sqrt[\alpha]{n}}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{\sqrt[\alpha]{n}}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{\sqrt[\alpha]{n+1}}\right).$$

EUG. I. SIPOS

Soluția. Deoarece funcția $\operatorname{tg} x$ este crescătoare,

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{\sqrt[\alpha]{n}} > \operatorname{tg}\frac{\pi}{\sqrt[\alpha]{n+1}},$$

adică seria are termenii pozitivi. Putem deci să aplicăm criteriul comparației. Conform unei formule cunoscute, putem scrie

$$u_n = \frac{1}{\sqrt[\alpha]{n}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt[\alpha]{n}} - \frac{\pi}{\sqrt[\alpha]{n+1}}\right)}{\cos\frac{\pi}{\sqrt[\alpha]{n}} \cdot \cos\frac{\pi}{\sqrt[\alpha]{n+1}}},$$

sau încă

$$u_n = \frac{\pi\left(\sqrt[\alpha]{n+1} - \sqrt[\alpha]{n}\right)}{\sqrt[\alpha]{n^2(n+1)}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt[\alpha]{n}} - \frac{\pi}{\sqrt[\alpha]{n+1}}\right)}{\frac{\pi}{\sqrt[\alpha]{n}} - \frac{\pi}{\sqrt[\alpha]{n+1}}} \cdot \frac{1}{\cos\frac{\pi}{\sqrt[\alpha]{n}} \cdot \cos\frac{\pi}{\sqrt[\alpha]{n+1}}},$$

expresie care spune că seria dată este de aceiași natură cu seria al cărui termen general este

$$v_n = \frac{\sqrt[\alpha]{n+1} - \sqrt[\alpha]{n}}{\sqrt[\alpha]{n^2(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt[\alpha]{n(n+1)}}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha} - 1\right]$$

Dar,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1}\frac{1}{n} + \frac{\lambda}{n^2}$$

când n este mare, λ fiind o funcțiune de n ce tinde către zero când n tinde către infinit. Deci

$$v_n = \frac{1}{n\sqrt[\alpha]{n(n+1)}}\left(\alpha + \frac{\lambda}{n}\right).$$

De aci se vede ușor că v_n și deci u_n este de aceiași natură cu seria al cărui termen general este

$$w_n = \frac{1}{n\sqrt[\alpha]{n^2}} = \frac{1}{n^{1+\frac{2}{\alpha}}}$$

adică seria este convergentă când

$$1 + \frac{2}{\alpha} > 1; \quad \alpha > 0$$

și divergentă în caz contrar adică pentru $\alpha < 0$. (Pentru $\alpha = 0$, u_n nu are sens).

A rezolvat problema D-l Ing. *Georgescu Nicolin.*

Gh. Th. Gh.

Problema 2440. — *Sé se găsească un număr de patru cifre multiplu de 3 știind că pătratul său se termină printr'un număr de 4 cifre de forma $abab$, multiplu de 9.*

PETRE TEODORESCU

Soluție dată de *Tincu C. Const.* (P. T.) Cum

$$abab = 100\,ab + ab = 101\,ab,$$

pentruca numărul $abab$ să fie un multiplu de 9 este necesar ca ab să fie un multiplu de 9. Ținând seamă de tabloul ultimelor două cifre ale unui pătrat perfect se găsește că $abab = 3636$. In *Gazeta Matematică*, vol. 49, pag. 406 se găsește că dacă pătratul unui număr N are terminația de mai sus, atunci el este de forma

$$N = 2500\,n \pm 2194.$$

Cum N trebue să fie de patru cifre, trebue să luăm $n = 2, 3, 4$. Se găsesc astfel soluțiile

$$\begin{cases} N = 7194 \\ N^2 = 51653636, \end{cases} \qquad \begin{cases} N = 7806 \\ N^2 = 60933636 \end{cases}$$

Au rezolvat problema D-nii *Chiriac C.*, *Constantinescu G. Virgil*, *Diaconu Gh. Vasile* și *Giurconiu Mihai.*

Au găsit numai o singură soluție D nii *Ciucescu Paul*, *Manolescu V. G.*, *Novac I. Ioan*, *Stănescu D. Constantin* și *Târcomnicu D. Constantin.*

Gh Th. Gh.

Problema 2449. — *Să se găsească pătratul perfect de cifre distincte $abcdef$ știind că media aritmetică a cifrelor b și e este egală cu media geometrică a numărului format de cifrele extreme iar c este pătrat perfect impar.*

MIHAI GIURCONIU

Soluția. Conform enunțului $c = 1$ sau 9. Cealaltă condiție spune că

(1) $\sqrt{af} = \frac{1}{2}(b+e)$ sau $\sqrt{fa} = \frac{1}{2}(b+e)$

adică numărul af trebue să fie un pătrat perfect de două cifre căci dacă $a = 0$ numărul căutat numai are 6 cifre, iar dacă $f = 0$ trebue ca și $e = 0$ și deci n'am mai avea cifre distincte. Putem avea deci cazurile

$$af = 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81$$
$$\text{sau } af = 61,\ 52,\ 63,\ 94,\ 46,\ 18.$$

Din aceste valori trebue să eliminăm pe urmă-

toarele: 1° ultimele din fiecare rând pentru cari, în baza lui (1) trebue să avem: $b+e=18$, adică $b=e=9$ ceiace nu se poate deoarece cifrele trebuesc să fie distincte; 2° din grupa a doua eliminăm pe 52 şi 63 deoarece f este ultima cifră a unui pătrat perfect şi deci nu poate fi 2 sau 3. Avem deci de examinat cazurile:

1°. $a=1$, $f=6$ şi deci $b+e=8$. Cum ultimele două cifre nu pot fi decât (vom ţine mereu seamă că cifrele numărului căutat trebuesc să fie distincte)

$$(2)\quad \begin{cases} 01,\ 04,\ 09,\ 16,\ 21,\ 24,\ 25,\ 29,\ 36,\ 41 \\ 49,\ 56,\ 61,\ 64,\ 69,\ 76,\ 81,\ 84,\ 89,\ 96 \end{cases}$$

rezultă că: $b=7$, $e=1$; $b=5$, $e=3$; $b=3$; $e=5$ adecă numerele vor fi de forma: $159\,d\,36$ sau $139\,d\,56$. Pentru prima formă $d=0,\ 2,\ 4,\ 7,\ 8$ iar pentru a doua $d=0,\ 2,\ 4,\ 7,\ 8$. Niciunul din numerele formate nu este pătrat perfect.

2°. $a=2$, $f=5$. Va trebui ca $b+e=10$, adecă $b=8$, $e=2$; nu corespund numere cu cifre distincte.

3°. $a=3$, $f=6$; $b+e=12$; $b=9$, $e=3$; $b=7$; $e=5$; $b=5$, $e=7$; $b=3$, $e=9$; numerele sunt de forma: $37\,c\,d\,56$, $35\,c\,d\,76$ unde $c=1$ sau 9 iar d respectiv celelalte cifre distincte de cele existente. Se găseşte soluţia $379456=616^2$.

4°. $a=4$, $f=9$; $b+e=14$; $b=8$, $e=6$; $b=6$, $e=8$ adică numerele sunt de forma $481\,d\,69$, $461\,d\,89$. Nu se găsesc soluţii.

5° $a=6$, $f=4$; $b=e=16$; $b=8$, $e=8$, imposibil.

6° $a=6$, $f=1$; $b+e=8$; $b=8$, $e=0$; $b=6$, $e=2$; $b=4$, $e=4$; $b=2$, $e=6$; $b=0$, $e=8$; numerele pot fi de forma $689\,d\,01$, $609\,d\,81$ şi unde $d=2,\ 3,\ 4,\ 5\ 7$; nu avem soluţii.

7°. $a=9$, $f=4$; $b+e=14$; $b=8$, $e=6$; $b=6$, $e=8$ adică $981\,d\,64$, $961\,d\,84$; nu avem soluţii.

8°. $a=4$, $f=6$; $b+e=16$; $b=9$, $e=7$; $b=7$, $e=9$ adică $491\,d\,76$ sau $471\,d\,96$ unde $d=0,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8$; nu obţinem soluţii.

Problema admite deci o singură soluţie.

S'a primit o foarte bună soluţie dela D-l *Stancu D. D.* (Arad) şi soluţii bune dela D-nii *Cârciu I.* (Timişoara), *Ciucescu P.* (Slatina), *Constantinescu I. Gh.* (Slatina), *Constantinescu G. Virgil* (Slatina), *Enache I.* (Piteşti), *Gherlan V.* (Beiuş), *Pantea N. Alex.* (Beiuş), *Pisanca N. I.* (Timişoara), *Teodorescu P. P.* (Timişoara) şi *Tincu C. C.* (P. T.).

Gh. Th. Gh.

Problema 2455 — *Să se verifice identităţile*

$$\sum_{k=1}^{n}\sin 2(2k+1)x-\cos\tfrac{1}{3}\pi\cos 2x\sum_{k=1}^{n}\sin 4(2k+1)x=\frac{\sin^4 2(n+1)x-\sin^4 2x}{\sin 2x},$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sin 2(2k+1)x+\cos\tfrac{1}{3}\pi\cos 2x\sum_{k=1}^{n}\sin 4(2k+1)x=\frac{\cos^4 2x-\cos^4 2(n+1)x}{\sin 2x}$$

şi apoi să se arate că

$$\sum_{k=1}^{n}\sin 2(2k+1)x=\frac{\sin 2nx\sin 2(n+2)x}{\sin 2x}.$$

FL. I. GOGA

Soluţia. Pentru stabilirea celor două identităţi, pornim dela identitatea banală

$$(1)\qquad \sum_{k=1}^{n}[f(k+1)-f(k)]=f(n+1)-f(1)$$

care se stabileşte imediat scriind prima parte dezvoltată.

1° Luăm $f(k)=\sin^4 2kx$ şi observăm că avem

$$f(k+1)-f(k)=\sin^4 2(k+1)x-\sin^4 2kx$$
$$=[\sin^2 2(k+1)x+\sin^2 2kx][\sin 2(k+1)x+\sin 2kx].$$
$$[\sin 2(k+1)x-\sin 2kx]$$
$$=[1-\tfrac{1}{2}(\cos 4(k+1)x+\cos 4kx)].2\sin(2k+1)x\cos x.$$
$$2\sin x.\cos(2k+1)x$$
$$=[1-\cos 2x\cos 2(2k+1)x]\sin 2(2k+1)x\sin 2x$$

şi (1) se poate scrie

$$\sin 2x\left[\sum_{k=1}^{n}\sin 2(2k+1)x-\cos 2x\sum_{k=1}^{n}\sin 2(2k+1)x\cos 2(2k+1)x\right]=\sin^4 2(n+1)x-\sin^4 2x$$

care nu este alta decât prima identitate din enunţ scrisă sub altă formă

2° Luăm $f(k)=\cos^4 2kx$; găsim succesiv

$$f(k+1)-f(k)=\cos^4 2(k+1)x-\cos^4 2kx$$
$$=[\cos^2 2(k+1)x+\cos^2 2kx][\cos 2(k+1)x+$$

$$+\cos 2kx][\cos^2(k+1)x-\cos 2kx]$$
$$=-\left[1+\tfrac{1}{2}(\cos 4(k+1)x+\cos 4kx)\right]\times$$
$$2\cos(2k+1)x\cos 2x\,.\,2\sin(2k+1)x\sin 2x$$
$$=-[1+\cos 2(2k+1)x\cos 2x]\sin 2(2k+1)x\sin 2x$$

şi deci (1) dă identitatea

$$-\sin 2x\,[\Sigma\sin 2(2k+1)x+$$
$$+\cos 2x\,\Sigma\sin 2(2k+1)x\cos 2(2k+1)x]$$
$$=\cos^4 2(n+1)x-\cos^4 2x$$

sau

$$\Sigma\sin 2(2k+1)x+$$
$$\tfrac{1}{2}\cos 2x\,\Sigma\sin 4(2k+1)x=\frac{\cos^4 2x-\cos^4 2(n+1)x}{\sin 2x}$$

adică a doua identitate din enunţ.

3° Adunând identităţile stabilite şi ţinând seama că

$$\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$$
$$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha,$$

obţinem

$$2\Sigma\sin 2(2k+1)x=\frac{\cos 4x-\cos 4(n+1)x}{\sin 2x}=$$
$$=2\frac{\sin 2nx\sin 2(n+2)x}{\sin 2x},$$

adică ultima identitate din enunţ.

Au rezolvat problema D-nii *Ciucescu Paul, Constantinescu G. Virgil, Diaconu Vasile, Gherlan I. Vasile, Haret Sp. Radu, Măncescu N. Ion, Novac I. Ion, Pantea Alex.* şi *Teodorescu P. Petre.*

Gh. Th. Gh.

Problema 2529. — *Să se rezolve în numere întregi sistemul*

$$\Sigma x^2yz-\Sigma xy=269,$$
$$\Sigma x^3y^3-\Sigma x^2y^2=4230,$$
$$xyz=30.$$

SERGIU PALI

Soluţia. Punem

$$\Sigma x=A,\quad \Sigma xy=B,\quad xyz=C,$$

şi vom ţine seamă de identităţile

$$(\alpha+\beta+\gamma)^3=\Sigma\alpha^3+3\Sigma\alpha^2\beta+6\alpha\beta\gamma$$
$$=\Sigma\alpha^3+3\Sigma\alpha\,.\,\Sigma\alpha\beta-3\alpha\beta\gamma,$$
$$(\alpha+\beta+\gamma)^2=\Sigma\alpha^2+2\Sigma\alpha\beta.$$

In baza ecestor identităţi, avem

$$\Sigma x^3y^3=(\Sigma xy)^3-3xyz\Sigma x\Sigma xy+3x^2y^2z^2$$
$$\Sigma x^2y^2=(\Sigma xy)^2-2xyz\Sigma x,$$

încât ecuaţiile din ennnţ se scriu

$$\begin{cases} AC-B=269,\\ B^3-3ABC+3C^2-B^2+2AC=4230,\\ C=30. \end{cases}$$

În baza ultimei, primele două se scriu

$$30A-B=269,$$
$$B^3-90AB-B^2+60A=1530.$$

Eliminând între aceste două ecuaţii pe A, avem

$$B^3-4B^2-805B-992=0.$$

Această ecuaţie are o singură rădăcină întreagă $B=31$. Rezultă

$$A=10,\quad B=31,\quad C=30.$$

Ţinând seamă de ce reprezintă numerele A, B, C, rezultă că x, y, z vor fi soluţiile ecuaţiei

$$t^3-10t^2+31t-30=0,$$

luate într'o ordine oarecare. Rădăcinile acestei ecuaţii se găsesc imediat ţinând seamă că sunt numere întregi şi deci sunt printre divizorii lui 30. Se găsesc astfel

$$x=2,\quad y=3,\quad z=5$$

sau o permutare oarecare a acestor numere.

Notă Problema nu este corect exprimată deoarece rezolvarea în numere întregi nu este o *condiţie* a problemei ci mai mult o *uşurare* pentru găsirea soluţiilor. Deci enunţarea mai corectă ar fi fost: *să se găsească soluţiile întregi ale sistemului...*

Au rezolvat problema D-nii *Deutsch Em.* (P. T.). *Gherlan I. V* (P. T.), *Neguţ A. I.* (Tg.-Jiu), *Novac I. I.* (P.T.), *Purcea M. I.* (Caracal), *Stânescu D. C.* (Reşiţa) şi *Teodorescu P. P.* (Bucureşti).

Gh. Th. Gh.

Problema 2533. — *Fie fascicolele de cercuri*

$$\lambda_1C_1+\lambda_2C_2=0,\quad \lambda_3C_3+\lambda_4C_4=0.$$

unde $C_i\equiv x^2+y^2+2a_ix+2b_iy+c_i$, $(i=1,2,3,4)$. *Să se determine condiţia pentru ca cele două fascicole să aibă un cerc comun şi să se scrie ecuaţia acestui cerc.*

ANDREI DOBRESCU

Soluţia autorului. Admiţând că cele două fascicole de cercuri considerate au un cerc comun, parametrii λ_i corespunzători acestui cerc trebuie să

fie astfel încât să avem identitatea:

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_1 \equiv \lambda_3 C_3 + \lambda_4 C_4,$$

deci rezultă că parametrii λ_i trebuie să verifice sistemul de ecuații lineare și omogene:

$$(1)\quad \begin{aligned} &\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = 0,\\ &\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 - \lambda_3 a_3 - \lambda_4 a_4 = 0,\\ &\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 - \lambda_2 b_3 - \lambda_4 b_4 = 0,\\ &\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 - \lambda_3 c_3 - \lambda_4 c_4 = 0. \end{aligned}$$

Pentru ca acest sistem să admită o soluție diferită de soluție banală $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, trebuie să avem:

$$(2)\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4\\ c_1 & c_2 & c_4 & c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

care este condiția căutată și care exprimă că cercurile C_i fac parte din aceeași *rețea.*

Avem deci proprietatea:

Pentru ca fascicolele de cercuri

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = 0, \quad \lambda_3 C_3 + \lambda_4 C_4 = 0$$

să admită un cerc comun, trebuie ca cercurcurile C_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ *să facă parte din aceeași rețea.*

Această condiție fiind îndeplinită, se pot considera din sistemul (1) numai ultimele 3 ecuații, de ex., care conduc la soluția:

$$\frac{\lambda_1}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}} = \frac{\lambda_2}{-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_3 & b_3 & c_3\\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}} = \frac{\lambda_3}{-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}} = \frac{\lambda_4}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}},$$

așa încât ecuația cercului comun celor două fascicole este:

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} \cdot C_1 - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_3 & b_3 & c_3\\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} C_2 = 0$$

sau:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} C_3 - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} C_4 = 0.$$

Observare. Problema asemănătoare se poate considera pentru două fascicole de drepte și se găsește propriatatea:

Ecuația dreptei comune a fascicolelor de drepte:

$$\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2 = 0, \quad \lambda_3 D_3 + \lambda_4 D_4 = 0,$$

unde $D_i \equiv a_i x + b_i y + c_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, *este:*

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} D_1 - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_3 & b_3 & c_3\\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} D_2 = 0$$

sau:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} D_3 - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} D_4 = 0,$$

precum și pentru două fascicole de plane:

Pentru ca fascicolele de plane:

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0, \quad \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4 = 0$$

să admită un plan comun, trebuie ca planele $P_i \equiv a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ *să facă parte din aceeași stea. Această condiție fiind îndeplinită, ecuația planului comun celor două fascicole este:*

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} P_1 - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_3 & b_3 & c_3\\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} P_2 = 0$$

sau:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} P_3 - \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} P_4 = 0.$$

A rezolvat foarte bine problema, D-l *Teodorescu P. P.* (București).

Gh. Th. Gh.

Problema 2581. — *Să se afle maximul sau minimul funcției:*

$$u = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$$

știind că variabilele, x, y, z satisfac relațiile de legătură,

$$\frac{x - a}{A} = \frac{y - b}{B} = \frac{z - c}{C}.$$

Interpretare geometrică.

EUGEN VISA

Soluție date de D-l *Wegener Eug. Nic.* (București).

Punem:

$$\frac{x - a}{A} = \frac{y - b}{B} = \frac{z - c}{C} = \frac{\lambda}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

şi notând:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\alpha,\quad \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\beta,$$

$$\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\gamma,$$

putem scrie:

$$\begin{cases} x=a+\lambda\alpha \\ y=b+\lambda\beta \\ z=c+\lambda\gamma \end{cases}$$

şi înlocuind în u, obţinem:

$$u=(a-x_0+\lambda\alpha)^2+(b-y_0+\lambda\beta)^2+(c-z_0+\lambda\gamma)^2.$$

Acum u depinde numai de λ şi găsim extremul funcţiei în modul obişnuit.

Anulăm derivata în raport cu λ:

$$\frac{du}{d\lambda}=0;$$

$$\lambda(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=x_0\alpha+y_0\beta+z_0\gamma-a\alpha-b\beta-c\gamma.$$

Dar: $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ şi deci:

$$(1)\qquad \lambda=\alpha(x_0-a)+\beta(y_0-b)+\gamma(z_0-c),$$

Deasemenea:

$$\frac{d^2u}{ds^2}=1>0$$

şi deci pentru valoarea lui λ dată de (1) corespunde un minim egal cu;

$$u=(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0-c)^2-$$
$$-[\alpha(x_0-a)+\beta(y_0-b)+\gamma(z_0-c)]^2$$

sau, folosind identitatea lui *Lagrange*

$$u=[\beta(z_0-c)-\gamma(y_0-b)]^2$$
$$+[\gamma(x_0-a)-\alpha(z_0-c)]^2+[\alpha(y_0-b)-\beta(x_0-a)]^2,$$

unde α, β, γ au valorile de mai sus, funcţie de A, B, C.

Interpretarea geometrică. Funcţiunea u reprezintă pătratul distanţei dintre punctele $M(x_0, y_0, z_0)$ fix şi $N(x, y, x)$ mobil pe dreapta D determinată de punctul fix $P(a, b, c)$ şi parametrii directori A, B, C. Rezultă din consideraţiuni geometrice că distanţa MN este minimă atunci când N va fi proiecţia lui M pe dreaptă, adică MN este distanţa punctului M la dreapta D. În particular când M este pe dreaptă; u devine egal cu zero, ceeace se vede uşor pe expresia lui u, făcând: $x_0=a$, $y_0=b$, $z=c$

Minimul lui u, găsit mai sus, reprezintă deci patratul distanţei dela punctul M la dreapta D.

Au rezolvat problema şi D-rele *Alexa M*, *Raţiu M.* şi D-l *Deutsch Em.* (toţi din P. T).

Problema 2587. — *Să se găsească un pătrat perfect de cinci cifre de forma $aabcd$, ştiind că. ultima cifră scrisă după a treia dă un pătrat perfect, a treia cifră este egală cu de patru ori prima cifră, în fine a patra cifră este egală cu prima micşorată cu 2.*

VASILE TODERASC

Soluţia. Condiţiile problemei sunt

$$aabcd=N^2,\quad bd=m^2,\quad b=4a,\quad c=a-2.$$

Din relaţia treia rezultă că $b=0, 4, 8$ şi deci $a=0, 1, 2$; dar a patra relaţie spune că un putem lua decât $a=2$, $c=0$. Condiţia a doua spune că $8d=m^2$ de unde se vede că trebue să luăm $d=1$. Numărul căutat este deci 22801 care este pătratul lui 151. Este interesant de observat că condiţia ca numărul căutat să fie pătrat perfect nu este necesară.

Au rezolvat problema D-nii *Bâlă V. C.* (P. T.), *Blaga Ov.* (P. T.), *Cioara Alex.* (P. T), *Ciobanu I.*, *Canstantinescu I. Gh.* (Slatina), *De Sabata I.* (Beiuş), *Deutsch Em.* (P, T.), *Dodu A. Eug* (Bucureşti), *Gherlan I. V.* (P. T.), *Giurconiu M.* (P T.), *Hurezeanu R.* (P. T.), *Man Iosif* (P. T.), *Marinescu S. D* (Ploieşti), *Mihăilescu C.* (Bucureşti), *Neguţ A. I.* (Tg.-Jiu), *Nicoară M.* (Oradea), *Pantea N. Alex.* (Beiuş), *Petcu Val.* (Bucureşti), *Pisanca N. I.* (Timişoara), *Popa F. P.* (Oradea), *Purcea M. I.* (Caracal), *Roibu T.* (Beiuş), *Roman I. C.* (Timişoara), *Schlomiuk H. N.* (Sibiu), *Seracin Eug.* (P. T.), *Simeon L.* (P. T.), *Stănescu D. C.* (Reşiţa), *Stănilă D. G.* (Buzău), *Tămăşescu D. V.* (Tg -Jiu) şi *Tibăr I. A.* (Constanţa).

Gh. Th. Gh.

Problema 2590. — *Să se afle maximul sau minimul funcţiei*

$$(1)\qquad w=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2$$

ştiind că variabilele x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 satisfac relaţiile de legătură

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{x_1-a_1}{A_1}=\dfrac{y_1-b_1}{B_1}=\dfrac{z_1-c_1}{C_1} \\ \dfrac{x_2-a_2}{A_2}=\dfrac{y_2-b_2}{B_2}=\dfrac{z_2-c_2}{C_2}. \end{cases}$$

Discuţie. Interpretare geometrică.

EUGEN VISA

Soluție dată de D-l *Wegener Eug. Nic.* (București). Punând:

$$\frac{x_1 - a_1}{A_1} = \frac{y_1 - b_1}{B_1} = \frac{z_1 - c_1}{C_1} = \lambda,$$

$$\frac{x_2 - a_2}{A_2} = \frac{y_2 - b_2}{B_2} = \frac{z_2 - c_2}{C_2} = \mu,$$

obținem:

$$x_1 - x_2 = a_1 - a_2 + \lambda A_1 - \mu A_1,$$
$$y_1 - y_2 = b_1 - b_2 + \lambda B_1 - \mu B_2,$$
$$z_1 - z_2 = c_1 - c_2 + \lambda C_1 - \mu C_2;$$

și deci:

$$w = \Sigma (a_1 - a_2 + \lambda A_1 - \mu A_2)^2,$$

w fiind o funcție de două variabile λ, μ.

Extremele acestei funcțiuni sunt date de soluțiile sistemului:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial \lambda} = 2 \Sigma A_1 (a_1 - a_2 + \lambda A_1 - \mu A_2) = 0 \\ \dfrac{\partial w}{\partial \mu} = -2 \Sigma A_2 (a_1 - a_2 + \lambda A_2 - \mu A_2) = 0, \end{cases}$$

care poate fi scris și sub forma:

$$(S) \begin{cases} \lambda (A_1^2 + B_1^2 + C_1^2) - \mu (A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2) = \Sigma A_1 (a_2 - a_1) \\ \lambda (A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2) - \mu (A_2^2 + B_2^2 + C_2^2) = \Sigma A_2 (a_2 - a_1) \end{cases}$$

pe care rezolvindu-l, obținem:

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{\Sigma A_2^2 \Sigma A_1 (a_2 - a_1) - \Sigma A_1 A_2 \Sigma A_2 (a_2 - a_1)}{\Sigma (A_1 B_2 - A_2 B_1)^2} \\ \mu = \dfrac{\Sigma A_1 A_2 \Sigma A_1 (a_2 - a_1) - \Sigma A_1^2 \Sigma A_2 (a_2 - a_1)}{\Sigma (A_1 B_2 - A_2 B_1)^2} \end{cases}$$

Pentru acest sistem de valori ale lui λ și μ funcția este extremă și pentru a decide dacă avem un maxim sau minim, formăm:

$$E = \frac{\partial^2 w}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \mu^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \lambda \partial \mu} \right)^2,$$

care, în cazul nostru este:

$$E = (2 \Sigma A_1^2)(2 \Sigma B_1^2) - (2 \Sigma A_1 B_1)^2;$$

sau:

$$E = 4 [\Sigma A_1^2 \Sigma B_1^2 - (\Sigma A_1 B_1)^2]$$

și ținând seamă de identitatea lui *Lagrange*

$$E = 4 \Sigma (A_1 B_2 - A_2 B_1)^2 > 0$$

și cum:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \lambda^2} = 2 \Sigma A_1^2 > 0$$

deducem că funcția *trece printr'un minim.*

Discuție și interpretare geometrică. Funcțiunea w reprezintă patratul distanței dintre punctele (x_1, y_1, z_1) și (x_2, y_2, z_2) date prin coordonatele lor carteziene în raport cu un sistem de referință $O x y z$, punctele fiind situate respectiv pe dreptele de ecuații

$$(D_1) \qquad \frac{x_1 - a_1}{A_1} = \frac{y_1 - b_1}{B_1} = \frac{z_1 - c_1}{C_1},$$

$$(D_2) \qquad \frac{x_2 - a_2}{A_2} = \frac{y_2 - b_2}{B_2} = \frac{z_2 - c_2}{C_2}.$$

Din considerațiuni geometrice, rezultă că minimul lui w corespunde când cele două puncte sunt picioarele perpendicularei comune pe cele două drepte (D_1) și (D_2).

Am arătat mai sus că λ și μ pentru care corespunde minimul lui w, satisfac un sistem de două ecuații cu două necunoscute (S). Condiția ca acest sistem să fie compatibil este:

$$\Sigma (A_1 B_2 - A_2 B_1)^2 \neq 0.$$

În caz contrar, este ușor de arătat că relația:

$$\Sigma (A_1 B_2 - A_2 B_1)^2 = 0$$

atrage după sine:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

ceeace exprimă condiția de paralelism a directiunilor (D_1) și (D_2). În acest caz w este distanța constantă între cele două drepte, existând o infinitate de puncte pe cele două drepte pentru care

$$w = \text{minim} = \text{constant}.$$

În cazul când dreptele (D_1) și (D_2) sunt secante, este clar că minimul lui w are loc pentru punctul lor de intersecție.

Condiția ca cele două drepte să nu fie coplanare este:

$$\begin{vmatrix} a_2 - a_1 & b_2 - b_1 & c_2 - c_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

În concluzie: minimul este efectiv în cazul când

dreptele (D_1) şi (D_2) nu sunt coplanare. În acest caz, valorile lui λ şi μ sunt soluţiile sistemului (S) şi minimul lui w este:

$$w_0 = \Sigma (a_1 - a_2 + \lambda A_1 - \mu A_2)^2,$$

unde λ şi μ sunt valorile determinate mai sus.

Această expresie reprezintă patratul distanţei între cele două drepte.

Altă soluţie dată de D-ra *Raţiu M.* (P. T.).

Observare. Autorul problemei scrie minimul lui w sub forma interesantă

$$w_0 = \frac{\Sigma (a_1 - a_2)(B_1 C_2 - B_2 C_1)}{\Sigma (B_1 C_2 - B_2 C_1)^2}$$

care în cazul că dreptele sunt paralele, devine

$$w_0 = \frac{\Sigma (a_1 - a_2) B_1 - (b_1 - b_2) A_1]}{\Sigma A_1^2}.$$

Problema 2598. — *Să se elimine u, v, w între ecuaţiile*

$$\begin{aligned} &A v^2 - 2 B u v + C u^2 = 0, \\ &A v w - B u w - D u v + E u^2 = 0, \\ &A w^2 - 2 D u w + F u^2 = 0, \end{aligned}$$

şi să se scrie rezultatul sub formă de determinant

GH. TH. GHEORGHIU

Soluţia. Din a doua ecuaţie scoatem

$$\frac{w}{v} = \frac{D v - E u}{A v - B u},$$

valoare care introdusă în ultima ne dă

$$(AF - D^2)(Av^2 - 2Buv) + AE^2 - 2BDE + FB^2)u^2 = 0,$$

şi care în baza primei ecuaţii devine

$$-C(AF - D^2) + AE^2 - 2BDE + FB^2 = 0.$$

Acesta este rezultatul eliminării. Această expresie se mai poate scrie şi sub forma

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0,$$

lucru uşor de verificat dezvoltând acest determinant şi constatând că obţinem rezultatul scris sub prima formă.

Observare. Această problemă îşi are origina într'o chestiune de Geometrie Analitică. Să considerăm curba de gr. 2

$$(2) \qquad A x^2 + 2 B x y + C y^2 + 2 D x + 2 E y + F = 0$$

pe care s'o intersectăm cu dreapta

$$(3) \qquad u x + v y + w = 0.$$

Ecuaţia care ne dă ordonatele punctelor de intersecţie se găseşte eliminând între aceste două ecuaţii pe x şi este

$$\begin{aligned} &(A v^2 - 2 B u v + C u^2) y^2 \\ &+ 2 (A v w - B u w - D u v + E u^2) y z \\ &+ (A w^2 - 2 D u w + F u^2) = 0. \end{aligned}$$

Pentruca dreapta (3) să aparţină în întregime curbei (2) este necesar ca această ecuaţie să fie o identitate, adică să avem

$$(4) \qquad \begin{cases} A v^2 - 2 B u v + C u^2 = 0, \\ A v w - B u w - D u v + E u^2 = 0, \\ A w^2 - 2 D u w + F u^2 = 0, \end{cases}$$

adică acest sistem să fie compatibil. Insă în acest curba (2) conţinând o dreaptă va fi degenerată, adică, condiţia ca sistemul (4) să fie compatibil, este (1).

Au rezolvat problema, scriind rezultatul sub forma (1), D-nii *Breazu M.* (Deva), *Deutsch Em.* (P. T.), *Neguţ I,* (Tg-Jiu), *Radu Corneliu* şi *Soare V. Mircea* (Bucureşti).

Au scris rezultatul sub o formă mai complicată D-ra *Raţiu M.* (P. T.) şi D-nii *Dodu A. Eug.* (Bucureşti), *Purcea M. I.* (Caracal).

Gh. Th. Gh.

Problema 2603. — *Să se demonstreze că între unghiurile α, β, γ sub care cercul ABC taie cercurile exînscrise în unghiurile A, B, C şi între elementele triunghiului, avem relaţiile*

$$\frac{\cos \alpha}{h_a} + \frac{\cos \beta}{h_b} + \frac{\cos \gamma}{h_c} = -\frac{1}{2R},$$

$$\frac{\cos^2 \frac{1}{2} \alpha}{r_a} + \frac{\cos^2 \frac{1}{2} \beta}{r_b} + \frac{\cos^2 \frac{1}{2} \gamma}{r_c} = \frac{3}{4R}.$$

ILIE N. CONSTANTINESCU

Soluție dată de D-l *Deutsch Em.* (P. T.). Fie M unul din punctele în care cercul circumscris (O) taie cercul circumscris (I_a). Cum

$$O I_a^2 = R(R + 2r_a)$$

(a se vedea de ex., *„Culegere de probleme de Trigonometrie* de *V. Cristescu*, partea II, cap. XIX, pr. 9), din triunghiul $O I_a M$ scoatem

$$O I_a^2 = O M^2 + I_a M^2 - 2 O M \cdot I_a M \cos\alpha$$

$$\therefore \quad \cos\alpha = \frac{r_a - 2R}{2R}.$$

Avem formule analoage pentru $\cos\beta$ și $\cos\gamma$.

Pentru prima relație avem

$$\Sigma \frac{\cos\alpha}{h_a} = \Sigma \frac{a}{2S} \cdot \frac{r_a - 2R}{2R} = \frac{\Sigma a r_a - 4pR}{4RS}.$$

Dar (loc. cit, cap. VI, pr. 25)

$$\Sigma a r_a = 2p(2R - r),$$

încât

$$\Sigma \frac{\cos\alpha}{h_a} = \frac{2p(2R - r) - 4pR}{4RS} = -\frac{2pr}{4RS} = -\frac{1}{2R},$$

deoarece $S = pr$.

Pentru a doua relație înlocuim pe $\cos\alpha$ în funcție de arcul pe jumătate și avem

$$\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{r_a}{4R}$$

încât

$$\Sigma \frac{\cos^2\frac{1}{2}\alpha}{r_a} = \frac{3}{4R}.$$

Observări. 1°. In cartea citată se găsește la cap. XXII, pr. 29 pentru $\cos\alpha$ următoarea expresie

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C$$

care în baza formulei cunoscute

$$r_a = 4R \sin\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C,$$

diferă de expresia din problema 2 03 prin semn. Cauza este că atât într'un caz, cât și în celalalt, nu se precizează cum se alege unghiul α. Această alegere poate fi făcută în două feluri, cele două unghiuri fiind suplimentare și deci cosinusul lor diferind prin semn.

2° D-l *Deutsch Em.* a mai dat, pe lângă relațiile din enunț, încă 31 de relații în care intră unghiurile α, β, γ.

3° Au mai rezolvat problema D-nii: *Pisanca I. N.* (Timișoara) și *Purcea M. I.* (Caracal). D-l *Man Iosif* (P. T.), ne-a trimes o soluție *telegrafică*.

Gh. Th. Gh.

Problema 2604. — *Să se arate că suprafața unui triunghiu oarecare* ABC *este dată de una din formulele*

$$S = R \sin\omega \sqrt{h_a^2 + h_b^2 + h_c^2},$$

$$\frac{1}{S} = \operatorname{tg}\omega \left(\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2}\right),$$

unde ω *este unghiul lui Brocard.*

P. TEODORESCU

Soluția. Fiind dat un triunghiu ABC, se numește *cerc adjunct* cercul care trece prin A, B și este tangent în B laturei BC. Un triunghiu are șase cercuri adjuncte care se împart în două grupe: cercurile tangente laturilor BC, CA, AB în B, C, A și cercurile tangente acelorași laturi în C, A, B. Aceste trei grupe de cercuri trec fiecare prin câte un punct Ω respectiv Ω'; aceste două puncte se numesc *punctele lui Brocard.* Se constată ușor că avem

$$\sphericalangle \Omega AB = \sphericalangle \Omega BC = \sphericalangle \Omega CA = \omega$$
$$\sphericalangle \Omega BA = \sphericalangle \Omega AC = \sphericalangle \Omega CB = \omega$$

unde ω se numește unghiul lui *Brocard* și este dat de una din formulele

$$(1) \quad \operatorname{cotg}\omega = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S} = \operatorname{cotg}A + \operatorname{cotg}B + \operatorname{cotg}C.$$

A doua formulă din enunț nu este decât această formulă scrisă sub o altă formă. În adevăr, (1) se mai poate scrie

$$\frac{1}{S} = \operatorname{tg}\omega \left[\left(\frac{a}{2S}\right)^2 + \left(\frac{b}{2S}\right)^2 + \left(\frac{c}{2S}\right)^2\right]$$
$$= \operatorname{tg}\omega \left(\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2}\right),$$

deoarece: (2) $2S = a h_a = b h_b = c h_c$.

Pentru ceailaltă formulă trebue să calculăm pe $\sin\omega$. Avem succesiv

$$\sin\omega = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2\omega}} = \frac{1}{\sqrt{16S^2 + (\Sigma a^2)^2}}.$$

Dar se știe că pornind dela formula care exprimă suprafața unui triunghiu în funcție de laturi, avem relația

$$16S^2 = 2\Sigma a^2 b^2 - \Sigma a^4,$$

încât

$$16S^2 + (\Sigma a^2)^2 = 4\Sigma a^2 b^2.$$

Avem deci

$$\sin\omega\sqrt{\Sigma a^2 b^2} = 2S$$

sau, împărțind cu formula cunoscută $abc = 4RS$,

$$\sin\omega\sqrt{\Sigma\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{2R}$$

sau încă, în baza relațiilor (2),

$$\sin\omega\frac{\sqrt{\Sigma h_a^2}}{2S} = \frac{1}{2R}$$

care nu este alta decât a doua formulă din enunț.

Au rezolvat problema D-nii: *Bălăuță M.* (Deva), *Breazu M.* (Deva), *Deutsch Em.* (P. T.), *Gherlan I. Vas* (P., T.), *Neacșu V.* (Constanța) și *Pisanca N. I.* (Timișoara).

Gh. Th. Gh.

Problema 2614. — *Să se arate că într'un triunghiu* ABC *avem*

$$\operatorname{tg}^2A\operatorname{tg}^2B\operatorname{tg}^2C - \Sigma\operatorname{tg}^2A = 2\left(\frac{4R_1}{r_1}+1\right),$$

R_1 *și* r_1 *fiind respectiv raza cercului circumscris și înscris triunghiului ortic al triunghiului* ABC.

C. I. ROMAN

Soluția. Ridicând relația cunoscută

$$\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C = \Sigma\operatorname{tg}A,$$

la pătrat, prima parte E a identității din enunț se scrie

$$E = 2\Sigma\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B = 2\frac{\Sigma\sin A\sin B\cos C}{\cos A\cos B\cos C}$$

$$= 2\frac{\cos A\cos B\cos C - \cos(A+B+C)}{\cos A\cos B\cos C}$$

$$= 2\left(\frac{1}{\cos A\cos B\cos C}+1\right).$$

Dar, cercul circumscris triunghiului ortic este cercului lui *Euler* al triunghiului a cărui rază este $R_1 = \frac{1}{2}R$, iar raza cercului înscris este dată de formula

$$r_1 = 4R_1\sin\tfrac{1}{2}A_1\sin\tfrac{1}{2}B_1\sin\tfrac{1}{2}C_1,$$

unde A_1, B_1, C_1 sunt unghiurile triunghiului ortic, adică $A_1 = 180^0 - 2A, \ldots$, încât

$$\frac{r_1}{4R_1} = \cos A\cos B\cos C,$$

și deci, înlocuind mai sus,

$$E = 2\left(\frac{4R_1}{r_1}+1\right).$$

Au rezolvat problema D-nii: *Bălăuță M.* (Deva), *Deleanu I. Arc.* (București), *Breazu M.* (Deva), *Deutsch Em.* (P. T.), *Gherlan I. Vas.* (P. T.), *Pisanca N I.* (Timișoara), *Nemoianu C.* (P.T.), *Purcea M. I.* (Caracal) și *De Sabata I.* (Beiuș).

Gh. Th. Gh.

Problema 2617. — *Fie* x_1, x_2, *și* x', x'' *respectiv rădăcinile ecuațiilor:*

$$x^2 + px + q = 0, \quad x^2 + qx + p = 0.$$

1° *Să se formeze ecuația în* y *care are rădăcini*

$$y_1 = x_1^2x' + x_2^2x'', \quad y_2 = x_1^2x'' + x_2^2x'.$$

2° *Presupunând* $p = 1$, *pentru ce valori ale lui* q *ecuația în* y *obținută are rădăcinile reale?*

I. STAMATE

Soluția. 1° Relațiile între rădăcinile și coeficienții ecuațiilor date sunt

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x' + x'' = -q,$$
$$x_1x_2 = q; \qquad x'x'' = p.$$

Cu ajutorul acestor relații, găsim

$$y_1 + y_2 = (x'+x'')(x_1^2+x_2^2) = (x'+x'')[(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2]$$
$$= -q(p^2 - 2q),$$

$$y_1y_2 = x'x''(x_1^4 + x_2^4) + x_1^2x_2^2(x'^2 + x''^2)$$
$$= x'x''[(x_1^2+x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2] + x_1^2x_2^2(x'^2+x''^2)$$
$$= p[(p^2-2q)^2 - 2q^2] + q^2(q^2-2p) = p^5 - 4p^3q + q^4.$$

Ecuația căutată este deci

$$y^2 + q(p^2-2q)y + (p^5 - 4p^3q + q^4) = 0.$$

2° Pentru $p = 1$, realizantul acestei ecuații este

$$-4q^3 + q^2 + 16q - 4 \equiv -(q+2)(4q-1)(q-2)$$

expresie ce este pozitivă pentru $q \leq -2$ sau $\frac{1}{4} \leq q \leq 2$. Acestea sunt deci condițiile pentruca ecuația dată să aibă rădăcini reale.

Au rezolvat problema D-nii *Bogoevici I. N.* (Caransebeș), *Breazu M.* (Deva), *Deleanu I. Ar.* (București). *Deutsch Em.* (P. T.), *Drăghici I.* (Caransebeș), *Gertler N. R.* (București), *Mănoilă Dan* (Constanța), *Petcu Al. Val.* (București), *Popovici N. C* (București), *De Sabata P. I.* (Beiuș) și *Soare V. M.* (București).

Gh. Th. Gh.

PROBLEME PROPUSE

2665. — Să se arate că expresia

$$E = 22.5^{8n+2} + 77.2^{6n}.5^{4n+1} + \\ + 2^{20n+4}.5^{4n+1} + 7.2^{26n}$$

se divide prin 1938, oricare ar fi n întreg şi pozitiv.

PAUNESCU ST.GHEORGHE

2666. — Să se arate că expresia

$$p^2\frac{(a-q)(r-a)}{(p-q)(r-p)} + q^2\frac{(p-a)(a-r)}{(p-q)(q-r)} + \\ + r^2\frac{(q-a)(a-p)}{(q-r)(r-p)}, \qquad (p \neq q \neq r)$$

este independentă de p, q, r.

EMERIC DEUTSCH

2667. — Dacă: $x+y+z+xy+yz+zx=1+xyz$, atunci avem şi

$$\frac{xy}{(1-x^2)(1-y^2)} + \frac{yz}{(1-y^2)(1-z^2)} + \frac{zx}{(1-z^2)(1-x^2)} = \frac{1}{4}.$$

C. IONESCU-TIU

2668. — P şi E fiind funcţiuni de x, date prin relaţiile

$$P = \frac{(x-a)^3+a^3}{x} - \frac{(x-a)^3-a^3}{x-2a},$$

$$E = \frac{(\sqrt{x} \pm \sqrt{a})^3 \mp \sqrt{a^3}}{\sqrt{x}} - \frac{(\sqrt{x} \pm \sqrt{a})^3 \pm \sqrt{a^3}}{\sqrt{x} \pm 2\sqrt{a}},$$

să se arate că avem

$$\frac{dP}{dE} = \frac{P}{E} - \frac{E}{2}.$$

FL. NEDELCU

2669*. — Se consideră un triunghiu ABC şi un punct O în planul său. Pe OA, OB OC se consideră punctele A', B', C' astfel ca

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'} = k.$$

Dacă M, N, P sunt mijloacele segmentelor $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$, se cere: 1°. Să se arate că dreptele AM, BN, CP sunt concurente într'un punct I. 2°. Care este locul lui I când k variază?

GH. TH. GHEORGHIU

2670. — Fie (C) un cerc de centru dat şi de rază variabilă. Din corzile de lungime dată, care se pot înscrie în (C), se consideră acelea paralele cu tangentele duse la (C) din un punct dat P. Se cere locul proiecţiilor lui P pe aceste corzi.

G-L GH. BUICLIU

2671. — Să se afle locurile punctelor de ordonată maximă ale familiilor de cubice,

$$y^2(x-1) = \varepsilon(x+m)^2(x+1); \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

unde m este un parametru real.

EUGEN VISA

2672. — Să se arate că dacă avem

$$\Sigma \operatorname{tg}^2 a (\operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c) = 0,$$

atunci:

$$\begin{vmatrix} \cos(a-b) & \cos(b-c) & \cos(c-a) \\ \cos(a+b) & \cos(b+c) & \cos(c+a) \\ \sin(a-b) & \sin(b-c) & \sin(c-a) \end{vmatrix} = \frac{3}{2}\sin 2a \sin 2b \sin 2c.$$

P. P. TEODORESCU

2673*. — Intr'un triunghiu oarecare ABC ducem axa Ax pe care se află mediana $AM = m$ şi însemnăm

$$\sphericalangle CAM = \alpha, \quad \sphericalangle BAM = \beta, \quad \sphericalangle CMx = \gamma.$$

Să se stabilească relaţiile:

$$4bc\cos(\alpha-\gamma) + a^2\cos 2\gamma = 4m^2$$
$$4bc\sin(\alpha-\beta) + a^2\sin 2\gamma = 0$$
$$a^4 + 16(m^2-b^2c^2) = 8a^2m^2\cos 2\gamma.$$

V. ALACI

2674. — Se dă câmpul definit de vectorul u, de componente date de

$$f(z)X = \varphi(z) - \psi(x), \quad f(z)Y = \varphi(z) - \psi(y), \\ Z = g(x, y, z),$$

Să se determine f, φ, ψ, g astfel încât câmpul să fie *laplacian* adică, să aibă rotaţia şi divergenţa nule în acelaş timp, p fiind constantă în acelaş timp cu ψ.

M. GHERMANESCU

ERATA.

In n-rul trecut (7) al R. M. T. se vor face următoarele rectificări:

1° Pag. 108, col. II, rândul 9 de jos, în loc de 10', se va citi 11';

2° Pag. 110, col. II, rândul 3, în loc de *alăturată* se va citi *alăturată*[1];

3° Pag. 111, col. I, rândul 2, în loc de *c p x* se va citi *cpx dx*.

4° Pag. 112, col. I, rândul 11 de jos, în loc de *având* se va citi *având respectiv*.

INFORMAŢII

1. Nu se publică în revistă decât manuscrise dela abonaţi.

2. Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol, trebuesc scrise citeţ (în special iscălitura) numai pe o parte a hârtiei. Probleme propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor, iar cele rezolvate, de enunţ. Nu sunt luate în considerare probleme rezolvate iscălite de mai mulţi corespondenţi. Problemele rezolvate vor fi redactate îndependent una de alta, şi nu în continuare.

3. Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

4. Numele colaboratorilor dela cari s'au primit soluţii la problemele publicate în acest număr şi care au sosit la redacţie după data de 15 a lunei precedente, nu mai pot fi trecute în corpul revistei Numele lor este însă menţionat pe copertă împreună cu numărul problemei rezolvate.

5. Rugăm pe corespondenţii noştrii la orice schimbare de adresă sau lipsă din localitate fără a avea pe cineva să le primească revista, să ne anunţe din vreme. În caz contrar revista ne vine înapoi şi cu regret anunţăm că a doua oară nu o mai putem expedia. Mai mult, se suspendă expedierea numerelor următoare până ce abonatul va reclama aceste numere.

6. *Danielopol St.* Numerele care reclamaţi că nu le-aţi primit vi s'au trimes la vreme. V'am notat pentru a vă avea în vedere la Februarie 1949.

Manuscrise primite de la corespondenții noștrii până la 1 a lunei curente și anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) și probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

---

Bălăuță M. (P., 2325, 2330, 2634); *Bandler D.* (P.); *Boerescu P. G.* (N; P.); *Bogoevici N.* (2623. 2636); *Breazu Mihai* (2616, 2634); *Coatu Gh.* (P); *Constantinescu Gh.* (2598, 2621, 2625, 2628, 2635); *Coțiu Aurel* (P. 2487, 2557, 2584, 2585, 2587, 2602, 2616, 2617, 2623, 2634, 2636); *Cristian Aurel* (P; 2621, 2650); *Deutsch Emeric* (2626, 5631, 2646, 2654, 2657, 2660, 2664); *Găzdău Mircea* (2639, 2659, 2663); *Manoilă Dan* (2659); *Niculescu V. Gh.* (A; P); *Pecu Valeriu* (P. 2621, 2627, 2648, 2654, 2664); *Purcea Ion* (2628, 2631); *Radu Corneliu* (2635, 2636, 2637, 2638, 2642, 2643); *De Sabata Ioan* (2602, 2609, 2626, 2627, 2629, 2632, 2633, 2636, 2648, 2653, 2654); *Tibăr Aurel* (P; 2570, 2646, 2648, 2655, 2657, 2664; *Țintariu E Dan* (2496); *Zănescu Livlu* (2614, 2632, 2653, 2619, 2664); *Wegener Eugen* (P; 2126, 2255).

ANUL XXVIII. NOEMVRIE 1948. No. 9.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA
PREȚUL ABONAMENTULUI ESTE 300 LEI ANUAL PENTRU PARTICULARI
ȘI 600 LEI PENTRU INSTITUȚII
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRAINĂTATE ESTE DE 600 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **E. VISA**: ASUPRA CUBICELOR CIRCULARE SI IPERBOLICE-ECHILATERE UNICURSALE DREPTE.
2. NOTE MATEMATICE 15, 16
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 1060, 1116, 1126, 1878, 2158, 2189, 2507, 2518, 2545, 2560, 2597, 2627, 2629, 2630, 2636.
5. PROBLEME PROPUSE: 2675-2684.
6. INFORMATII.

Tip. „Gh. Hălmăgeanu", Timișoara
Înreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebue să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă"

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara, conţinând articole, note, probleme propuse şi rezolvate, vor fi trimise pe adresa: Prof. V. Alaci, Politehnica, Timişoara.

Administraţia revistei aduce la cunoştinţa generală următoarele:

1. Abonamentul pe anul XXVIII (15 Martie 1948 — 15 Februarie 1949) este 300 lei pentru particulari şi 600 pentru instituţii.

2. Taxa de membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este de 200 lei.

3. Volumele I, XXIII, XXV, XXVI şi XXVII sunt epuizate. Celelalte volume broşate se găsesc de vânzare cu preţul de 300 lei fiecare. La această sumă se va adăoga 50 lei costul expediţiei. In caz că se comandă mai multe volume se va adăoga la taxa de 26 lei pentru recomandat, câte 20 lei pentru fiecare volum.

4. Se găsesc de vânzare numere izolate din colecţie chiar din volumele epuizate. Preţul unui număr este de 30 lei la care se adaogă 2 lei expediţia. Din vol. XXVII se găsesc de vânzare no. 1, 4—12.

5. Se primesc reclamaţii că se pierde revista prin poştă. Aceste reclamaţii sunt adunate în ordinea sosirii lor şi vor fi satisfăcute la 15 Februarie 1949 când se vor vedea ce numere rămân descomplectate după legarea volumelor întregi. Orice reclamaţie de pierderea unui număr nu este luată în seamă decât la o lună dela data apariţiei acelui număr.

6. Tot ce priveşte administraţia se va adresa D-lui Prof. **Gh. Th. Gheorghiu** str. Voltaire Nr. 1, Timişoara I. Reclamaţiile ce necesită răspuns vor fi însoţite de o carte poştală timbrată legal.

7. Orice sumă destinată revistei se poate trimite prin CEC sub contul n-rul 85208 sau prin mandat postal D-lui Prof. **Gh. Th. Gheorghiu** pe adresa de mai sus.

ANUL XXVIII — No 9. TIMISOARA, 1948 NOEMBRIE 15

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

Prețul abonamentului este 300 lei pentru particulari și 600 lei pentru instituții.
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. GH. TH. GHEORGHIU
Timișoara I, Str. Voltaire, No. 1.

ASUPRA CUBICELOR CIRCULARE ȘI IPERBOLICE-ECHILATERE UNICURSALE DREPTE

DE

EUGEN VIȘA

Printre exercițiile care urmează obișnuit după capitolul relativ la construcția curbelor, în cursurile mai desvoltate de Geometrie analitică se întâlnesc uneori și probleme în care se cere să se studieze sau, să se discute diversele forme ale unei curbe dată prin ecuația ei, după valorile unuia și chiar a doi parametri care figurează în ecuația respectivă.

Ne propunem a face în cele de mai jos un studiu de acest fel cu privire la cubicele circulare și iperbolice-echilatere unicursale drepte, ale căror ecuații pot fi reduse, precum vom vedea, așa fel încât, să cuprindă fiecare câte un singur parametru.

Pentru scopul urmărit, vom considera în prealabil o cubică oarecare din clasa mai generală a cubicelor unicursale cu directoare conice.

Ecuația unei astfel de cubice, raportată la un sistem de axe de coordonate rectangulare cu origina în punctul ei dublu fiind[1],

$$(1)\qquad \begin{aligned}&(Ax+By+C)(a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2)\\&-2(Ax+By)(a_{13}x+a_{23}y)=0,\end{aligned}$$

se înțelege că, pentru ca această ecuație să reprezinte o cubică din categoria particulară a celor de care vrem a ne ocupa, trebue să avem îndeplinite mai întâi condițiile:

$$(2)\qquad \begin{cases} a_{12}=0\\ a_{22}+\varepsilon a_{11}=0,\ (\varepsilon=\pm 1),\end{cases}$$

care exprimă tocmai că directoarea conică corespunzătoare,

$$(3)\qquad a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y=0,$$

este cerc sau iperbolă echilateră, pentru $\varepsilon=-1$ având anume atunci cazul unei cubice circulare unicursale, iar pentru $\varepsilon=+1$, cazul unei cubice iperbolice-echilatere unicursale.

Urmează deci, în virtutea relațiilor de condiție (2), că ecuația (1) se reduce la,

$$(4)\qquad a_{11}(Ax+By+C)(x^2-\varepsilon y^2)-2(Ax+By)(a_{13}x+a_{23}y)=0,$$

de unde, dacă mai introducem notațiile,

$$(5)\qquad \begin{cases} a_{13}=-a\,a_{11}\\ a_{23}=\varepsilon\,b\,a_{11},\end{cases}$$

obținem:

$$(6)\qquad (Ax+By+C)(x^2-\varepsilon y^2)+2(Ax+By)(ax-\varepsilon by)=0$$

care este în modul acesta, ecuația generală redusă a unei cubice circulare, respectiv iperbolice-echilatere, unicursale, după cum ε are valoarea -1 sau $+1$.

Obligând acum cubica (6), pe care o presupunem în general propriu zisă, să fie dreaptă, sau cu alte cuvinte, să admită o axă de simetrie, care în mod necesar va trebui să treacă prin punctul dublu, adică, în cazul nostru, prin origină, deducem că lucrul acesta poate avea exclusiv loc, dacă însuși triunghiul format de cele trei asimptote ale ei admite o astfel de axă.

Dar se știe[2] și de altfel se poate din nou constata că, în ipoteza când dreapta

$$(7)\qquad Ax+By+C=0$$

nu e paralelă cu nici una din direcțiile asimptotice ale conicei directoare (3), devenită în baza acelorași relații de condiție (2) și a notațiilor suplimentare (5),

$$(8)\qquad x^2-\varepsilon y^2-2(ax-\varepsilon by)=0,$$

[1] A se vedea de ex: *E. Vișa, Asupra unor cubice unicursale*, R. M. T., Vol. XXVII. N-rele 9 și 10.

[2] R. M. T., loc. cit.

ipoteză care constitue tocmai una din condițiile necesare de nedegenerarea cu bicei considerate, (6) de astă dată, una din asimptotele acestei cubice e însăși dreapta (7), celelalte două asimptote ale ei fiind aceleași cu asimptotele simetricei acestei conice față de punctul dublu, adică, față de origina axelor, asimptote care în speță e ușor de văzut că au ecuațiile,

$$(9) \qquad \begin{cases} y+b=\sqrt{\varepsilon}(x+a) \\ y+b=-\sqrt{\varepsilon}(x+a). \end{cases}$$

Or, acuma dacă $\varepsilon=-1$, deci dacă ne aflăm în cazul unei cubice circulare, dreptele (9) sunt imaginare, așa încât în cazul acesta, va trebui ca dreapta (7) singură să admită o axă de simetrie. Cum această axă trebue însă, conform celor stabilite ceva mai nainte, să treacă prin origină și cum ea nu poate fi chiar dreapta (7), căci în acest caz C fiind nul, cubica ar degenera[3], ceeace noi am exclus în general, rezultă cu necesitate că este perpendiculara dusă prin origină pe dreapta (7), adică dreapta

$$(10) \qquad Bx-Ay=0.$$

Scriind atunci pentru simplificare că dreapta (10) se reduce la axa Ox, rezultă condiția

$$(11) \qquad B=0,$$

în baza căreia, ecuația (6) devine

$$(12) \quad (Ax+C)(x^2-\varepsilon y^2)+2Ax(ax-\varepsilon by)=0.$$

Observăm însă foarte clar că relația de condiție (11) nu este suficientă pentru ca axa Ox să fie axă de simetrie și a cubicei (6). Pentru aceasta mai trebue, după cum se observă privind ecuația (12), să avem în acelaș timp și relația

$$(13) \qquad b=0,$$

în baza căreia, ecuația (12) devine apoi,

$$(14) \quad (Ax+C)(x^2-\varepsilon y^2)+2aAx^2=0,$$

ε având valoarea -1.

În ceeace privește acum cazul când $\varepsilon=+1$, deci al unei cubice iperbolice-echilatere, după cum s'a arătat dintr'un alt prilej[4], condițiile pentru existența unei axe de simetrie a cubicei (6), reductibilă la axa Ox, sunt tot cele date de relațiile (11) și (13), de unde urmează că ecuația (14), cu $\varepsilon=-1$ de astă dată, rămâne aceeași și pentru acest caz.

Remarcăm însă în continuare că, prin introducerea notației

$$(15) \qquad C=-kA,$$

ecuația (14) se mai simplifică puțin și devine,

$$(16) \quad (x-k)(x^2-\varepsilon y^2)+2ax^2=0,$$

de unde, prin rezolvare în raport cu y, deducem apoi forma explicită,

$$(17) \qquad y=\pm x\sqrt{\varepsilon\left[\frac{x-(k-2a)}{x-k}\right]},$$

care prin schimbarea de notație,

$$(18) \qquad k=(m+1)a,$$

devine încă,

$$(19) \quad y=\pm x\sqrt{\varepsilon\left[\frac{x-(m-1)a}{x-(m+1)a}\right]}, \qquad (\varepsilon=\pm 1).$$

Operând acum în cele din urmă substituția

$$(20) \qquad \begin{cases} x=a(X+m) \\ y=aY \end{cases}$$

care definește, o deplasare a axei ordonatelor făcută paralel cu ea însăși, adică o translație de-alungul axei absciselor, apoi o schimbare a unității de măsură pe ambele axe, precum și o schimbare a orientării lor, în cazul când a este negativ, lucruri care evident, nu modifică întru nimic forma curbelor respective, deducem că ecuația (19) devine la rândul său,

$$(21) \qquad Y=\pm(X+m)\sqrt{\varepsilon\left(\frac{X+1}{X-1}\right)}, \qquad (\varepsilon=\pm 1)$$

și astfel avem în (21) sub forma cea mai redusă — canonică — și depinzând de un singur parametru m, ecuația comună a celor două categorii de cubice de care vrem a ne ocupa.

Raportându-ne deci la ecuația (21), urmează atunci că întreg studiul nostru, adică toată discuția se reduce la însăși discuția acestei ecuații și în speță la discuția funcției explicite pe care o definește ea pentru $\varepsilon=-1$ și a celeia pe care o definește pentru $\varepsilon=+1$.

Mai nainte însă, vom stabili următoarea teoremă, prin care se face dela început distincție între forma

---

[3]) R. M. T., loc. cit.

[4]) *E. Vișa, Cubice iperbolice unicursale.* R. M. T., Vol. XXVII, Nr. 5.

generală a unei *cubice circulare* şi aceea a unei *cubice iperbolice-echilatere* dintre cele admise ca reprezentări grafice de funcţiile corespunzătoare din (21).

Teoremă. *Exceptând valoarea* -1, *pentru toate celelalte valori ale lui m, cubica circulară admisă ca reprezentare grafică de funcţia corespunzătoare din (21), este o curbă alcătuită dintr'o singură ramură nelimitată în ambele ei sensuri şi în întregime situată in regiunea planului cuprinsă între dreptele paralele la axa* Y*-cilor de ecuaţii*

$$(22) \qquad \begin{cases} X = -1 \\ X = +1, \end{cases}$$

iar cubica iperbolică-echilateră este o curbă alcătuită din trei ramuri distincte, fiecare fiind de aseme nea nelimitată în ambele ei sensuri şi dintre care una se află cu toate punctele ei situată în regiunea din stânga celei de mai sus, iar celelalte două, în regiunea din dreapta ei[5].

În adevăr, e de constatat în primul rând, că exceptând valoarea -1 a parametrului *m*, când cubicele reprezentative corespunzătoare ale funcţiilor (21) degenerează în dreapta reprezentată de prima ecuaţie din (22) şi una din conicele

$$(23) \qquad X^2 - \varepsilon Y^2 - 1 = 0, \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

pentru oricare alte valori ale lui, aceste cubice sunt propriu zise.

Considerând atunci o valoare oarecare a lui *m* diferită de -1, observăm că intervalul $(-1 \leqq X \leqq 1)$ constitue pentru funcţia din (21) corespunzătoare lui $\varepsilon = -1$, domeniul ei de existenţă, iar pentru cea corespunzătoare lui $\varepsilon = +1$, domeniul de neexistenţă, ceeace însemnează cu alte cuvinte că, indiferent de valoarea respectivă a lui *m*, *cubica circulară* în discuţie şi cea *iperbolică-echilateră* sunt de fapt, prima în regiunea planului limitată de dreptele (22), iar a doua, exterioară acestei regiuni, adică în regiunile limitrofe acesteia.

Or, dacă ne raportăm acum mai de aproape la funcţia cu domeniul de existenţă constituit de intervalul $(-1 \leqq X \leqq 1)$, avem de observat următoarele

Fiecare din determinările acestei funcţii, pozitivă sau negativă, este continuă în tot intervalul de mai sus, începând prin a fi nulă pentru $X = -1$ şi sfârşind prin a tinde, una către $+\infty$, iar ceealaltă către $-\infty$, când X tinde către $+1$. Urmează deci că ramurile de curbă corespunzătoare sunt şi ele continui, plecând fiecare din punctul axei X*-ilor* de coordonate $(-1, 0)$, pentru ca, indiferent dacă mai intersectează vreodată sau nu această axă, să sfârşească amândouă prin a tinde asimptotic, dar în sensuri diferite, spre dreapta paralelă axei Y-ilor de ecuaţie

$$(24) \qquad X = -1,$$

ceeace denotă că, aceste două ramuri nu sunt esenţial distincte şi că, propriu zis, în ansamblul lor, alcătuesc o singură ramură de curbă, care se întinde la infinit în ambele ei sensuri.

În modul acesta, partea teoremei privitoare la cubicele circulare date de funcţia corespunzătoare din (21) este complet demonstrată.

Rămâne deci să complectăm demonstrarea părţii privitoare la cubicele iperbolice, pentru care scop, vom judeca în mod cu totul analog.

Anume, vom observa întâi şi în privinţa funcţiei din (21) care conduce la acestea din urmă cubice, adică a celeia al cărei domeniu de existenţă e constituit de intervalele

$$(-\infty \leqq X \leqq -1) \text{ şi } (+1 \leqq X \leqq +\infty),$$

că fiecare din determinările ei, pozitivă sau negativă, este continuă în amândouă intervalele de mai sus.

Făcând atunci pe X să varieze în primul din aceste intervale prin valori descrescătoare dela -1 la $-\infty$, constatăm că ambele determinări incep prin a fi nule, pentru ca, indiferent dacă se mai anulează sau nu vreodată, să sfârşească prin a tinde, una către $+\infty$, iar celalaltă către $-\infty$, de unde urmează că ramurile de curbă corespunzătoare se reduc şi în cazul acesta la una singură, nelimitată în ambele ei sensuri.

Trecând acum la al doilea interval şi făcând de astă dată pe X să varieze prin valori crescătoare dela $+1$ la $+\infty$, constatăm că una din determinările funcţiei corespunzătoare din (21) începe prin a fi egală cu $+\infty$, iar cealaltă cu $-\infty$, pentru

[5]) În raport cu regiunea planului axelor de coordonate, cuprinsă între dreptele de ecuaţii (22), numim regiune din *stânga*, acesteia, aceea pentru care $X < 1$, iar regiune din *dreapta*, aceea pentru care $X > 1$.

a sfârşi apoi amândouă respectiv tot cu valorile $+\infty$ şi $-\infty$ sau respectiv cu valorile $-\infty$ şi $+\infty$.

Presupunând în primul rând, pentru fixarea ideilor, că determinarea care a început prin a fi egală cu $+\infty$, sfârşeşte cu aceeaşi valoare, este clar că ramura de curbă corespunzătoare nu ar putea intersecta axa X-*ilor*, decât într'un număr par de puncte. Cum însă curba, în ambele intervale $(-\infty, -1)$ şi $(+1, +\infty)$, nu intersectează decât de două ori această axă, anume pentru $X=-1$, care nu este în intervalul de care ne ocupăm de astă dată şi pentru $X=-m$, este evident că nici acest punct nu este în acest interval[6], de unde rezultă că ramura respectivă, care e clar că se întinde la infinit în ambele ei sensuri, este în întregime situată de partea *superioară* a axei X-*ilor*[7], ceialaltă ramură fiind natural, din cauza simetriei, de partea *inferioară* a axei respective şi ca atare, distinctă de prima şi întinzându-se de asemenea la infinit în ambele ei sensuri.

Tot aşa, dacă presupunem acum în al doilea rând, că determinarea care a început prin a fi egală cu $+\infty$, sfârşeşte prin valoarea $-\infty$, deducem că ramura de curbă corespunzătoare va tăia cu necesitate axa X-*ilor* într'un număr impar de puncte şi în speţă în unul singur, care va trebui neapărat să corespundă lui $X=-m$.

Avem deci, în aceasta a doua ipoteză, o ramură de curbă nelimitată în ambele ei sensuri, care taie axa X-*ilor* într'un punct şi numai unul, precum şi simetrica ei faţă de numita axă, adică în fond, două ramuri de curbă care trec printr'un acelaş punct al axei X-*ilor*, distincte între ele şi care se întind fiecare la infinit în ambele lor sensuri.

Teorema enunţată este în modul acesta complet demonstrată şi în partea ei relativă la cubicele iperbolice-echilatere date de funcţia respectiv corespunzătoare din (21).

Cu pregătirea pe care ne-o dă acum această teoremă, este evident că, pentru desăvârşirea studiului nostru, adică a discuţiei privitoare la forma cubicelor reprezentative ale funcţiilor (21), va trebui să determinăm punctele remarcabile ale acestor cubice şi să cercetăm care este poziţia lor relativă, deoarece forma unei curbe depinde în primul rând chiar de aceste puncte şi de locul pe care-l ocupă ele pe curbă în raportul lor corelativ.

Am văzut însă cu ocazia teoremei precedente, că două din aceste puncte sunt cele de abscise

$$(25) \qquad \begin{cases} X=-1 \\ X=+1 \end{cases}$$

dintre care, primul reprezintă un punct de intersecţie a curbei cu axa X-*ilor*, celălalt fiind un punct de discontinuitate, deoarece, pentru prima din valorile de mai sus, funcţiile (21) se anulează, iar pentru cea de a doua, devin infinite.

Am văzut la fel că, funcţiile (21), care nu au alte discontinuităţi decât cea menţionată, se mai anulează însă pentru

$$(26) \qquad X=-m.$$

Astfel dară, alături de punctul fix al axei X-*ilor* de coordonate $(-1, 0)$, cubicele reprezentative ale funcţiilor (21) mai intersectează această axă în punctul variabil, de coordonate

$$(27) \qquad \begin{cases} X=-m \\ Y=0, \end{cases}$$

care, după cum reese foarte simplu din (20), făcând anume acolo $x=0$ şi $y=0$, se vede că este acum însuşi punctul dublu comun acestor cubice.

Ţinând atunci seama de poziţia acestui punct dublu, care din punct fix ce era şi el iniţial, a devenit variabil tocmai datorită transformării (20), urmează că o proximă apreciere a formei celor două curbe reprezentative ale funcţiilor (21), după cele stabilite prin teorema precedentă, va fi dată chiar de această poziţie a lui.

În adevăr, se observă mai întâi că, dacă m e cuprins în intervalul $(-1, +1)$, atunci $-m$ fiind în acelaş interval, punctul dublu în cauză este un punct dublu propriu zis, adică punct nodal efectiv pentru cubica circulară şi punct dublu izolat pentru cea iperbolică-echilateră, iar dacă m este exterior acestui interval, $-m$ fiind atunci de asemenea exterior lui, punctul dublu respectiv este invers, punct dublu izolat pentru cubica circulară şi punct nodal sau punct dublu propriu zis pentru cubica iperbolică-echilateră.

[6]) Punctul $X=-m$ poate fi tot în intervalul $(-\infty, -1)$ sau chiar în intervalul $(-1, +1)$, adică în domeniul de neexistenţă a funcţiei.

[7]) Considerăm *parte superioară*, aceea pentru care $Y>0$, iar *parte inferioară*, aceea pentru care $Y<0$.

Vom exprima încă mai simplu aceste lucruri spunând că, pentru valorile lui m cuprinse între -1 şi $+1$, cubica circulară corespunzătoare din (21) este o *cubică nodală*, iar cea iperbolică-echilateră, *o cubică anodală* şi că, din potrivă, pentru valorile lui m inferioare lui -1, sau superioare lui $+1$, cubica circulară este o *cubică anodală*, iar cea iperbolică-echilateră, o *cubică nodală*.

Mai mult, conexând constatările actuale cu cele din cuprinsul teoremei precedente, deducem uşor că, în cazul când cubica circulară este nodală, ea prezintă întotdeauna o buclă, ceeace vom exprima pe scurt spunând că este o *cubică buclată*, până când cea iperbolică are o astfel de buclă, numai dacă punctul dublu este în „stânga" paralelei la axa Y-*ilor* de ecuaţie

$$Z = -1,$$

deci dacă $m > 1$, pentru valorile lui $m < -1$, deci dacă punctul dublu este în dreapta paralelei la axa Y-*ilor* de ecuaţie

$$X = +1,$$

ea este o *cubică abuclată*, adică fără buclă.

Ţinând acum seama că, în caz de existenţă bucla oricăreia din cubicele noastre, este cuprinsă între dreptele paralele axei Y-*cilor* de ecuaţii

$$(28) \qquad \begin{cases} X = -m \\ X = -1, \end{cases}$$

deducem foarte simplu că, în cazul limită $m = 1$, această buclă dispare efectiv, ceeace denotă la rândul său că punctul dublu devine de întoarcere, lucru pe care-l vom exprima spunând că fiecare din cubicele respective devine de gen *cisoidal*.

Dacă însă m are cealaltă valoare limită, adică $m = -1$, atunci cubicele noastre sunt evident degenerate cum am văzut şi mai sus, aşa încât în acest caz nu ne mai ocupăm de ele.

În plus menţionăm totuşi, pentru importanţa cu deosebire specială, cazul particular al cubicelor zise *strofoide*, adică al celor corespunzătoare lui $m = 0$ şi pentru care cubica circulură e de altfel tot o cubică nodală şi deci buclată, iar cea iperbolică-echilateră, o cubiçă anodală, cazul acestor cubice caracterizându-se prin faptul că tangentele în punctul dublu corespunzător au coeficienţii unghiulari t_1, t_2, în relaţia involutivă,

$$(29) \qquad t_1 t_2 = \varepsilon,$$

lucru ce se poate uşor constata [8].

Adăogând în sfârşit la ansamblul tuturor rezultatelor din cuprinsul celor ce preced faptul că, în afară de asimptota paralelă axei Y-*cilor* de ecuaţie

$$(30) \qquad X = 1,$$

cubicele reprezentative ale funcţiilor (21) mai admit asimptotele oblice de ecuaţii

$$(31) \qquad Y = \pm\sqrt{\varepsilon}[X + (m+1)], \ (\varepsilon = \pm 1)^{9)}$$

cum rezultă foarte simplu, făcând în (9) $b = 0$ şi operând apoi substituţia (20), putem considera că, într'o primă aproximaţie, discuţia de până acum privitoare la forma acestor cubice este suficient de mulţumitoare, ceeace, totuşi nu însemnează că este şi completă.

Vom trece atunci, pentru complectarea acestei discuţii şi deci obţinerea unei imagini cât mai fidelă privitoare la forma cubicelor reprezentative ale funcţiilor (21), la considerarea celorlalte puncte remarcabile ale acestor curbe.

Or, este clar că, în afară de punctele considerate până acum, oricare din cubicele respective mai are drept puncte remarcabile, punctele de maxim şi de minim, punctele de inflexiune, punctele ei de intersecţie cu asimptotele şi punctul de intersecţie a celor două asimptote între ele.

În aceasta ordine de idei, avem deci în prealabil nevoie de primele două derivate ale funcţiilor (21), care se găseşte anume că sunt respectiv

$$(32) \qquad \begin{cases} Y' = \pm\left[\dfrac{X^2 - X - (m+1)}{(X-1)(X+1)}\right]\sqrt{\varepsilon\left(\dfrac{X+1}{X-1}\right)} \\ Y'' = \pm\left[\dfrac{(2m+1)X + (m+2)}{(X-1)^2(X+1)^2}\right]\sqrt{\varepsilon\left(\dfrac{X+1}{X-1}\right)} \end{cases}$$

---

[8]) Ecuaţia comună a tangentelor în punctul dublu al cubicei (1) este, conform celor stabilite în R.M.T., primul articol citat,

$$C(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2) - 2(Ax + By)(a_{12}x + a_{23}y) = 0,$$

ecuaţie care, pentru cazul particular al celor două strofoide, corespunzătoare lui $m=0$ din (21) se reduce la

$$Y^2 + \varepsilon X^2 = 0$$

şi din care apoi, relaţia (29) rezultă imediat.

[9]) Asimptotele de ecuaţii particulare (31), ca şi cele de ecuaţii generale (9) sunt evident reale, numai în cazul $\varepsilon = 1$, adică al cubicelor iperbolice, pentru cazul $\varepsilon = -1$, adică al cubicelor circulare, aceste asimptote fiind imaginare.

şi dintre care, cea dintâi se anulează în general, dacă

(33) $$X^2 - X - (m+2) = 0,$$

iar a doua, dacă

(34) $$(2m+1)X + (m+1) = 0.$$

Ecuaţia (33) ne dă astfel abscisele punctelor externe, de maxim şi de minim, al funcţiilor considerate, iar ecuaţia (34), abscisa comună a celor două puncte de infexiune.

In ceeace priveşte mai departe ecuaţia care dă abscisele punctelor de intersecţie ale curbelor respestive cu asimptotele, aceasta se găseşte a fi

(35) $$X = -\left(\frac{2m^2+2m+1}{2m+1}\right)$$

punctul de intersecţie a celor două asimptote între ele, de ordonată evident nulă, după cum rezultă din (31), având în sfârşit abscisa

(36) $$X = -(m+1).$$

(Va urma)

NOTE MATEMATICE

14. — *Asupra unor identităţi.* La pagina 47 vol. XXVI R. M. T. se publică 2 soluţii ale corespondenţilor la problema 2435, pe care am propus-o cu enunţul următor:

Să se rezolve ecuaţia

$$\sqrt{x+\sqrt{(2x+a-2)(2-a)}} + \sqrt{x-\sqrt{(2x+a-2)(2-a)}} = \sqrt{2}\,a$$

şi apoi să se verifice.

Prin ridicare la patrat şi reduceri au obţinut relaţia

(1) $$\sqrt{x^2-(2x+a-2)(2-a)} = a - x.$$

Partea de sub radical este patratul perfect $[x-(2-a)]^2$. S'a considerat numai $x-(2-a) = a-x$ şi a fiind astfel eliminat se deduce soluţia $x=1$. Pentru $x=1$ relaţia din enunţul problemei devine

(2) $$\sqrt{1+\sqrt{a(2-a)}} + \sqrt{1+\sqrt{a(2-a)}} = \sqrt{2a}.$$

Dacă notăm $a = 1+\sin\alpha$, mai obţinem

(2′) $$\sqrt{1+\cos\alpha} + \sqrt{1-\cos\alpha} = \sqrt{2(1+\sin\alpha)},$$ sau

(2″) $$\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1+\sin\alpha}.$$

Considerând radicalii cu semnul plus, pentru $1 \leq a \leq 2$, relaţia (2) conţine cantităţi reale şi avem verificări uşoare pentru $a = 1 + \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}$, n fiind un întreg pozitiv. Relaţiile (2′) şi (2″) sunt verificate când $0 \leq \alpha \leq \pi$.

Dacă acum considerăm $\sqrt{[x-(2-a)]^2} = -x+2-a$ obţinem $-x+2-a = a-x$, adică se elimină x când $a=1$, şi astfel rezultă

(3) $$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = \sqrt{2},$$

identitate care pentru $2x-1 \geq 0$ sau $x \geq \frac{1}{2}$ conţine cantităţi reale, condiţia $x - \sqrt{2x-1} \geq 0$, x fiind pozitiv, devine $x^2 \geq 2x-1$ sau $(x-1)^2 \geq 0$; însă valoarea maximă a lui x pentru a se menţine egalitatea dacă se consideră radicalii aritmetici adică afectaţi cu semnul plus, rezultă din ecuaţia $\sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = 0$ sau $x=1$ deci relaţia (3) este identitate verificată pentru $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

Notând $2x-1 = \operatorname{tg}^2\alpha$, pentru $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{4}\pi$, relaţia (3) devine $\frac{1+\operatorname{tg}\pi}{\sqrt{2}} + \frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, evidentă; iar pentru $\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, avem:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+1}{\sqrt{2}} + \frac{\operatorname{tg}\alpha-1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha$$

şi în loc de (3) obţinem următoarea nouă egalitate

(3′) $$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = \sqrt{2(2x-1)}$$

pentru $x \geq 1$. Pentru cazurile numerice x având valorile 5, 13, 25, 41, ... verificarea este imediată.

C. IONESCU-ŢIU

15. — *Asupra relaţiei lui Laguerre.* — Ne propunem să calculăm rapoartele în care dreptele care unesc vârful A al unui triunghiu ABC cu punctele circulare ale planului, împart latura BC.

Se ştie că punctele circulare se găsesc la interţia unui cerc oarecare cu dreapta dela infinit.

Vom considera cercul circumscris triunghiului de referinţă. Ecuaţia acestui cerc în coordonatele baricentrice fiind

$$a^2\beta\gamma + b^2\gamma\alpha + c^2\alpha\beta = 0$$

iar a dreptei dela infinit:

$$\alpha+\beta+\gamma=0. \tag{1}$$

Rezolvând sistemul avem:

$$\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^2 b^2+2cb\cos C\,\frac{\gamma}{\beta}+c^2=0$$

de unde

$$\frac{\gamma}{\beta}=\frac{-c(\cos C\pm i\sin C)}{b}$$

sau

$$\frac{\gamma}{\beta}=-\frac{c}{b}e^{\pm iC}.$$

Se ştie că cele două valori găsite pentru $\frac{\gamma}{\beta}$ reprezintă rapoartele în care dreptele AI şi AJ impart latura BC. Avem deci, notând cu I_a şi J_a intersecţiile acestor două drepte cu BC:

$$\frac{BI_a}{I_aC}=-\frac{c}{b}e^{iC}$$

$$\frac{BJ_a}{J_aC}=-\frac{c}{b}e^{-iC}. \tag{2}$$

1° Prin împărţirea acestor două relaţii avem:

$$\frac{BI_a}{I_aC}:\frac{BJ_a}{J_aC}=e^{2iC} \tag{3}$$

unde membrul întâi reprezintă raportul anarmonic, care se obţine intersectând dreapta BC cu fascicolul ale cărui raze sunt laturile unghiului C şi dreptele care unesc vârful unghiului C cu punctele circulare ale planului. Folosindu-ne de proprietatea fundamentală a raportului anarmonic, vedem imediat, că relaţia (3) se mai scrie şi astfel:

$$\hat{C}=\frac{1}{2i}\log(D_1,\ AI,\ D_1,\ AJ)$$

unde, am notat cu D_1 şi D_2 laturile unghiului. Am obţinut deci relaţia lui *Laguerre*.

2° Prin înmulţirea relaţiilor (2) deducem:

$$\frac{BI_a}{I_aC}\times\frac{BJ_a}{J_aC}=\frac{c^2}{b^2}.$$

Relaţia aceasta ne arată că punctele circulare ale planului sunt izogonale în raport cu triunghiul de referinţă. Ele sunt izogonale în raport cu toate triunghiurile ale planului, deoarece toate cercurile se întâlnesc în punctele circulare ale planului.

Mai putem arăta şi direct, că punctele sunt acelea ale dreptei dela infinit care sunt izogonale unul altuia.

Intr'adevăr condiţia ca punctele $M(\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1)$ şi $M_1\left(\frac{a^2}{\alpha_1},\ \frac{b^2}{\beta_1},\ \frac{c^2}{\gamma_1}\right)$ să se găsească pe dreapta dela infinit este dată de relaţiile

$$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=0$$

şi

$$\frac{a^2}{\alpha_1}+\frac{b^2}{\beta_1}+\frac{c^2}{\gamma_1}=0$$

adică am regăsit sistemul (1).

MARIA NEUMANN

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul LIV, No. 2, Octombrie 1948. Asupra determinantului *Vandermonde*, de *P. Boldescu*. Din proprietăţile patru punctului, de G-l *Gh. I. Popescu* Note matematice, probleme rezolvate şi propuse.

2. *Boletin Matematico*, Anul XXI, Mai şi lulie 1948, *Buenos Aires*. Ciurul lui Eratostene în lumina secolului al XX, de *Bernardo I. Baidaff*. *Eratostene de Cirene*, de *Bernardo I. Baideff*. Numere complecte bipozitive prime, de *Bernardo I. Baidaff*. Probleme propuse.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1060. — *Se consideră un patrulater convex* ABCD *ale cărui diagonale se tae în* E. *Prin punctul* E *se duce o dreaptă arbitrară care întâlneşte laturile* AB, CD *respectiv în* M şi N. *Dreptele:* NA, NB, MC, MD *întâlnesc diagonalele* AC, BD *în punctele: a, b, c, d. Să se demonstreze relaţiunea:*

$$\frac{Ea}{Ba}+\frac{Eb}{Ab}+\frac{Ec}{Dc}+\frac{Ed}{Cd}=1.$$

CEZAR COSNITA

Soluţie dată de D-nii *Ivănescu Cezar, Lăţea P. Const.* şi *Mihăileanu N. N.* În triunghiurile MCD, NAB, avem relaţiile cunoscute:

$$\frac{Ec}{Dc}+\frac{Ed}{Cd}+\frac{EN}{MN}=1$$

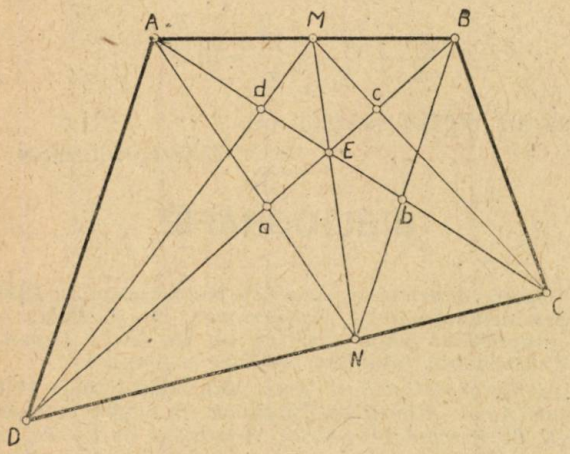
$$\frac{Ea}{Ba}+\frac{Eb}{Ab}+\frac{EM}{NM}=1.$$

(A se vedea, de exemplu R. M. T., vol. 10, pag. 54,

sau „Exercices de Géométrie“ par F. G. M, ed. 7-a pag. 75, teorema 165). Adunând aceste două relaţii şi observând că:

$$\frac{EN}{MN}+\frac{EM}{NM}=1,$$

avem relaţia dată.



Observare. D-nii *Ivănescu şi Mihăileanu* au pus în evidenţă că pe lângă relaţia din enunţ mai avem şi relaţia

$$\frac{BE}{Ba}+\frac{AE}{Ab}+\frac{DE}{Dc}+\frac{CE}{Cd}=3.$$

Deasemeni D-l *Mihăileanu* a arătat că dacă patrulaterul este concav, de exemplu vârful D este interior, avem relaţia

$$\frac{Ec}{Dc}-\frac{Ea}{Ba}-\frac{Eb}{Ab}-\frac{Ed}{Cd}=1.$$

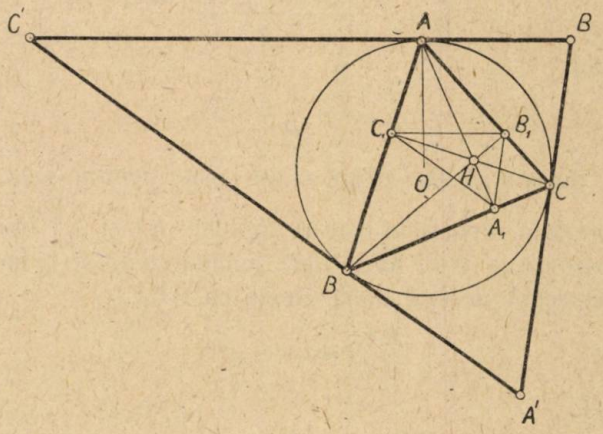
Gh. Th. Gh.

Problema 1116. — *Paralele duse prin vârfurile* A, B, C *ale unui triunghiu la laturile corespunzătoare triunghiului său ortic, formează triunghiul* A′ B′ C′. *Se cere: 1° Să se arate că triunghiurile* A B C *şi* A′ B′ C′ *sunt ortologice. 2° Să se arate că dreptele* A A′, B B′, C C′ *sunt concurente. 3° Să se exprime suprafaţa triunghiului* A′B′C′ *în funcţie de elementele triunghiului* A B C.

Cezar Ivanescu

Soluţia 1°. Se ştie că razele OA, OB, OC sunt perpendiculare respectiv laturilor triunghiului ortic, deci şi pe ale triunghiului A′ B′ C′. Cum aceste raze sunt concurente, însemnează că perpendicularele coborâte din vârfnrile triunghiului A B C pe laturile triunghiului A′ B′ C′ sunt concurente şi deci triunghiurile A B C, A′ B′ C′ sunt ortologice.

2° Din cele spuse la no. precedent, însemnează că triunghiul A′ B C este *triunghiul tangenţial* al lui A B C, adică este format din tangentele duse



în A, B, C la cercul circumscris triunghiului ABC. Deci dreptele A A′, B B′, C C′ sunt dreptele ce unesc vârfurile triunghiului A′ B′ C′ cu punctele de contact ale cercului său înscris cu laturile sale, drepte ce sunt concurente în punctul lui *Gergonne* al triunghiului (a se vedea: *Gh. Th Gheorghiu,* Curs de Geometrie, vol I, pag. 75).

3° Se cunoaşte că suprafaţa triunghiului tangenţial al unui triunghiu dat A B C are drept expresie $R^2 \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$ (a se vedea: *V. Cristescu,* Culegere de Probleme de Trigonometrie, ed II, partea II-a, Cap. X, pr. 17).

Au rezolvat problema D-nii; *Coandă I. Virgil, Cojocaru M M., Lăţea P. Const., Margulius Marius, Mihăileanu N. N., Pâslariu Vasile şi Vasiliu-Loeben Gh.*

Gh. Th Gh.

Problema 1126. — *Se consideră trei puncte colineare* A, B, C *şi un al patrulea punct* P *în planul lor, Fie* P_a, P_b, P_c, *punctele diametral opuse respectiv în cercurile* P B C, P C A, P A B. *Să se dovedească că punctele* P, P_a, P_b, P_c *sunt conciclice.*

Cezar Cosnita

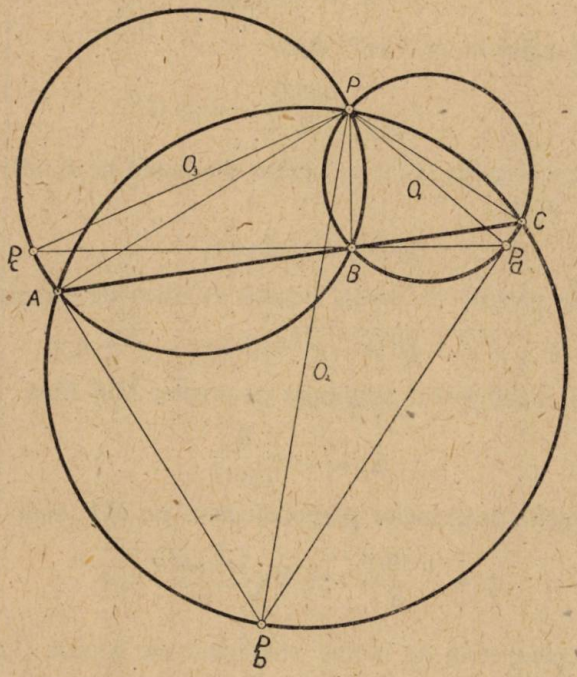
Soluţia I. Cum P P_a şi P P_c sunt diametre în cercurile P B C şi P B A, dreptele B P_a şi B P_c sunt ambele perpendiculare în B pe P B, adică punc-

tele P_a, B, P_c sunt colineare. Din patrulaterele înscriptibile formate pe figură rezultă succesiv

$$\sphericalangle P P_c A = \sphericalangle P B C = \sphericalangle P P_a C$$

adică patrulaterul $P P_a P_b P_c$ este inscriptibil.

Soluții asemănătoare date de D-ra: *Antoniu V. Emilia* și de D-nii: *Ivănescu Cezar, Lâțea P. Const, Mehedinți D., Mihăileanu N. N., Popa B. Ion, Panait C. Mazilu, Pâslariu V. Vasile, Săndulescu Ion, Süli Mihai, Țigănescu Th. și Vasiliu Gh.*



Soluția II dată de D-l *Mihăileanu N. N.* În triunghiul $P_a P_b P_c$, A este proiecția lui P pe $P_b P_c$, B este proiecția lui P pe $P_c P_a$ și C este proiecția lui P pe $P_a P_b$. Cum punctele A, B, C sunt colineare rezultă conform reciprocei teoremei lui *Simson* că punctul P este pe cercul circumscris triunghiului $P_a P_b P_c$.

Soluția III dată de D-l *Mihăileanu N. N.* Se consideră patrulaterul complect $P_b P_a B A P_c C$. Conform teoremei lui *Miquel* cercurile $A B P_c$, $B C P_a$, $C A P_a$ se vor tăia în punctul P prin care trece și cercul $P_a P_b P_c$.

Soluția IV dată de D-nii *Ivănescu Cezar și Mihăileanu N. N.* Proprietatea din enunț se stabilește pornind dela pr. 13, Cap. IV din *Culegerea de probleme de Geometrie* a lui *Țițeica* care are enunțul: *Se consideră trei puncte* A, B, C *în linie dreaptă și un punct* M. *Punctul* M *aparține cercului ce trece prin centrele cercurilor* BMC, CMA, AMB.

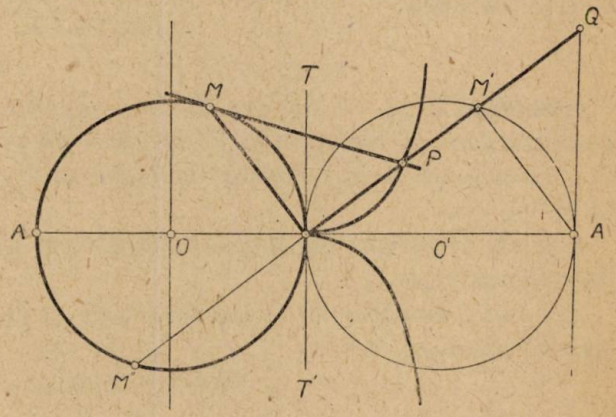
Conform acestei probleme, punctul P din problema noastră și centrele O_1, O_2, O_3 ale cercurilor P B C, P C A, P A B sunt conciclice. De aci rezultă că și punctele P, P_a, P_b, P_c sunt conciclice deoarece patrulaterele $P O_1 O_2 O_3$ și $P P_a P_b P_c$ sunt asemenea.

Gh. Th. Gh.

Problema 1878. — *Pe un cerc* O *se consideră un punct fix* A *și un punct variabil* M; *perpendiculara ridicată în punctul* A *pe dreapta* MA *taie tangenta cercului dusă în punctul* M *într'un alt punct* P. *Se cere locul geometric al punctului* P *când* M *descrie cercul* O. *Să se construiască curba corespunzătoare.*

VASILE VASU

Soluția geometrică. Pe lângă cercul dat, considerăm cercul O′ egal cu primul și tangent acestuia în punctul A. Fie A′ și A″ punctele unde linia centrelor O O′ taie cele două cercuri în afară de A. Dreapta A P taie cercul O′ în M′, cercul O în A″ iar tangenta în A′ la cercul O′ în Q, Dacă T T′ este tangenta în A, comună celor două cercuri, avem $\sphericalangle M' A T = \sphericalangle M'' A T''$ adică arc AM″ = arc AM′. Cum $\sphericalangle M A M'' = 90^0$, arc AM = arc A′M′. Aceasta însemnează că $\sphericalangle AMP = \sphericalangle M'A'Q$ și AM = A′M′ ca subîntinzând arce egale în cercuri egale. Deci



triunghiurile dreptunghice AMP, A′M′Q sunt egale, adică AP = M′Q. Punctul P poate fi deci definit în modul următor: în cercul O′ se duce prin A o secantă variabilă A Q pe care luăm AP = M′Q. Se știe că locul lui P va fi o cisoidă având punctul

de intoarcere în A şi drept asimptotă tangentă în A′ la cercul O′.

Soluţie analitică. Se iau drept axe diametrul OA axă Ox şi diametrul perpendicular drept axă Oy. Dacă a este raza cercului, avem $A(a, 0)$ şi $M(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$, α fiind un parametru variabil. Avem pentru tangenta în M ecuaţia

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - a = 0,$$

iar pentru dreapta AP:

$$y = -\frac{\cos\alpha - 1}{\sin\alpha}(x - a).$$

Locul lui P se găseşte eliminând pe α între aceste două ecuaţii. Rezolvându-le în raport cu $\sin\alpha$ şi $\cos\alpha$ găsim

$$\sin\alpha = \frac{(a-x)^2}{ay}, \quad \cos\alpha = \frac{2a - x}{a}$$

şi deci ecuaţia locului căutat va fi

$$\frac{(a-x)^4}{a^2y^2} + \frac{(2a-x)^2}{a^2} = 1$$

ecuaţia care rezolvată în raport cu y se scrie

$$y^2 = \frac{(x-a)^3}{3a-x}$$

şi care reprezintă cisoida indicată la soluţia geometrică. Construcţia acestei curbe este cunoscută.

Au rezolvat problema analitic D-nii: *Bakonyi C*, *Goga Fl.*, *Kinsky I.*, *Purcea M. I.*, *Radoslav G. I.*, *Rothenştein B.* şi *Wegener Eug.*

Gh. Th. Gh.

Problema 2158. — *Fie* Ox, Oy *doi diametri perpendiculari în cercul* O *şi* F *un punct fix pe* Ox. *O tangentă* T *la cercul* O, *întâlneşte pe* Oy *în* M. *Se cere:*

1. *Locul intersecţiei lui* MF *cu tangentele la* O *perpendiculare pe* T.

2. *Locul intersecţiei lui* T *cu tangentele la* O, *perpendiculare pe* MF.

G-L Gh. Buicliu

Soluţie. 1. Fie $F(a, 0)$ şi

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

ecuaţia cercului O iar

$$(1) \qquad x\cos\theta + y\sin\theta - R = 0$$

tangenta T într'un punct $P(R\cos\theta, R\sin\theta)$ de pe cerc. Coeficienţii unghiulari ai tangentelor perpendiculare pe T fiind

$$m = \operatorname{tg}\theta$$

urmează că tangentele perpendiculare pe T sunt

$$y = x\operatorname{tg}\theta \pm R\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\theta}$$

$$(1) \quad \therefore \qquad y = x\operatorname{tg}\theta \pm \frac{R}{\cos\theta}$$

Ecuaţia dreptei MF este

$$(2) \qquad \frac{x}{a} + \frac{\sin\theta}{R}y - 1 = 0.$$

Locul cerut la (1) se obţine eliminând pe θ între (2), (3) şi

$$(4) \qquad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1.$$

Se găseşte că curba loc este cuartica de ecuaţie

$$y\sqrt{a^2y^2 - R^2(a-x)^2} = R(ax - x^2 \pm ay)$$

2. Coeficientul unghiular al dreptei MF fiind

$$m_1 = -\frac{R}{a\sin\theta}$$

ecuaţiile tangentelor perpendiculare pe MP sunt

$$(5) \qquad y = \frac{a\sin\theta}{R}x \pm R\sqrt{\frac{a^2\sin^2\theta}{R^2} + 1}$$

Locul cerut se obţine eliminând pe θ între (1), (4) şi (5). După efectuarea calculelor se găseşte

$$\frac{x\sqrt{a^2(x^2-R^2) - [Rxy \pm R^2\sqrt{x^2+y^2-R^2}]}}{a(x^2-R^2)} +$$

$$+\theta\frac{Rxy \pm R^2\sqrt{x^2+y^2-R^2}}{a(x^2-R^2)} = R.$$

Această soluţie a fost dată de d-l *E. N. Wegener* (Bucureşti).

O bună soluţie analitică s'a primit de la d-l *Liviu Grozescu*, care a luat alt parametru.

S'au mai primit două soluţii inacceptabile, una a găsit locurile nişte drepte iar alta conice. Se vede din soluţia dată cât de departe sunt locurile geometrice cerute şi de drepte şi de conice.

G-l Gh B.

Problema 2189. — *Se dau în plan dreptele* Δ, Δ' *perpendiculare una pe alta, punctul fix* P *şi punctul* O, *mobil pe* Δ. *Cercul cu centrul în* O *şi cu raza* OP *taie pe* Δ' *în* A *şi* B.

Să se găsească locul intersecției cercului O cu dreptele care trec prin A *și* B *și au o direcție dată.*

G-L GH. BUICLIU

Soluție dată de D-l *Soare V. Mircea.*

Luăm pe Δ, Δ' ca axe de coordonate. Fie $P(a, b)$, $O(\lambda, O)$. Ecuația cercului $O(OP)$ este

$$(x-\lambda)^2+y^2=(a-\lambda)^2+b^2$$

$$\therefore \quad (1) \quad x^2+y^2+2\lambda x=a^2+b^2-2ax$$

Acest cerc taie pe Δ' în punctele

$$A[0, +\sqrt{a^2+b^2-2a\lambda}]; \quad B[0, -\sqrt{a^2+b^2-2a\lambda}];$$

Dreptele care trec prin A, B și au o direcție dată m au ecuațiile

$$(2) \qquad y \mp \sqrt{a^2 \pm b^2-2a\lambda} = mx$$

Locul cerut în enunț se află eliminând pe λ între ecuațiile (1) și (2). Se găsește ca rezultat dreapta Δ' de ecuație $x=0$ și parabola

$$m^2x^2+y^2-2mxy+a(1-m^2)x+2amy+a^2+b^2=0.$$

Când $m=0$ locul devine sistemul de drepte

$$y^2+ax+a^2+b^2=0.$$

D-nii *Marcel D. Cotariu* (Brăila) și *N. E. Wegener* (București) au găsit că locul este o cubică, fără să observe că ecuația cubicei are pe x în factor.

S'au mai primit 2 soluții. Una găsea ca loc o elipsă iar cealaltă un cerc.

Problema 2507. — *Să se arate că adevărata valoare a expresiei*

$$E=\frac{\sin 2nx\cos x}{\sin^3 x}-\frac{n[\cos 2nx+\cos x\cos(2n+1)x]}{\sin^2 x}$$

pentru $x\to 0$, *este* $\sum_{k=1}^{2n} k^2$.

C. IONESCU-TIU

Soluție dată de D-l *Teodorescu P. P.* (București) Folosind formulele de desvoltare ale sinusului și cosinusului multiplilor unui arc, obținem:

$$\sin 2nx\cos x=$$

$$2n\sin x\cos^{2n}x-\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1.2.3}\sin^3 x\cos^{2n-2}x$$

$$\frac{2n(2n-2)(2n-1)(2n-3)(2n-4)}{1.2.3.4.5}\sin^5 x\cos^{2n-4}x-\cdots,$$

$$\cos 2nx=\cos^{2n}x-\frac{2n(2n-1)}{1.2}\sin^2 x\cos^{2n-2}x+$$

$$\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{1.2.3.4}\sin^4 x\cos^{2n-4}x-\cdots$$

$$\cos x\cos(2n+1)x=\cos^{2n+2}x-\frac{(2n+1)2n}{1.2}\cos^{2n}x\sin^2 x+$$

$$\frac{(2n+1)2n(2n-1)(2n-2)}{1.2.3.4}\cos^{2n-2}x\sin^4 x-\cdots$$

Ținând seama că

$$\frac{2n\cos^{2n}x\sin x}{\sin^3 x}+\frac{n(\cos^{2n}x+\cos^{2n+2}x)}{\sin^2 x}=$$

$$\frac{n\cos^{2n}x(1-\cos^2 x)}{\sin^2 x}=n\cos^{2n}x,$$

avem:

$$E=n\cos^{2n}x-\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1.2.3}\cos^{2n-2}x+$$

$$\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)}{1.2.3.4.5}\cos^{2n-4}x\sin^2 x$$

$$-\cdots+x\left[\frac{2n(2n-1)}{1.2}\cos^{2n-2}x-\right.$$

$$\left.\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{1.2.3.4}\sin^2 x\cos^{2n-4}x+\cdots\right]$$

$$+n\left[\frac{(2n+1).2n}{1.2}\cos^{2n}x-\right.$$

$$\left.\frac{(2n+2)2n(2n-2)(2n-2)}{1.2.3.4}\sin^2 x\cos^{2n-2}x+\cdots\right];$$

Deci

$$\lim_{x\to 0} E=n-\frac{2n(2n-1)(2n-x)}{1.2.3}+\frac{2n^2(2n-1)}{1.2}$$

$$+\frac{n.(2n+1).2n}{1.2}=$$

$$\frac{1}{6}n[6-(8n^2-12n+4)+(12n^2-6n)+(12n^2+6n)]=$$

$$\frac{1}{6}n[16n^2+12n+2]=\frac{1}{6}\cdot 2n(2n+1)(4n+1)=\sum_{k=1}^{2n}k^2.$$

Problema 2518 — *Se cere locul geometric al vârfului* A *al triunghiului* ABC, *care are baza* BC *fixă și pentru care proiecția laturei* AB *pe* BC *este egală cu proiecția laturei* BC *pe* AC.

G-L GH. BUICLIU

Soluția. Fie A', B' respectiv proiecția lui A pe BC și a lui B pe AC. Conform enunțului

$$\overline{BA'} = \overline{CB'} \quad \therefore \quad C\cos B = a\cos C$$

şi de oarece nu se poate avea în acelaş timp

$$\cos B < 0 \quad \text{şi} \quad \cos C < 0$$

rezultă că unghiurile B şi C sunt ascuţite.

Luăm originea de coordonate în B şi ca axe pe BC şi perpendiculara în B pe BC. Coordonatele x, y ale lui A vor fi

$$(1) \quad x = BB' = CA' = a\cos C$$
$$y = AA' = A'C\,\mathrm{tg}\,C = (BC - BA')\,\mathrm{tg}\,C = a(1-\cos C)\,\mathrm{tg}\,C$$

$$\therefore \quad (2) \quad y = a(1-\cos C)\frac{\sqrt{1-\cos C}}{\cos C}.$$

Eliminând pe $\cos C$ între (1) şi (2) se găseşte că locul lui A este curba de ecuaţie

$$(3) \qquad y = \frac{(a-x)\sqrt{a^2-x^2}}{x}.$$

D-l *P. P. Teodorescu* (Lic, „Matei Bàsarab", Bucureşti) a dat soluţia precedentă, dar a greşit la construcţia curbei (3). Construcţia acestei curbe prezentând un anume interes o vom da ca problemă propusă

Celelalte soluţii primite sunt eomplet greşite

G-l Gh. B.

Problema 2545. — *Să se arate că*

$$\left[1+2\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\cos kx\right]\left[1+2\sum_{k=1}^{2n}\cos kx\right] = 1+2\sum_{k=1}^{2n}\cos 2kx = \frac{\sin(4n+1)x}{\sin x}.$$

C. IONESCU-TIU

Soluţia. Dacă punem

$$S = \sum_{i=0}^{n-1}\alpha^i\cos(a+ih),$$

atunci avem

$$(1-2\alpha\cos h+\alpha^2)S = \cos a - \alpha\cos(a-h) - \alpha^n\cos(a+nh) + \alpha^{n+1}\cos[a+(n-1)h].$$

(a se vedea de ex. *Culegere de probleme de Trigonometrie*, de *V. Cristescu*, vol. I, cap. XXIV, pr. 5).

Pornind dela această formulă generală putem calcula fiecare sumă din enunţ în parte. Făcând înlocuirile necesare, avem succesiv pentru prima sumă,

$$2(1+\cos x)\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\cos kx = \cos x + 1 - \cos(2n+1)x - \cos 2nx$$

$$\therefore \quad 1+2\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\cos kx = \frac{\cos(2n+1)x+\cos 2nx}{1+\cos x} = \frac{2\cos\frac{1}{2}(4n+1)x\cos\frac{1}{2}x}{2\cos^2\frac{1}{2}x} = \frac{\cos\frac{1}{2}(2n+1)x}{\cos\frac{1}{2}x}.$$

Pentru a doua sumă avem

$$2(1-\cos x)\sum_{k=1}^{2n}\cos kx = \cos x - 1 - \cos(2n+1)x + \cos 2nx$$

$$\therefore \quad 1+2\sum_{k=1}^{2n}\cos kx = \frac{\cos 2nx - \cos(2n+1)x}{1-\cos x} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(4n+1)x\sin\frac{1}{2}x}{2\sin^2\frac{1}{2}x} = \frac{\sin\frac{1}{2}(4n+1)x}{\sin\frac{1}{2}x}$$

iar pentru a treia sumă numai este nevoie să facem calculul din nou, deoarece se deduce din precedenta înlocuind pe x prin $2x$. Cu alte cuvinte avem

$$1+2\sum_{k=1}^{2n}\cos 2kx = \frac{\sin(4n+1)x}{\sin x}.$$

Problema s'a redus astfel la a demonstra identitatea

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(4n+1)x}{\cos\frac{1}{2}x}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(4n+1)x}{\sin\frac{1}{2}x} = \frac{\sin(4n+1)x}{\sin x}$$

identitate banală în baza formulei care exprimă sinusul arcului dublu în funcţie de arcul pe jumătate.

Au rezolvat problema D-nii *Breazu M.* (Deva), *De Sabata I.* (Beiuş), *Novac I. I.* (P. T.), *Păunescu Şt. Gh.* (Bucureşti), *Stănilă D. George* (Bucureşti) şi *Teodorescu P.P.* (Bucureşti).

Gh. Th. Gh.

Problema 2560. — *Să se verifice relaţia*

$$\sum\frac{r_a^3(r_b+r_c)}{(r_a-r_b)(r_a-r_c)} = p^2,$$

notaţiile fiind cele obişnuite într'un triunghiu oarecare.

L-T COL. ST. IACOB

Soluția I dată de D-nii *Bălăuță M.* și *Breazu M.* (elevi cl. VIII, lic Decebal, Deva) Făcând calculele în prima parte, avem, făcând grupări convenabile

$$\sum \frac{r_a^3(r_b+r_c)}{(r_a-r_b)(r_a-r_c)} = \frac{\sum r_a^3(r_c^2-r_b^2)}{(r_a-r_b)(r_b-r_c)(r_c-r_a)}$$

$$= \frac{r_c^2(r_a^3-r_b^3)-r_a^2r_b^2(r_a-r_b)-r_c^3(r_a^2-r_b^2)}{(r_a-r_b)(r_b-r_c)(r_c-r_a)}$$

$$= \frac{r_ar_c^2(r_b-r_c)-r_a^2(r_b^2-r_c^2)+r_br_c^2(r_b-r_c)}{(r_b-r_c)(r_c-r_a)}$$

$$= \frac{r_ar_c(r_c-r_a)+r_b(r_c^2-r_a)^2}{r_c-r_b} = \sum r_ar_b = p^2$$

în baza uuei formule cunoscute.

Soluția II dată de D-l *Dodu A. Eug* (cl VIII, lic. Mihai Viteazul, București). Inlocuind pe r_a cu $p\operatorname{tg}\frac{1}{2}A$, etc, relația de demonstrat devine

$$\sum \frac{\operatorname{tg}^3\frac{1}{2}A\,(\operatorname{tg}\frac{1}{2}B+\operatorname{tg}\frac{1}{2}C)}{(\operatorname{tg}\frac{1}{2}A-\operatorname{tg}\frac{1}{2}B)(\operatorname{tg}\frac{1}{2}A-\operatorname{tg}\frac{1}{2}C)} = 1,$$

sau, aducând la același numitor,

$$\sum \operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}A\,(\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}C-\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}B) =$$
$$(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A-\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B)(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B-\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C)(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C-\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A)$$

sau încă

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}A & \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}B & \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}C \\ \operatorname{tg}^3\frac{1}{2}A & \operatorname{tg}^3\frac{1}{2}B & \operatorname{tg}^3\frac{1}{2}C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}A & \operatorname{tg}\frac{1}{2}B & \operatorname{tg}\frac{1}{2}C \\ \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}A & \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}B & \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}C \end{vmatrix}.$$

și ținând seama de valoarea cunoscută a determinantului din prima parte, această egalitate se reduce la a demonstra relația

$$V\sum \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B = V,$$

unde V este determinantul *Vandermonde* din partea dreaptă a relației precedente. Cum $V \neq 0$, relația precedentă se reduce la

$$\sum \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B = 1,$$

relație cunoscută între unghiurile unui triunghiu oarecare.

Soluția III. Înlocuind în prima parte pe $r_a = \frac{S}{p-a}$, etc. și pe $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$, relația din enunț se transformă în identitatea algebrică

$$p\sum \frac{a(p-b)(p-c)}{(a-b)(a-c)} = p^2$$

a cărei verificare ne fiind decât chestiune de calcule algebrice, o lăsăm deoparte.

Au rezolvat problema pe această cale D-nii : *Banciu Gh.* (Beiuș), *Bota I. Val.* (P. T.), *Coțiu A* (Cluj), *De Sabata I.* (Beiuș), *Deutsch Em* (P. T.), *Gherlan I. V.* (P.T.), *Munteanu G.* (Brașov), *Neguț A. I.* (Tg.-Jiu), *Novac I. I.* (P. T.), *Popa P.* (Oradea), *Roibu T.* (Beiuș), *Roman I. C.* (Timișoara), *Székely G.* (P. T.) și *Turbuțiu Gh.* (P. T.).

Gh. Th. Gh.

Problema 2597. — *Să se rezulve ecuația*

$$(x+a+3b-2c)^4+(x-a+b-4c)^4 = 16(a+b+c)^4.$$

GH. SILAS

Soluție dată de D-l *Purcea M. I.* (Caracal). Facem substituțiile

$$x+2b = 2c = y \quad \text{și} \quad a+b+c = \alpha.$$

Ecuația devine

$$(y+\alpha)^4+(y-\alpha)^4 = 16\alpha^4,$$

sau, după ce se fac dezvoltările din prima parte,

$$y^4+6\alpha^2y^2-7\alpha^4 = 0$$
$$\therefore \quad (y^2-\alpha^2)(y^2+7\alpha^2) = 0$$

de unde avem soluțiile

$$y = \pm\alpha, \quad y = \pm\alpha\sqrt{-7}.$$

Ținând seama de notațiile făcute, avem mai departe

$$x_1 = a-b+4c,$$
$$x_2 = -a-3b+2c,$$
$$x_{3,4} = 3c-2b\pm(a+b+c)\sqrt{-7}.$$

Au mai rezolvat problema și D-nii *Bălăuță M.* (Deva), *Breazu M.* (Deva), *Deutsch Em.* (P. T.), *Neguț A. I.* (Tg.-Jiu) și *Roman I. C.* (Timișoara).

Gh. Th. Gh.

Problema 2627. — *Să se rezolve ecuația*

$$x^4-22x^2-48x-23 = 0$$

și să i se exprime apoi rădăcinile sub forma cea mai simplă.

EUGEN VISA

Soluție dată de D-l *Bălăuță M.* (Deva). Ecuația se poate pune sub forma unei diferențe de două patrate

$$(3x^2+8x+3)^2-8(x^2+3x+2)^2=0$$

care se descompune în ecuațiile

$$3x^2+8x+3+2\sqrt{2}(x^2+3x+2)=0$$
$$3x^2+8x+3-2\sqrt{2}(x^2+3x+2)=0$$

sau

a) $(3+2\sqrt{2})x^2+2(4+3\sqrt{2})x+3+4\sqrt{2}=0$

b) $(3-2\sqrt{2})x^2+2(4-3\sqrt{2})x+3-4\sqrt{2}=0$

Ecuația a) are drept rădăcini

$$x=\frac{-(4+3\sqrt{2})\pm\sqrt{9+6\sqrt{2}}}{3+2\sqrt{2}}$$

sau, transformând radicalul dublu în radicale simple, avem

$$x=\frac{-(4+3\sqrt{2})\pm(\sqrt{3}+\sqrt{6})}{3+2\sqrt{2}}.$$

In mod analog ecuația b) ne dă:

$$x=\frac{(4-3\sqrt{2})\pm(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{3-2\sqrt{2}}.$$

Făcând numitorii raționali, avem mai departe

a) $x=-\sqrt{2}\pm(\sqrt{6}-\sqrt{3})$

b) $x=\sqrt{2}\pm(\sqrt{6}+\sqrt{3})$

adică rădăcinile ecuației sunt:

$$x_1=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6},\quad x_2=-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6},$$
$$x_3=\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6},\quad x_4=-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}.$$

Au rezolvat problema D-nii: *Breazu M.* (Deva), *De Sabata I.* (Beiuș), *Deutsch Em.* (P. T.), *Petcul Al. Val.* (București), *Radu Cor.* (Tg.-Mureș) și *Soare V. M.* (București).

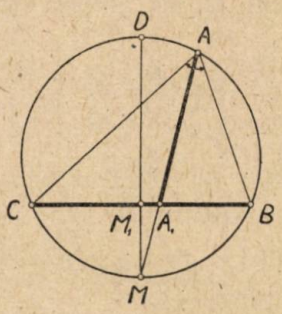
Gh. Th. Gh.

Problema 2629. — *Să se construiască un triunghiu* A B C, *cunoscând latura* B C *unghiul* A *și lungimea bisectoarei acestui unghiu.*

GH. DUMITRESCU

Soluție dată de D-ra Prof. *Neumann Maria.* Latura BC și unghiul A fiind date, cercul circumscris triunghiului ABC, se construiește imediat.

Fie M și A_1 respectiv mijlocul arcului B C și intersecția bisectoarei AM cu latura BC. Prin ipoteză: $AA_1=K$ de unde rezultă, că vârful A se află la intersecția cercului circumscris al triunghiului, cu concoida dreptei B C în raport cu polul M.



În general, intersecția unui cerc cu o concoidă nu poate fi obținută cu rigla și compasul, de ex., în cazul trisecțiunei unui unghiu dat

În cazul nostru particular segmentul A M poate fi construit cu rigla și compasul.

Fie M_1 mijlocul laturii BC și D punctul diametral opus punctului M.

Din asemănarea triunghiulurilor AMD și A_1M_1M deducem că:

$$A\,M\,.\,A_1\,M=M\,D\,.\,M_1\,M$$

dar

$$A\,M-A_1\,M=K$$

unde segmentele M D și M_1 M se cunosc. Rezultă că segmentele A M și A_1 M pot fi construite cu rigla și compasul, deoarece cunoaștem produsul și diferența lor (a se vedea de ex: *Gh. Th. Gheorghiu*, Curs de Geometrie, vol. I, pag. 76).

Condiția de posibilitate se deduce comparând câtimea dată K cu segmentul DM_1.

Alte soluții date de D-nii *De Sabata I.* (Beiuș), *Pucea M. I.* (Caracal) și *Radu C.* (Tg.-Mureș).

Gh. Th Gh.

Problema 2630 — *Tangentele în* M *și* N *la o parabolă se taie în* A. *O tangentă variabilă taie dreptele* A M, A N *în* B, *respectiv în* D. *Să se arate că al patrulea vârf al paralelogramului* A B C D *descrie dreapta* M N.

P. TEODORESCU

Soluție analitică. Luând parabola raportată la axă și tangenta la vârf, ecuația ei va fi $y^2=2px$. Aceasta înseamnează că coordonatele punctelor M, N și P, punctul de tangență al tangentei variabile, vor fi de forma

$$M\left(\frac{a^2}{2p},a\right),\ N\left(\frac{b^2}{2p},b\right),\ P\left(\frac{a^2}{2p},a\right).$$

Rezultă ecuațiile tangentelor

$$A\,M\equiv 2px-2ay+a^2=0,$$
$$A\,N\equiv 2px-2by+b^2=0,$$
$$B\,D\equiv 2px-2ay+a^2=0,$$

care intersectate între ele dau

$$B\left(\frac{a\alpha}{2p}, \frac{a+\alpha}{2}\right), \quad D\left(\frac{b\alpha}{2p}, \frac{b+\alpha}{2}\right).$$

De aci rezultă că laturile BC şi CD ale paralelogramului au drept ecuaţii

$$BC \equiv 2px - 2by + ab + \alpha(b-a) = 0,$$
$$CD \equiv 2px - 2ay + ab + \alpha(a-b) = 0.$$

Locul geometric al vârfului C, definit de aceste ecuaţii, se va găsi eliminând între ele pe α, lucru ce se face uşor. Rezultatul eliminării este

$$2px - (a+b)y + ab = 0.$$

Această ecuaţie este o dreaptă şi reprezintă locul geometric al vârfului C. Se arată uşor că această ecuaţie este verificată de coordonatele punctelor M şi N, adică este dreapta MN.

Soluţii date de D-nii: *Bogoevici I. N.* (Caransebeş), *Breazu M.* (Deva), *Deutsch Em.* (P T.), *Popovici P. C* (Bucureşti), *Purcea M. I.* (Caracal) şi *Radu S. Cor.* (Tg-Mureş).

Soluţia geometrică dată de autorul problemei. Este evident că punctele B şi D descriu pe AM şi AN diviziuni omografice. Dreapta dela infinit e tangentă la parabolă, deci punctele B_∞, D_∞ se corespund în omografie. Aşa că B şi D descriu diviziuni asemenea pe AM, respectiv AN. Dacă $B(x_0, 0)$, $D(0, y_0)$ atunci faţă de axele oblice AB, AD Vom avea o relaţie de forma:

$$(1) \qquad ax_0 + by_0 + c = 0$$

Apoi, C are coordonatele $x = x_0$, $y = y_0$. Deci

$$(1) \qquad ax + by + c = 0$$

e locul lui C.

Observăm că pentru $B \equiv M$ avem $D \equiv A$ şi pentru: $B \equiv A$ avem $D \equiv N$.

Traducând analitic şi făcând în (1) succesiv $x_0 = 0$ $y_0 \equiv 0$, obţinem:

$$\overline{AN} = -\frac{c}{b}; \quad \overline{AM} = -\frac{c}{a}.$$

Deci ecuaţia dreptei se poate scrie

$$\frac{x}{\overline{AM}} + \frac{y}{\overline{AN}} - 1 =$$

ceea ce ne arată că C descrie dreapta MN, polara lui A faţă de parabolă.

Altă soluţie geometrică. Considerăm parabole ca o conică înscrisă în patrulaterul format de tangentele în M, N şi P (punctul de contact al tangentei variabile) şi de dreapta dela infinit. Notăm cu R_∞ şi S_∞ punctele unde tangentele în M şi N taie această din urmă dreaptă. Considerând tangentele în M şi N de două ori, acest patrulater apare ca un exagon circumscris parabolei şi având vârfurile $BMR_\infty S_\infty ND$. Teorema lui *Brianchon* spune atunci că dreptele BS_∞, DR_∞ şi MN sunt concurente. Această proprietate exprimă tocmai proprietatea din enunţul problemei, deoarece dreptele AB, DR_∞ pe deoparte, şi AC, BS_∞ pe de alta, având câte un punct la infinit sunt paralele.

Această a doua soluţie geometrică este mai interesantă decât prima deoarece arată origina problemei.

Gh. Th. Gh.

Problema 2636. — *Dacă a, b, c sunt trei numere întregi, atunci numărul*

$$N = (10b + c) + 2(10c + b) + 4(10 \cdot a + b)$$

este totdeauna un multiplu de 7.

D. Pompeiu

Generalizare, dată de D l *Petcu Al Val.* (bacalaureat, Bucureşti) Fie numărul întreg

$$N = (10a_1 + a_2) + 2(10a_2 + a_3) +$$
$$2^2(10a_3 + a_4) + \cdots + 2^{3n-}.(10a_3 n + a_1)$$

I-mi propui să arăt că $N = m\,7$. Numărul N se poate pune sub forma

$$N = \alpha_1 . a_1 + \alpha_2 . a_2 + \cdots + \alpha_{3n} . a_{3n},$$

întregii $\alpha_k (k = 2, 3, \ldots, 3n)$ fiind de forma

$$\alpha_k = 2^{k-2} + 10 \cdot 2^{k-1} = 21 \cdot 2^{k-2} = m\,7.$$

Deci toţi termenii $\alpha_k a_k$, pentru $k > 1$, sunt divizibili prin 7. Ne rămâne să arătăm că şi α_1 este multiplu de 7. Avem:

$$\alpha_1 = 10 + 2^{3n-1} = 10 + \underbrace{2^3 \ldots 2^3}_{n-1} . 2^2 =$$
$$10 + \underbrace{8 \ldots 8}_{n-1} . 4 = 10 + \underbrace{(7+1)\ldots(7+1)}_{n-1} . 4 =$$
$$10 + m\,7 + 4 = m\,7,$$

adică $N = m\,7$.

In cazul particular $n=1$, $a_1=b$, $a_2=c$, $a_3=a$ avem problema din enunț.

Au rezolvat problema D-nii: *Bâlă V. C.* (P. T.), *Bălăuță M.* (Deva), *Breazu M.* (Deva), *Coțiu Aurel* (Cluj), *Deutsch Em.* (P. T.) *De Sabata I.* (Beiuș), *Gertler N. R.* (Bucnrești), *Purcea M. I.* (Caracal), *Radu Cor.* Tg-Mureș), *Soare V. M.* (București) și *Tibăr A.* (Constanța).

S'a mai primit o soluție pe care numele autorului este scris neciteț.

PROBLEME PROPUSE

2675. — Să se găsească patratele de patru cifre $abcd$, știind că suma $ab+c+d$ este un patrat perfect.

VALERIU PETCU

2676*. — Cu ocazia revizuirei pensiilor, un pensionar și-a declarat astfel pensia:

Este un număr de cinci cifre. A zecea parte din acest număr e un patrat perfect. Inversul acestui număr este tot un patrat perfect și multiplu al celui dintâi.

G-L GH. COATU

2677. — Să se arate că dacă avem

$$a=x\sqrt{(1+y^2)(1+z^2)},\quad b=y\sqrt{(1+z^2)(1+x^2)},$$
$$c=z\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)},$$

unde $x+y+z=xyz$, avem relația

$$16a^2b^2c^2(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)=$$
$$(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2).$$

C. IONESCU-TIU

2678. — Să se rezolve sistemul de ecuații

$$x+y=x^4+x^2y^2+y^4=a$$

și să se determine valorile rădăcinelor cu trei zecimale exacte.

G-L GH. BUICLIU

2679. — Să se arate că sistemul

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ \Sigma xy=0 \end{cases}$$

nu poate fi satisfăcut de numere reale.

Să se generalizeze.

V. ALACI

2680. — Se consideră un trapez dreptunghiu ABCD (unghiurile drepte fiind în A și B). Pe latura AB se ia un punct M și prin M se duce o paralelă cu bazele, care taie pe CD în N. Să se arate că suprafața triunghiului MCD este jumătate din produsul $\overline{AB}\cdot\overline{MN}$.

GH. TH. GHEORGHIU

2681. — Se consideră în patrulaterul inscriptibil ABCD cercul care trece prin A și este tangent laturii BC în B, precum și cercul care trece prin A și e tangent laturii CD în D.

Să se arate că cele două cercuri se taie sub un unghiu egal cu C.

VASILE VASU

2682* — Într'un exagon plan ABCDEF, se consideră perechile de triunghiuri, având ca baze două laturi opuse ale exagonului, iar ca vârfuri punctele de întâlnire ale diagonalelor patrulaterelor formate cu celelalte patru vârfuri.

Dreptele care unesc centrele de greutate ale acestor perechi de triunghiuri sunt concurente.

M. GHERMANESCU

2683. — Să se arate că

$$\sin\tfrac{1}{3}(A+C)\sin\tfrac{1}{3}(B-C)=\cos\tfrac{1}{3}A\cos\tfrac{1}{3}B-\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{3}C,$$

unde $A+B+C=180^\circ$.

MARIA NEUMANN.

2684. — Să sa arate că într'un triunghiu ABC avem relațiile

$$\sum\frac{r_a}{sp\frac{1}{2}A}=4R+r+3p$$

$$\sum\frac{r_a}{cp\frac{1}{2}B}=\sum\frac{r_a}{cp\frac{1}{2}C}=4R+\gamma+p,$$

notațiile fiind cele obișnuite.

EMERIC DEUTSCH

ERATĂ.

1° Expresia din problema 2665 este:

$$22.5^{12n+2}+77.2^{6n}.5^{8n+1}+2^{20n+2}.5^{4n+1}+7.2^{26n+1}.$$

2°, In problema 2671, în rândul al 2-lea în loc de „maximă" trebuie scris „maximă sau minimă".

3°. În problema 2673*, în prima relație trebuie $\alpha-\beta$ în loc de $\alpha-\gamma$; iar în ultima relație, în primul membru trebuie m^1 în loc de m^2

4°. În enunțul problemei 2674, pag. 123, penultimul rând trebue g în loc de p.

INFORMAŢII

1. Nu se publică în revistă decât manuscrise dela abonaţi.

2. Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol, trebuesc scrise citeţ (în special iscălitura) numai pe o parte a hârtiei. Probleme propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor, iar cele rezolvate, de enunţ. Nu sunt luate în considerare probleme rezolvate iscălite de mai mulţi corespondenţi. Problemele rezolvate vor fi redactate îndependent una de alta, şi nu în continuare.

3. Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

4. Numele colaboratorilor dela cari s'au primit soluţii la problemele publicate în acest număr şi care au sosit la redacţie după data de 15 a lunei precedente, nu mai pot fi trecute în corpul revistei Numele lor este însă menţionat pe copertă împreună cu numărul problemei rezolvate.

5. Rugăm pe corespondenţii noştrii la orice schimbare de adresă sau lipsă din localitate fără a avea pe cineva să le primească revista, să ne anunţe din vreme. În caz contrar revista ne vine înapoi şi cu regret anunţăm că a două oară nu o mai putem expedia. Mai mult, se suspendă expedierea numerelor următoare până ce abonatul va reclama aceste numere.

6. Aducem la cunoştinţa corespondenţii nostrii care ne trimit *probleme propuse* că ele trebue să fie cât mai *originale*, în sensul de a nu a fi asemănătoare cu cele publicate în ultimul timp.

7. *Păunescu Gh.* (Bucureşti). Ne-aţi trimes 390 lei fără a ne scrie cu ce scop.

Manuscrise primite de la corespondenții noștrii până la 1 a lunei curente și anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) și probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Bală V. C. (2631, 2632, 2633, 2635, 2636, 2639, 2654); *Bălăuța M.* (2221, 2317, 2325, 2330, 2333, 2623, 2634, 2657, 2659, 2663, 2664, 2666, 2667, 2668); *Bogoevici Nicolae* (2560, 2597); *Breazu Mihai* (2603, 2623, 2642, 2643, 2645, 2646, 2651, 2653, 2654, 2655, 2656, 2657, 2659, 2660, 2663, 2664); *Gh. Coatu* (P; 2645); *Con-stantinescu Gh.* (1747, 2233, 2234, 2558, 2560, 2605, 2611, 2622, 2633, 2640, 2655, 2658); *Constantinessu Ilie* (P.); *Deleanu Aristide* (2653); *Deutsch Emeric* (P; 2621, 2673); *Dodu Eugen* (P; 2562, 2567, 2592, 2597, 2600, 2601, 2606, 2609, 2612, 2636, 2637, 2639, 2645, 2646, 2648. 2657, 2658, 2659, 2660, 2664). *Drăghici Iosif* (2426, 2646, 2658, 2664); *Filipescu Aurel* (2603, 2621); *Lungu Ioan* (P; 2602, 2632, 2636, 2653, 2660, 2663. 2666); *Manoilă Dan* (2650); *Neacșu M.* (N, P, 2667, 2669); *Niculescu Gh.* (A); *Popa Pavel* (2623, 2626, 2634, 2642, 2660); *Păunescu Gh.* (P; 1405, 2056, 2224, 2261, 2555, 2532, 2560, 2609, 2617, 2659, 2636, 2664); *Petcu Valeriu* (P; 2552, 2588, 2657, 2667); *Pisanca Ionel* (2623, 2635, 2636, 2655); *Purcea Ion* (2621, 2639, 2653, 2654, 2657, 2658, 2659, 2660, 2663, 2664); *Radu Corneliu* (2648, 2650, 2651, 2653, 2654); *Soare Mircea* (P; 2649); *Teodorescu Petre* (N; P; 2541, 2663, 2669; *Turbuțiu Ioan* (2612, 2632); *Vasu Vasile* (P).

ANUL XXVIII DECEMVRIE 1948 No. 10.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA
PREȚUL ABONAMENTULUI ESTE 300 LEI ANUAL PENTRU PARTICULARI
ȘI 600 LEI PENTRU INSTITUȚII
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRĂINĂTATE ESTE DE 600 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **E. VISA:** ASUPRA CUBICELOR CIRCULARE SI IPERBOLICE-ECHILATERE UNICURSALE DREPTE (URMARE).
2. NOTE MATEMATICE 17, 18
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 635, 1134, 2110, 2121, 2135, 2421, 2426, 2483, 2611, 2622, 2632, 2637.
5. PROBLEME PROPUSE: 2685-2694.
6. INFORMATII.

Tip. „Gh. Hălmăgeanu", Timișoara
Inreg la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebue să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă"

G. ŢIŢEICA

Anunţăm cu plăcere revenirea D-lui *N Ghircoiaşiu* printre membrii „Comitetului de Conducere" al revistei noastre.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara, conţinând articole, note, probleme propuse şi rezolvate, vor fi trimise pe adresa: Prof. V. Alaci, Politehnica, Timişoara.

Administraţia revistei aduce la cunoştinţa generală următoarele:

1. Abonamentul pe anul XXVIII (15 Martie 1948 — 15 Februarie 1949) este 300 lei pentru particulari şi 600 pentru instituţii.

2. Taxa de membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este de 200 lei.

3. Volumele I, XXIII, XXV, XXVI şi XXVII sunt epuizate. Celelalte volume broşate se găsesc de vânzare cu preţul de 300 lei fiecare. La această sumă se va adăoga 50 lei costul expediţiei. In caz că se comandă mai multe volume se va adăoga la taxa de 26 lei pentru recomandat, câte 20 lei pentru fiecare volum.

4. Se găsesc de vânzare numere izolate din colecţie chiar din volumele epuizate. Preţul unui număr este de 30 lei la care se adaogă 2 lei expediţia. Din vol. XXVII se găsesc de vânzare no. 1, 4—12.

5. Se primesc reclamaţii că se pierde revista prin poştă. Aceste reclamaţii sunt adunate în ordinea sosirii lor şi vor fi satisfăcute la 15 Februarie 1949 când se vor vedea ce numere rămân descomplectate după legarea volumelor întregi. Orice reclamaţie de pierderea unui număr nu este luată în seamă decât la o lună dela data apariţiei acelui număr.

6. Tot ce priveşte administraţia se va adresa D-lui Prof. **Gh. Th. Gheorghiu** str. Voltaire Nr. 1, Timişoara I. Reclamaţiile ce necesită răspuns vor fi însoţite de o carte poştală timbrată legal.

7. Orice sumă destinată revistei se poate trimite prin CEC sub contul n-rul 85208 sau prin mandat postal D-lui Prof. **Gh. Th. Gheorghiu** pe adresa de mai sus.

ANUL XXVIII — No 10 TIMISOARA, 1948 DECEMBRIE 15

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

Prețul abonamentului este 300 lei pentru particulari și 600 lei pentru instituții.

Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica Timișoara.

ADMINISTRAȚIA: Prof. GH. TH GHEORGHIU
Timișoara I, Str. Voltaire, No. 1.

ASUPRA CUBICELOR CIRCULARE ȘI IPERBOLICE-ECHILATERE UNICURSALE DREPTE

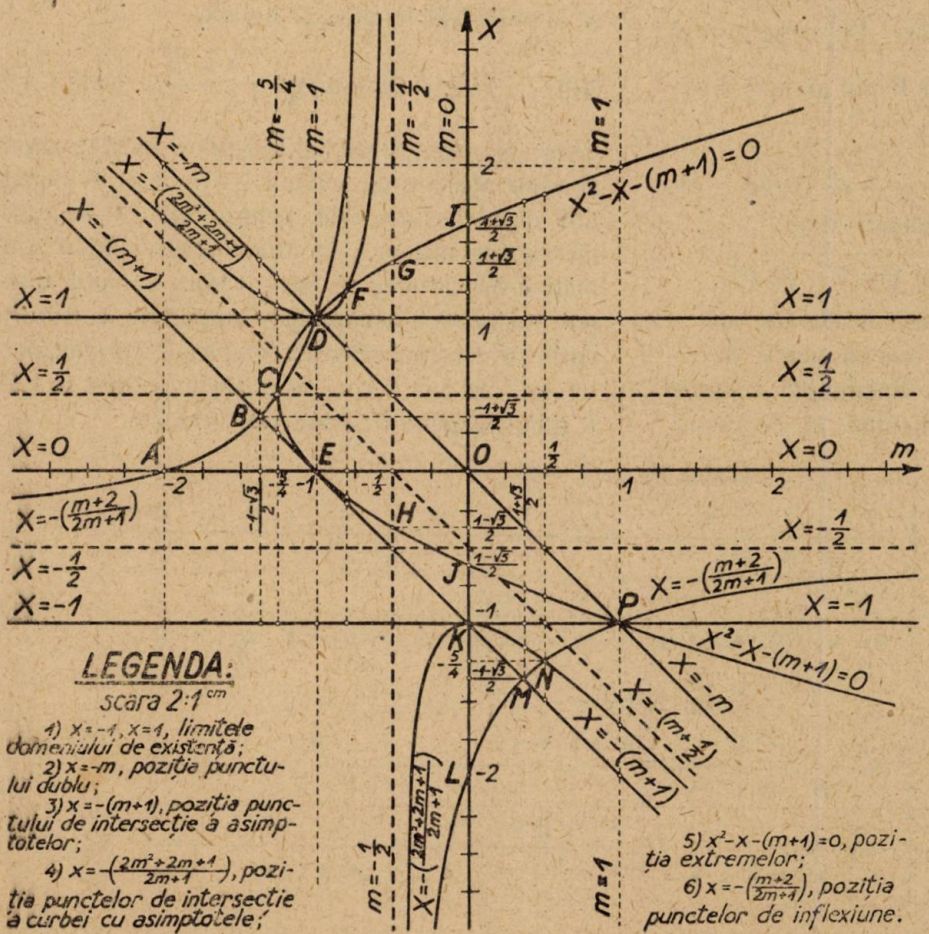
DE

EUGEN VIȘA

(Urmare)

Pentru a obține acum o imagine de ansamblu intuitivă asupra poziției relative a tuturor acestor puncte, inclusiv cele de care ne-am ocupat mai nainte, pentru orice valoare a lui m, adică pentru a vedea dintr'o simplă privire, care este ordinea lor de succesiune corespunzătoare diverselor valori ale parametrului m, vom utiliza o metodă grafică, îndreptățită și indicată chiar pentru motivul că abscisa oricăruia dintre punctele remarcabile ale cubicelor (21), afară evident de cele fixe, este funcție de valoarea parametrului m, cum arată formulele care dau respectiv expresiile acestor abscise.

Vom considera deci un sistem auxiliar de axe rectangulare, (mOX) și vom reprezenta grafic, în raport cu aceste axe, fiecare din funcțiile de mai sus, adică (26), (33), (34), (35), (36), precum și dreptele de ecuații $X = -1$ și $X = +1$.



LEGENDA:
scara 2:1 cm

1) $X=-1$, $X=1$, limitele domeniului de existență;
2) $x=-m$, poziția punctului dublu;
3) $x=-(m+1)$, poziția punctului de intersecție a asimptotelor;
4) $x=-\left(\frac{2m^2+2m+1}{2m+1}\right)$, poziția punctelor de intersecție a curbei cu asimptotele;
5) $x^2-x-(m+1)=0$, poziția extremelor;
6) $x=-\left(\frac{m+2}{2m+1}\right)$, poziția punctelor de inflexiune.

În modul acesta se vede clar care este ordinea de succesiune a punctelor remarcabile ale cubicelor (21), pentru fiecare valoare a parametrului m.

În adevăr, să considerăm o valoare dată, m_0, a lui. Dreapta paralelă axei X-ilor de ecuație

$$m = m_0,$$

va tăia atunci în general fiecare din curbele auxiliare din acest grafic în puncte ale căror ordonate sunt tocmai abscisele punctelor remarcabile ale cubicelor (21), așa încât, pentru valoarea respectivă a parametrului m, ordinea lor de succesiune va fi tocmai

ordinea în care se succed ordonatele acestor puncte din graficul auxiliar.

Mai mult, ansamblul punctelor în care se intersectează toate aceste curbe din graficul auxiliar între ele şi în speţă, abscisele lor, ne arată cum trebue fracţionat intervalul dela $-\infty$ la $+\infty$ al variaţiei parametrului m, aşa încât pentru fiecare fracţiune în parte, cubicele corespunzătoare să aibă caracteristici comune şi deci forme asemănătoare.

Acest grafic, asupra execuţiei căruia ne dispensăm a mai da lămuriri de detaliu, pentru a nu mări, odată mai mult, întinderea prezentei expuneri, arată anume că, pentru o discuţie amănunţită, este necesar a fracţiona intervalul variaţiei lui m în 11 intervale parţiale, care sunt anume:

$$(-\infty, -2)\left[-2, \tfrac{1}{2}(-1-\sqrt{3})\right], \left[\tfrac{1}{2}(-1-\sqrt{3}), -\tfrac{5}{4}\right],$$
$$\left(-\tfrac{5}{4}, -1\right), (-1, \alpha), \left(\alpha, -\tfrac{1}{2}\right), \left(-\tfrac{1}{2}, 0\right),$$
$$\left[0, \tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{3})\right] \left[\tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{3}), \tfrac{1}{2}\right] \left(\tfrac{1}{2}, 1\right) (1, +\infty)$$

unde α este abscisa punctului F din graficul auxiliar, de valoare,

$$(37)\quad \alpha = \tfrac{1}{6}\left(\sqrt[3]{-17+3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{-17-3\sqrt{33}} - 2\right),$$

valoarea ordonatei corespunzătoare fiind,

$$(38)\quad \beta = \tfrac{1}{6}\left[\sqrt[3]{619+\sqrt{33}} + \sqrt[3]{619-\sqrt{33}}\right]^{10)}.$$

Urmează deci că, luând în considerare, alături de intervalele de mai sus şi cele 10 puncte de diviziune, discuţia completă şi amănunţită a formei cubicelor (21) va comporta în total 21 de cazuri.

Notând atunci, pentru o cubică oarecare din (21),

1°. abscisa punctului dublu, prin d,

2°. abscisa punctului de intersecţie a asimptotelor, prin a,

3°. abscisa comună a punctelor de intersecţie ale cubicei iperbolice cu cele două asimptote corespunzătoare, prin c,

4°. abscisa comună a primilor doi extremi, prin e_1,

5°. abscisa comună a celorlalţi doi extremi prin e_2,

6°. abscisa comună a celor două puncte de inflexiune prin i, adică, punând respectiv,

$$(39)\quad \begin{cases} d = -m,\ a = -(m+1),\ c = -\left(\dfrac{2m^2+2m+1}{2m+1}\right) \\ e_1 = \tfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{4m+5}\right),\ e_2 = \tfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{4m+5}\right), \\ i = -\left(\dfrac{m+2}{2m+1}\right) \end{cases}$$

şi introducând în plus şi notaţia,

$$(40)\quad f(X) = (X+m)\sqrt{\varepsilon\left(\frac{X+1}{X-1}\right)}, \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

deducem uşor că, studiul funcţiilor din (21), anume al celor afectate de semnul $+$ în faţă, e susceptibil de a fi concretizat, pentru cele 21 de cazuri menţionate mai sus, în următoarele tablouri rezumative de variaţie, în baza cărora şi după trasarea prealabilă a asimptotelor respective, construcţia curbelor corespunzătoare, completate cu simetricele lor faţă de axa X ilor, se poate face apoi fără nici o greutate pentru fiecare caz în parte.

Cazul 1, ($m < -2$).

X	$-\infty$		-1		-1		i		0		1		1		a		c		d		$+\infty$
Y″		+				+	0	−		−				−		−		−		−	
Y′	1	+	$+\infty$		$-\infty$	−		−		−	$-\infty$		$+\infty$	+		+		+		+	!
Y	$-\infty$	↗	0		0	↘	$f(i)$	→	m	↘	$-\infty$		$-\infty$	↗	$f(a)$	↗	$f(c)$	↗	0	↗	$+\infty$

Cazul 2, ($m = -2$).

X	$-\infty$		-1		-1		$i=0$		$(a)=1$		$1=a$		c		d		$+\infty$
Y″		+				+	0	−				−		−		−	
Y′	1	+	$+\infty$		$-\infty$	−		−		$-\infty$	$+\infty$	+		+		+	1
Y	$-\infty$	↗	0		0	↘	-2	↘		$-\infty$	$-\infty$	↗	$f(c)$	↗	0	↗	$+\infty$

10) α este rădăcina iraţională negativă a ecuaţiei, $4m^3+4m^2+2m+1=0$, având cu aproximaţie de patru zecimale, valoarea: $\alpha = -0{,}7719$, iar β este rădăcina iraţională pozitivă a ecuaţiei $2X^3-2X-1=0$, a cărei valoare, cu aceeaşi aproximaţie de patru zecimale, este: $\beta = 1{,}1914$.

Cazul 3, $\left[(-2 < m < \frac{1}{2}(-1-\sqrt{3})\right]$

X	$-\infty$		-1	-1		0	i	(a)		1	1		c		d		$+\infty$
Y''		$+$			$+$		$+$	0	$-$			$-$		$-$		$-$	
Y'	1	$+$	$+\infty$	$-\infty$	$-$		$-$		$-$	$-\infty$	$+\infty$	$+$		$+$		$+$	
Y	$-\infty$	$\nearrow$	0	0	$\searrow$	m	$\searrow$	$f(i)$	$\searrow$	$[f(a)]$	$\searrow$	$-\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(c)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Cazul 4, $\left[m = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{3})\right]$.

X	$-\infty$		-1	-1		0	$i=(a)$		1	1		c		d		$+\infty$
Y''		$+$			$+$		$+$	0	$-$			$-$		$-$		
Y'	1	$+$	$+\infty$	$-\infty$	$-$		$-$		$-$	$-\infty$	$+\infty$	$+$		$+$		$+$	1
Y	$-\infty$	$\nearrow$	0	0	$\searrow$	m	$\searrow$	$f(i)$	$\searrow$	$-\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(c)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Cazul 5, $\left[\frac{1}{2}(-1-\sqrt{3}) < m < -\frac{5}{4}\right]$.

X	$-\infty$		-1	-1		0	(a)		i	1	1		c		d		$+\infty$
Y''		$+$			$+$		$+$		$+$	0	$-$			$-$		$-$	
Y'	1	$+$	$+\infty$	$-\infty$	$-$		$-$		$-$		$-\infty$	$+\infty$	$+$		$+$		$+$	1
Y	$-\infty$	$\nearrow$	0	0	$\searrow$	m	$\searrow$	$[f(a)]$	$\searrow$	$f(i)$	$\searrow$	$-\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(c)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Cazul 6, $\left(m = -\frac{5}{4}\right)$.

X	$-\infty$		-1	-1		0	(a)		$i=e_1=e_2$	1	1		c		d		$+\infty$
Y''		$+$			$+$		$+$		0	$-$		$-$		$-$		$-$	
Y'	1	$+$	$+\infty$	$-\infty$	$-$		$-$		0	$-$	$-\infty$	$+\infty$	$+$		$+$		$+$	1
Y	$-\infty$	$\nearrow$	0	0	$\searrow$	m	$\searrow$	$[f(a)]$	$\searrow$	$f(i)=f(e_1)=f(e_2)$	$\searrow$	$-\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(c)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Cazul 7, $\left(-\frac{5}{4} < m < -1\right)$.

X	$-\infty$		-1	-1		0	(a)		e_1		i		e_2	1	1		c		d		$+\infty$
Y''		$+$			$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	$-$		$-$		$-$		$-$	
Y'	1	$+$	$+\infty$	$-\infty$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	$-\infty$	$+\infty$	$+$		$+$	1
Y	$-\infty$	$\nearrow$	0	0	$\searrow$	m	$\searrow$	$[f(a)]$	$\searrow$	$f(e_1)$	$\nearrow$	$f(i)$	$\nearrow$	$f(e_2)$	$\searrow$	$-\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(c)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Cazul 8, $(m = -1)$.

Tabloul de variație devine în acest caz iluzoriu, deoarece cubica circulară corespunzătoare degenerează în cercul,

$$X^2 + Y^2 - 1 = 0$$

și dreapta

$$X + 1 = 0,$$

iar cubica iperbolică degenerează în iperbola echilateră,

$$X^2 - Y^2 - 1 = 0$$

și aceeași dreaptă

$$X + 1 = 0.$$

De altfel în acest caz avem,

$$\begin{cases} a = e_1 = 0 \\ i = e_2 = c = d = 1, \end{cases}$$

precum se poate vedea și pe graficul auxiliar.

Cazul 9, $(-1 < m < \alpha)$

X	$-\infty$		-1	-1		(a)		e_1		0		d		1	1		c		e_2		i		$+\infty$
Y''		$+$			$+$		$+$		$+$		$+$		$+$			$+$		$+$		$+$	0	$-$	
Y'	1	$+$	$+\infty$	$-\infty$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	$+\infty$	$-\infty$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	$+\infty$
Y	$-\infty$	$\nearrow$	0	0	$\searrow$	$[f(a)]$	$\searrow$	$f(e_1)$	$\nearrow$	m	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$f(c)$	$\searrow$	$f(e_2)$	$\nearrow$	$f(i)$	$\nearrow$	$+\infty$

Cazul 10, $(m = \alpha)$.

X	$-\infty$		-1	-1		(a)		e_1		0		d		1	1		$c=e_2$		i		$+\infty$
Y''		$+$			$+$		$+$		$+$		$+$		$+$			$+$		$+$	0	$-$	
Y'	1	$+$	$+\infty$	$-\infty$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	$+\infty$	$-\infty$	$-$	0	$+$		$+$	1
Y	$-\infty$	$\nearrow$	0	0	$\searrow$	$[f(a)]$	$\searrow$	$f(e_1)$	$\nearrow$	m	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$f(c)=f(e_2)$	$\nearrow$	$f(i)$	$\nearrow$	$+\infty$

Cazul 11, $\left(\alpha < m < -\frac{1}{2}\right)$.

X	$-\infty$		-1	-1		(a)		e_1		0		d		1	1		e_2		c		i		$+\infty$
Y''		$+$			$+$		$+$		$+$		$+$		$+$			$+$		$+$		$+$	0	$-$	
Y'	1	$+$	$+\infty$	∞	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	$+\infty$	$-\infty$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	1
Y	$-\infty$	$\nearrow$	0	0	$\searrow$	$[f(a)]$	$\searrow$	$f(e_1)$	$\nearrow$	m	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$f(e_2)$	$\nearrow$	$f(c)$	$\nearrow$	$f(i)$	$\nearrow$	$+\infty$

Cazul 12, $\left(m = -\frac{1}{2}\right)$.

X	$-\infty=i=c$		-1	-1		(a)		e_1		0		d		1	1		e_2		$c=i=\infty$
Y''	0	$+$			$+$		$+$		$+$		$+$		$+$			$+$		$+$	0	
Y'	1	$+$	$+\infty$	$-\infty$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	$+\infty$	$-\infty$	$-$	0	$+$	1	
Y	$-\infty$	$\nearrow$	0	0	$\searrow$	$[f(a)]$	$\searrow$	$f(e_1)$	$\nearrow$	m	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$f(e_2)$	$\nearrow$	$+\infty$	

Cubica iperbolică-echilateră corespunzătoare acestui caz este remarcabilă prin faptul că punctele ei dela infinit situate în direcțiile asimptotelor oblice sunt puncte de inflexiune

Cazul 13, $\left(-\frac{1}{2} < m < 0\right)$.

X	$-\infty$		i		c		-1	-1		(a)		e_1		0		d		1	1		e_2		$+\infty$
Y''		$-$	0	$+$		$+$			$+$		$+$		$+$		$+$		$+$			$+$		$+$	
Y'	1	$+$		$+$		$+$	$+\infty$	$-\infty$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	$+\infty$	$-\infty$	$-$	0	$+$	1
Y	$-\infty$	$\nearrow$	$f(i)$	$\nearrow$	$f(c)$	$\nearrow$	0	0	$\searrow$	$[f(a)]$	$\searrow$	$f(e_1)$	$\nearrow$	m	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$f(e_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Cazul 14, $(m = 0)$.

(Strofoide)

X	$-\infty$		$i=-2$		$c=a=-1$	$-1=c=(a)$		$e_1=\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$		$0=d$		1	1		$e_2=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$		$+\infty$
Y''		$-$	0	$+$			$+$		$+$		$+$			$+$		$+$	
Y'	1	$+$		$+$	$+\infty$	$-\infty$	$-$	0	$+$		$+$	$+\infty$	$-\infty$	$-$	0	$+$	1
Y	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-2)=-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\nearrow$	0	0	$\searrow$	$f\left[\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right]$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$f\left[\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right]$	$\nearrow$	$+\infty$

Cazul 15, $\left[0 < m < \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3})\right]$.

X	$-\infty$		i		a		c		-1	-1		e_1		d		0		1	1		e_2		$+\infty$
Y''		$-$	0	$+$		$+$		$+$			$+$		$+$		$+$		$+$			$+$		$+$	
Y'	1	$+$		$+$		$+$		$+$	$+\infty$	$-\infty$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	$+\infty$		$-$	0	$+$	1
Y	$-\infty$	↗	$f(i)$	↗	$f(a)$	↗	$f(c)$	↗	0	0	↘	$f(e_1)$	↗	0	↗	m	↗	$+\infty$	$+\infty$	↘	$f(e_2)$	↗	$+\infty$

Cazul 16, $\left[m = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3})\right]$.

X	$-\infty$		$i=a$		c		-1	-1		e_1		d		0		1	1		e_2		$+\infty$
Y''		$-$	0	$+$		$+$			$+$		$+$		$+$		$+$			$+$		$+$	
Y'	1	$+$		$+$		$+$	$+\infty$	$-\infty$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	$+\infty$		$-$	0	$+$	1
Y	$-\infty$	↗	$f(i)=f(a)$	↗	$f(c)$	↗	0	0	↘	$f(e_1)$	↗	0	↗	m	↗	$+\infty$	$+\infty$	↘	$f(e_2)$	↗	$+\infty$

Cazul 17, $\left[\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}) < m < \frac{1}{2}\right]$.

X	$-\infty$		a		i		c		-1	-1		e_1		d		0		1	1		e_2		$+\infty$
Y''		$-$		$-$	0	$+$		$+$			$+$		$+$		$+$		$+$			$+$		$+$	
Y'	1	$+$		$+$		$+$		$+$	$+\infty$	$-\infty$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	$+\infty$	$-\infty$	$-$	0	$+$	1
Y	$-\infty$	↗	$f(a)$	↗	$f(i)$	↗	$f(c)$	↗	0	0	↘	$f(e_1)$	↗	0	↗	m	↗	$+\infty$	$+\infty$	↘	$f(e_2)$	↗	$+\infty$

Cazul 18, $\left(m = \frac{1}{2}\right)$.

X	$-\infty$		a		$i=c$		-1	-1		e_1		d		0		1	1		e_2		$+\infty$
Y''		$-$		$-$	0	$+$			$+$		$+$		$+$		$+$			$+$		$+$	
Y'	1	$+$		$+$		$+$	$+\infty$	$+\infty$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	$+\infty$		$-$	0	$+$	1
Y	$-\infty$	↗	$f(a)$	↗	$f(i)=f(c)$	↗	0	0	↘	$f(e_1)$	↗	0	↗	m	↗	$+\infty$	$+\infty$	↘	$f(e_2)$	↗	$+\infty$

Cubica circulară corespunzătoare acestui caz este trisectoarea lui *Mac-Laurin*.

Cazul 19, $\left(\frac{1}{2} < m < 1\right)$.

X	$-\infty$		a		c		i		-1	-1		e_1		d		0		1	1		e_2		$+\infty$
Y''		$-$		$-$		$-$	0	$+$			$+$		$+$		$+$		$+$			$+$		$+$	
Y'	1	$+$		$+$		$+$		$+$	$+\infty$	$-\infty$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	$+\infty$	$-\infty$	$-$	0	$+$	1
Y	$-\infty$	↗	$f(a)$	↗	$f(c)$	↗	$f(i)$	↗	0	0	↘	$f(e_1)$	↗	0	↗	m	↗	$+\infty$	$+\infty$	↘	$f(e_2)$	↗	$+\infty$

Cazul 20, $(m = 1)$.

(Cisoide)

X	$-\infty$		$a=-2$		$c=-\frac{5}{3}$	$i=e_1=d=-1$	$-1=i=e_1=d$		0	1	1	$e_2=2$	$+\infty$
Y''		$-$		$-$	$-$	0	0	$+$	$+$		$+$	$+$	
Y'	1	$+$		$+$	$+$	0	0	$+$	$+$	$+\infty$	$-\infty$	0	$+$	1
Y	$-\infty$	↗	$f(-2)=-\sqrt{3}$	↗	$f(c)=-\frac{1}{3}$	↓ 0	0	↗	1	↗ $+\infty$	$+\infty$	↘ $f(2)=3\sqrt{3}$	↗ $+\infty$

Cazul 21, ($m > 1$).

X	$-\infty$		a		c		d		e_1		-1	-1		i		0		1	1		e_2		$+\infty$
Y''			$-$		$-$		$-$		$-$		$-$			$-$	0	$+$		$+$			$+$		$+$
Y'	1	$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	$-\infty$	$+\infty$	$+$		$+$		$+$	$+\infty$	$-\infty$	$-$	0	$+$	1
Y	$-\infty$	$\nearrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$f(c)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f(e_1)$	$\searrow$	0	0	$\nearrow$	$f(i)$	$\nearrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$f(e_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Odată acum, în prezența tablourilor de mai sus, în care, evident, mai rămâne să înlocuim, pentru fiecare caz concret în parte, expresiile literale pe care le cuprind, abscise și ordonate, prin valorile corespunzătoare, care se calculează în funcție de m cu ajutorul formulelor (39) și (40), se înțelege că, studiul din cuprinsul acestui articol privitor la diversele forme ale cubicelor circulare și iperbolice — echilatere unicursale drepte este astfel încheiat deoarece, așa cum am spus și ceva mai 'nainte, în baza acestor tablouri și după trasarea asimptotelor corespunzătoare, construcția cubicelor respective se poate face pentru fiecare valoare a parametrului m fără nici o greutate.

NOTE MATEMATICE

17. — *Identități algebrice.* — Pentru corespondenții revistei cred că este instructiv să arăt una din metodele de a obține identități interesante.

Considerăm expresia

$$E=m(a+b+c)^3+n\Sigma(-a+b+c)^3+p\Pi(-a+b+c);$$

evident că E este de gradul trei, omogenă și simetrică, deci de forma

$$E=\alpha\Sigma a^3+\beta\Sigma a^2b+\gamma abc;$$

α, β, γ depind de m, n, p. Îi determinăm, ținând seamă că identitatea trebue să fie verificată pentru orice sistem de valori numerice atribuite literelor a, b, c. Astfel. fie: 1) $a=1$, $b=c=0$; 2) $a=b=1$, $c=0$; 3) $a=b=c=1$. Obținem pentru fiecare caz, respectiv

$$m+n-p=\alpha,\quad 8m+8n=2\alpha+2\beta,$$
$$27m+3n+p=3\alpha+6\beta+\gamma$$

de unde

$$\alpha=m+n-p,\quad \beta=3m+3n-p,\quad \gamma=6m-18n-2p$$

sau, rezolvând invers

$$m=\frac{3\alpha+5\beta+\gamma}{24},\quad n=\frac{3\alpha+\beta-\gamma}{24},\quad p=\frac{\beta-3\alpha}{4}$$

Ne propunem să determinăm pe m, n, p astfel ca rezultatul desvoltării expresiei E să fie cât mai simplu.

Dacă pretindem ca

$$\alpha=\beta=0 \text{ avem } m=\frac{\gamma}{24},\ n=-\frac{\gamma}{24},\ p=0 \text{ deci}$$

(1) $$(a+b+c)^3-\Sigma(-a+b+c)^3=24abc.$$

Relație clasică. Pentru $\alpha=\gamma=0$ avem

(2) $$5(a+b+c)^3+\Sigma(-a+b+c)^3+6\Pi(-a+b+c)=24\Sigma a^2b$$

iar pentru $\beta=\gamma=0$

(3) $$(a+b+c)^3+\Sigma(-a+b+c)^3-6\Pi(-a+b+c)=8\Sigma a^3.$$

In mod asemănător, plecând dela expresia

$$E=m(a+b+c)^2+n\Sigma(-a+b+c)^2+p\Sigma(a+b)(a+c)+q\Sigma(a-b+c)(a+b-c)$$

vom avea un rezultat de forma

$$E=\alpha\Sigma a^2+\beta\Sigma ab.$$

Inlocuind: 1) $a=1$, $b=c=0$; 2) $a=b=1$, $c=0$ obținem succesiv

$$m+3n+p-q=\alpha,\quad 4m+4n+5p=2\alpha+\beta$$

de unde $\beta=2m-2n+3p+2q$. Pentru diferite valori particulare atribuite coeficienților, obținem identitățile;

(4) $$(a+b+c)^2+\Sigma(-a+b+c)^2=4\Sigma a^2$$
(5) $$3(a+b+c)^2-\Sigma(-a+b+c)^2=8\Sigma ab$$
(6) $$3(a+b+c)^2-2\Sigma(a+b)(a+c)=\Sigma a^2$$
(7) $$-(a+b+c)^2+\Sigma(a+b)(a+c)=\Sigma ab$$
(8) $$(a+b+c)^2-\Sigma(a-b+c)(a+b-c)=2\Sigma a^2$$
(9) $$(a+b+c)^2+\Sigma(a-b+c)(a+b-c)=4\Sigma ab$$
(10) $$3\Sigma(-a+b+c)^2+2\Sigma(a+b)(a+c)=11\Sigma a^2$$
(11) $$-\Sigma(-a+b+c)^2+3\Sigma(a+b)(a+c)=11\Sigma ab$$
(12) $$\Sigma(-a+b+c)^2+\Sigma(a-b+c)(a+b-c)=2\Sigma a^2$$

(13) $\Sigma(-a+b+c)^2+3\Sigma(a-b+c)(a+b-c)=4\Sigma ab$

(14) $2\Sigma(a+b)(a+c)-\Sigma(a-b+c)(a+b-c)=5\Sigma a^2$

(15) $\Sigma(a+b)(a+c)+\Sigma(a-b+c)(a+b-c)=5\Sigma ab$

(16) $5(a+b+c)^2-4\Sigma(a+b)(a+c)+\Sigma(a-b+c)(a+b-c)=0$

(17) $5\Sigma(-a+b+c)^2-4\Sigma(a+b)(a+c)+$
$11\Sigma(a-b+c)(a+b-c)=0$

(18) $-(a+b+c)^2+\Sigma(-a+b+c)^2+2\Sigma(a-b+c)(a+b-c)=0$

(19) $-11(a+b+c)^2+\Sigma(-a+b+c)^2+8\Sigma(a+b)(a+c)=0.$

N. N. MIHAILEANU

18. — *Funcţii trigonometrice inverse circulare şi patratice care au aceiaşi derivată.*

Vom invedera în această notă cum se pot construi funcţii trigonometrice inverse circulare şi patratice care să aibă aceiaşi derivată,

Problema 1. *Se dau funcţiile*

$$(1)\qquad \begin{cases} y=\operatorname{arc\,sp} Y \\ z=\operatorname{arc\,tg} Z \end{cases} \qquad \left(0\leqslant y\leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

unde Y *şi* Z *depind de variabila* x. *Cunoscând pe* Y, *să se determine* Z *astfel ca funcţiile* (1) *să aibă aceiaşi derivată.*

Soluţie. Derivatele funcţiilor (1) trebuind să fie egale, rezultă

$$z=y+C.$$

Luând tangenta în ambii membrii, avem

$$(2)\qquad \operatorname{tg} z=\frac{\operatorname{tg} y+A}{1-A\operatorname{tg} y} \qquad (\operatorname{tg} C=A)$$

Din (1) deducem:

$$\operatorname{sp} y=Y \quad \text{sau} \quad \frac{\operatorname{tg} y}{1+\operatorname{tg} y}=Y$$

de unde

$$(3)\qquad \operatorname{tg} y=\frac{Y}{1-Y}.$$

Introducem valoarea lui tg Y din (3) în relaţia (2) şi avem:

$$\operatorname{tg} z=Z=\frac{\dfrac{Y}{1-Y}+A}{1-A\dfrac{Y}{1-Y}}=\frac{Y+A-AY}{1-Y-AY}.$$

Deci:

$$(4)\qquad Z=\frac{Y+A-AY}{1-Y-AY}.$$

Din (4) mai deducem:

$$Y=\frac{-A+Z}{1+Z+A(Z-1)}=\frac{Z-A}{1+Z-(1-Z)A}$$

relaţie ce ne permite să aflăm pe Y atunci când cunoaştem pe Z.

Observare. Dacă în (4) înlocuim pe:

$$A=\frac{a}{a-1} \quad \text{şi} \quad Y=x \text{ obţinem}$$

$$Z=\frac{x-a}{1-a+x(2a-1)}.$$

Putem deci spune că funcţiile:

$$y=\operatorname{arc\,sp} x$$

$$z=\operatorname{arc\,tg}\frac{x-a}{1-a+(2a-1)x}, \qquad \left(0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

au aceiaşi derivată. E tocmai problema 2364 propusă de D-l Prof. *V. Alaci.*

Problema 2. *Se dau funcţiile:*

$$(6)\qquad \begin{cases} y=\operatorname{arc\,cp} Y \\ z=\operatorname{arc\,tg} Z, \end{cases} \qquad \left(0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

unde Y *şi* Z *depind de variabila* x.

Să se determine Z, *cunoscând pe* Y, *astfel ca funcţiile* (6) *să aibă aceiaşi derivată.*

Soluţie. Procedăm absolut analog ca la problema I-a; obţinem

$$(7)\qquad Z=\frac{1-Y+AY}{Y-A+AY}$$

iar din (7) deducem

$$(8)\qquad Y=\frac{1+AZ}{1+AZ-A+Z}=\frac{1+AZ}{1-A+(1+A)Z}$$

Problema 3. *Se dau funcţiile*

$$(9)\qquad \begin{cases} y=\operatorname{arc\,sp} Y \\ z=\operatorname{arc\,sin} Z \end{cases} \qquad \left(0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

unde Y *şi* Z *depind de variabila* x. *Să se determine* Y, *cunoscând pe* Z, *astfel ca funcţiile* (9) *să aibe aceiaşi derivată.*

Soluţie.

$$y=z+C.$$

Din (9) avem

$$Y=\operatorname{sp} y=\operatorname{sp}(z+C)=\frac{\dfrac{\operatorname{tg} z+A}{1-A\operatorname{tg} Z}}{1+\dfrac{\operatorname{tg} z+A}{1-A\operatorname{tg} Z}} \qquad (\operatorname{tg} C=A)$$

Dar, $\operatorname{tg} z=\dfrac{Z}{\sqrt{1-Z^2}}$. Deci:

$$(10)\qquad Y=\frac{Z+A\sqrt{1-Z^2}}{Z(1-A)+\sqrt{1-Z^2}(1+A)}.$$

Observare. Dacă în (10) facem:

$$A=0 \quad \text{şi} \quad Z=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$$

obţinem $Y=\frac{x-1}{x}$.

Deci putem enunţa că funcţiile

$$\begin{cases} y=\operatorname{arc\,sp}\dfrac{x-1}{x} \\ z=\arcsin\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}} \end{cases} \qquad \left(0\leqq y\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

au aceiaşi derivată. E tocmai problema 2214 din R M T propusă de D-l *Marcel Cotariu* (Brăila)

Problema 4. Se pune aceiaşi problemă pentru funcţiile:

$$\begin{cases} y=\operatorname{arc\,cp} Y \\ z=\arccos Z \end{cases} \qquad \left(0\leqq y\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

Legătura dintre Z şi Y e dată de relaţia

$$(11)\qquad Y=\frac{\sqrt{1-Z^2}-Z}{Z(1-A)+\sqrt{1+Z^2}(1+A)}.$$

ILIE N. CONSTANTINESCU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul LIV, No. 3, Noembrie 1948. Rezolvarea unor tipuri de ecuaţii diofantice, de *V. Claudian*. Construcţia razei de curbură la curbele inverse, de *Ad. Gheorghiu*. Raport pentru decernarea premiului „*V. Conta*" pe anul 1948, de *G. G. Constantinescu*, *C. C. Teodorescu* şi *Şerban Ţiţeica*. Note matematice. Probleme rezolvate şi propuse.

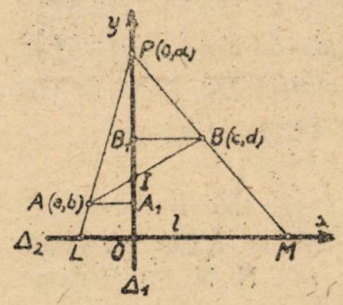
2. *Societate Română de Ştiinţă, secţia Matematică*, Anul II (serie nouă), No. 1—2. *Buletinul Şedinţelor*. Dări de seamă. Referate,

PROBLEME REZOLVATE

Problema 635. — *Se dau două drepte* Δ_1 *şi* Δ_2 *şi punctele* A *şi* B *în planul lor. Să se găsească pe dreapta* Δ_1 *punctul* P *astfel ca* P A *şi* P B *să intercepteze pe dreapta* Δ_2 *un segment de o lungime l dată. Discuţie.*

I. PROTOPOPESCU

Soluţia I. *Cazul când dreptele* Δ_1 *şi* Δ_2 *nu sunt paralele.* Luând dreptele Δ_1 şi Δ_2 ca axe care nu sunt neapărat derpendiculare) şi punând A(*a*,*b*), B(*c*, *d*), P(0, α), ecuaţiile dreptelor PA şi PBsunt,



$$P\,A\equiv(\alpha-b)x+a\,y-a\,\alpha=0,$$
$$P\,B\equiv(\alpha-d)x+c\,y-c\,\alpha=0.$$

Aceasta însemnează că dacă notăm cu x_1, x_2 abscisele punctelor L, M unde P A şi P B taie dreapta Δ_2, care reprezintă axa absciselor, avem

$$x_1=\frac{a\,\alpha}{\alpha-b},\qquad x_2=\frac{c\,\alpha}{\alpha-d},$$

şi deci condiţia problemei va fi

$$\frac{c\,\alpha}{\alpha-d}-\frac{a\,\alpha}{\alpha-b}=l,$$

sau

$$\frac{a\,\alpha}{\alpha-b}-\frac{c\,\alpha}{\alpha-d}=l.$$

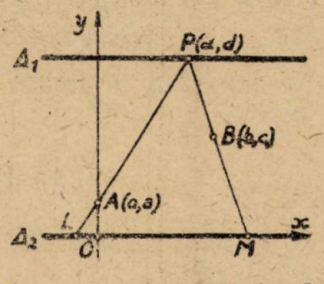
Aceste două ecuaţii se mai scriu

$$(1)\quad (a-c+l)\,\alpha^2+[b\,c-a\,d-l\,(b+d)]\,\alpha+l\,b\,d=0,$$
$$(2)\quad (a-c-l)\,\alpha^2+[b\,c-a\,d+l\,(b+d)]\alpha-l\,b\,d=0.$$

adică în general problema admite *patru* soluţii definite prin aceste ecuaţii.

Discuţia problemei se poate face pe aceste două ecuaţii dar interpretarea geometrică a rezultatelor nu este simplă deoarece axele de coordonate, aşa cum au fost alese, nu sunt în general perpendiculare. O examinare mai îndeaproape a figurei ne spune mai uşor rezultatul. In adevăr, dacă P este la infinit pe Δ_1, lungimea L M$=c-a$ şi creşte cu cât P se apropie de B_1 când L M devine infinit. Când P depăşeşte pe B_1 şi se apropie de I, segmentul L M descreşte până la zero, deoarece când P este în I, dreptele P B şi P A sunt confundate. Apoi, când P merge dela I la A_1 segmentul L M creşte dela zero la infinit ca apoi între A_1 şi O să descrească dela infinit la zero. In fine când P se depărtează de O pe Δ_1 la înfinit în jos, segmentul L M creşte dela zero la $c-a$. In concluzie, dacă $l\geqq c-a$ problema admite patru soluţii, şi două soluţii în cazul când $l<c-a$.

II. *Cazul când dreptele* Δ_1 *şi* Δ_2 *sunt paralele.* In cazul acesta luăm pe Δ_2 ca axă Ox şi perpendiculara din A pe ea ca axă Oy. Fie $A(0,a)$, $B(b,c)$, $P(\alpha,d)$, ecuaţiile dreptelor PA, PB vor fi



$$PA \equiv (d-a)x - dy + a\alpha = 0,$$

$$PB \equiv (d-c)x - (\alpha - b)y + (\alpha c - b d) = 0$$

de unde scoatem abscisele x_1, x_2 ale punctelor L şi M:

$$x_1 = -\frac{a\alpha}{d-a}, \qquad x_2 = \frac{b d - \alpha c}{d-c}.$$

Rezultă că α va fi determinat de una din ecuaţiile

$$\frac{b d - \alpha c}{d-c} + \frac{a\alpha}{d-a} = l,$$

(3)

$$-\frac{a\alpha}{d-a} - \frac{b d - \alpha c}{d-c} = l,$$

adică

(4) $$\alpha = \frac{l(d-c)(d-a) - b d(d-a)}{d(a-c)}$$

(5) $$\alpha = -\frac{l(d-c)(d-a) + b d(d-a)}{d(a-c)}.$$

In ipoteza că $a \neq c$ problema admite întotdeauna două soluţii. Dacă $a = c$ ecuaţiile (3) dau singura valoare pozitivă pentru l:

$$l = \frac{b d}{d-a}$$

şi problema numai are sens. Acest rezultat se poate vedea imediat şi geometric din triunghiurile asemenea PAB şi PLM.

Observare. Rezultatele de mai sus şi în special discuţiile depind de poziţiile relative ale dreptelor Δ_1, Δ_2 şi punctelor A, B între ele. Ele suferă modificări uşoare dela caz la caz.

Gh. Th. Gh.

Problema 1134. — *Unind punctele* M *şi* N *depe cercul* O *cu alte patru puncte fixe de pe cerc,* A, B, C, D *obţinem fascicolele* (M.ABCD) *şi* (N.ABCD) *Prin* A *ducem o coardă care tae razele primului fascicol în* β, γ, δ; *o altă coardă dusă tot prin* A, *tae razele fascicolului al doilea în* β', γ', δ'. *Să se arate că dreptele* $\beta\beta', \gamma\gamma', \delta\delta'$ *sunt concurente.*

MARIUS MARGULIUS

Soluţie dată de D-l Prof. *N. N. Mihăileanu* (pe când era student). Fascicolele (M . ABCD) şi (N . ABCD) sunt proective; avem atunci

$$(M.A\beta\gamma\delta) = M(ABCD) = N(ABCD) = N(A\beta'\gamma'\delta').$$

Fascicolele $A\beta\gamma\delta$, $A\beta'\gamma'\delta'$ fiind perspective şi având un punct dublu, razele $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$ sunt concurente.

Observări. 1° Punctele A, B, C, D,... pot fi oricâte luate pe cerc, căci punctele $A\beta\gamma\delta\ldots$ $A\beta'\gamma'\delta'\ldots$ rămân perspective.

2°. Rolul lu A îl poate juca oricare alt punct de pe cerc.

3°. Se poate substitui cercului o conică, proprietatea rămânând valabilă.

4°. Dacă secantele fascicolelor M, N nu se întâlnesc pe conică, punctualele $\alpha, \beta, \gamma\ldots$ $\alpha'\beta', \gamma'\ldots$, fiind perspective, dar $\alpha \neq \alpha'$ (A nu se corespunde lui însuşi), razele omoloage $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma', \ldots$ înfăşoară o conică.

Au rezolvat problema D-ra *Roşca Şt. Veronica* şi Dnii *Cosman Alex.* (Veseud), *Ivănescu Cezar, Predoescu M. Tr., Stănescu M. Em., Săli M.* şi *Vasiliu-Loeben Gh.*

Gh. Th. Gh.

Problema 2110. — *Se dă un cerc* O *şi diametrul* AB. *În jumătatea de cerc situată deasupra lui* AB *se înscrie un patrat* CDEF, *cu vârfurile* C *şi* D *pe* AB. *Diagonalele* EC *şi* FD *ale patratului, întâlnesc a doua oară cercul, respectiv în punctele* M *şi* N. *Dacă* P *este centrul patratului, să se demonstreze că aria triunghiului* PMN *este egală cu aceea a patratului* CDEF.

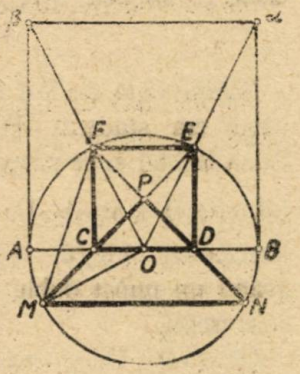
H. KNOPF

Soluţie dată de D-l *Wegener Eug.* (Bucureşti). Grafic, înscrierea patratului în semicerc se face după cum urmează. Pe diametrul AB se construeşte patratul $AB\alpha\beta$, iar punctele unde $O\alpha$ şi $O\beta$ taie cercul O sunt vârfurile F şi E ale patratului înscris în semicerc.

Justificarea construcţiei este următoarea:

Cele două patrate CDEF şi $AB\alpha\beta$ au laturile paralele şi de acelaşi sens; ele sunt prin urmare

omotetice, iar centrul lor de omotetie coincide cu centrul O al cercului. Aria patratului CDEF în funcție de raza R a cercului O se obține ușor. În triunghiul dreptunghic FCO avem: $\overline{FC}=\overline{CO}=x$ și aplicând teorema lui *Pitagora*: $\frac{5}{4}x^2=R^2$ deci



$$x=\overline{FC}=\overline{CD}=\frac{2R}{\sqrt{5}}$$

și

$$\text{aria } CDEF=\frac{4}{5}R^2.$$

Triunghiul PMN este dreptunghic în P (fiind punctul de intersecție al diagonalelor unui patrat. Triunghiul PMN fiind și isoscel, rezultă că $\sphericalangle PMN=\sphericalangle PNM=45^0$. Deducem că $\sphericalangle FOM=90^0$, ca fiind unghiul la centru corespunzător unghiului înscris $\sphericalangle PNM=45^0$. Deci $\overline{FM}=R\sqrt{2}$ adică egală cu latura patratului înscris în cerc. Din triunghiul FPM dreptunghic în P, și în care $\overline{FP}=R\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ (jumătate din diagonala patratului înscris CDEF) și $FM=R\sqrt{2}$, deducem:

$$\overline{PM}=\frac{2\sqrt{2}R}{\sqrt{5}}.$$

Avem: aria $PMN=\frac{1}{2}\overline{PM}\cdot\overline{PN}=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{5}R^2=\frac{4}{5}R^2$ adică: aria $CDEF=$ aria PMN.

Au rezolvat problema D-nii: *Anton I., Constantinescu N. Ilie, David Vas., Deutsch Em., Dobrotescu M. Gh., Giurconiu Gh. M., Godea I., Hendli M. Martin, Iosifescu Cicero, Moise I. Part., Muțiu Antiu, Neguț A. Ion, Nova I. I., Păläceanu D. Vas., Purcea M. I., Soare Mircea, Stanciu Petre, Stretea Alex., Țigănoiu Alex. și Turbuțiu Gh.*

Gh. Th. Gh.

Problema 2121. — *Într'un triunghiu* ABC, *în care mediana* $AM=m$ *formează* $\sphericalangle BAM=45^0$, *avem relația*

$$4c^2=a^2\cos 2B+4am\cos(45^0-B).$$

V. ALACI

Soluție. Construim figura în condițiile enunțului. În triunghiul ABM teorema sinusurilor ne dă:

$$\frac{a}{2\sin 45^0}=\frac{m}{\sin B},$$

de unde deducem

$$a\sin B=2m\sin 45^0=2m\cos 45^0 \text{ și prin urmare}$$

$$(1)\qquad a^2\sin^2 B=4m^2\cos^2 45^0.$$

De altă parte, în același triunghiu ABM, putem scrie

$$c=\frac{a}{2}\cos B+m\cos 45^0$$

și ridicând la patrat, după ce am scăpat de numitor, avem

$$(2)\quad 4c^2=a^2\cos^2 B+4m^2\cos^2 45^0+4am\cos B\cos 45^0.$$

Cum, $\cos^2 B=\cos 2B+\sin^2 B$ și având în vedere și relațiile (1), relația (2) devine succesiv

$$4c^2=a^2(\cos 2B+\sin^2 B)+2m\cos 45^0\cdot a\sin B+4am\cos 45^0\cos B=a^2\cos 2B+a\sin B\cdot a\sin B+2am\cos 45^0\sin B+4am\cos 45^0\cos B=a^2\cos 2B+2am\cos 45^0\sin B+2am\cos 45^0\sin B+4am\cos 45^0\cos B,$$

sau încă

$$4c^2=a^2\cos 2B+4am(\sin 45^0\sin B+\cos 45^0\cos B)=a^2\cos^2 B+4am\cos(45^0-B).$$

Astfel relația dată este stabilită.

Au dat soluții analoage, d-nii: *Bîrănaș Ioan* (P. T.), *Bitang Alexandru* (P. T.), *Chiriac C-tin, Cotariu Marcel* (Brăila), *Godea I.* (P. T.), *Hendli Martin, Goldiș Georghe* (P. T.), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Malița Mircea* (Beiuș), *Munteanu Lucian* (P. T.), *Novac Ioan* (P. T.) *Sabău Mihai* (P. T.), *Terczevski Antoniu* (Timișoara), *Tincu C-tin* (P. T.).

Alte soluții date de d-ra *Tarția Valeria* (P. T.), și de d-nii: *Bolcaș Victor* (Beiuș), *Brasch Andrei* (P. T.) *Constantinescu Ilie* (P. T.), *Enăchesca Ion* (Lic. Milit. Timișoara), *Grozescu Liviu, Mazilu Marius* (Lic Caransebeș), *Muțiu Antoniu* (P. T.), *Oprea Gh.* (Lic. Mil. Timișoara), *Șipoș Eugen* (P. T.), *Ștefănescu M.* (Locot.), *Stretea Al.* (Lic. Beiuș), *Tutor Aurel, Țigănoiu Alexandru* (P. T.) și *Wegener Eugen* (București) S'au primit și unele soluții greșite.

Problema 2135. — *Fie* AB *un diametru al cercului* O. *Se duce pe acest diametru o perpendiculară variabilă care taie cercul în* M *și* N. *Apoi se unește* M *cu* A *și fie* P *mijlocul coardei* AM. *Să se afle locul geometric al punctului de intersecție a dreptei* NP *cu paralela la* AB *dusă prin* M.

MIRCEA MANOLACHE

Soluția. Alegem diametrul AB ca axă Ox și diametrul perpendicular pe el ca axă Oy. Dacă notăm cu a raza cercului, atunci $A(a,0)$. Un punct M al cercului va avea coordonatele de forma

$M(a\cos\alpha,\ a\sin\alpha)$ şi deci $N(a\cos\alpha,\ -a\sin\alpha)$. Coordonatele lui P vor fi

$$P\left[\tfrac{1}{2}a(1+\cos\alpha),\ \tfrac{1}{2}a\sin\alpha\right].$$

Ecuaţia dreptei NP este

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a\cos\alpha & -a\sin\alpha & 1 \\ \frac{1}{2}a(1+\cos\alpha) & \frac{1}{2}a\sin\alpha & 1 \end{vmatrix} = 0$$

sau

(1) $3\sin\alpha . x - (1-\cos\alpha)y - a\sin\alpha(1+2\cos\alpha)=0$

Cum ecuaţia paralelei dusă prin M la AB este (2) $y = a\sin\alpha$, locul geometric se va găsi eliminând pe α şi β între ecuaţiile (1), (2). Din aceste două ecuaţii scoatem

$$\sin\alpha = \frac{y}{a}, \qquad \cos\alpha = \frac{3x-2a}{a},$$

şi deci locul va fi

$$\left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{3x-2a}{a}\right)^2 = 1,$$

sau

$$\frac{\left(x-\frac{2}{3}a\right)^2}{\left(\frac{1}{3}a\right)^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

adică este o elipsă având axele paralele cu axele de coordonate, de mărimea $\left(\frac{1}{3}a,\ a\right)$ şi centrul fiind situat în punctul $\left(\frac{2}{3}a,\ 0\right)$.

Au rezolvat problema, D-rele *Măran I. Ana* şi *Tarţa Valeria* precum şi D-nii *Anton Ion, Birănaş I., Bolcaş Victor, Brasch A., Chesaru P. Cr., Chiriac Consl., Constantinescu Ilie, Cotariu Marcel, Georgescu Nicolin, Giurconiu M., Groza Liviu, Grozescu Liviu, Kinschi I., Ionescu P., Ionescu Victor, Miclea N., Marinescu N., Muţiu Antim Novac I., Popa Vas., Popescu D-tru, Purcea I., Şerengău M., Soare V, Mircea, Soare Semin, Teodorescu P., Ţigănoiu Al., Tincu Const.* şi *Wegener Eug.*

Gh. Th Gh.

Problema 2421*). — *Să se arate că:*

$$\frac{C_{p-1}^0}{n} - \frac{C_{p-1}^1}{n+1} + \frac{C_{p-1}^2}{n+2} - \cdots + (-1)^{p-1}\frac{C_{p-1}^{p-1}}{n+p-1} = \frac{(n-1)!\,(p-1)!}{(n+p-1)!}.$$

MARIA NEUMANN

Soluţie. În cursul de „Algebră Superioară“ al D-lui Prof. *Th. Angheluţă* vol. I, pag. 52, (sau în „Calculul Algebric“ de *Tr. Lalescu*, pag. 91), se găseşte stabilită următoarea identitate:

$$\frac{p!}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p)} = \frac{1}{n} - \frac{C_p^1}{n+1} + \frac{C_2^p}{n+2} + \cdots + \frac{(-1)^p C_p^p}{n+p}$$

obţinută, fie aplicând teoria diferenţelor, fie descompunând în elemente simple, fracţia din membrul I-iu.

Problema 2421 se obţine din această identitate înlocuind pe p prin $p-1$. Avem în acest caz:

$$\frac{C_{p-1}^0}{n} - \frac{C_{p-1}^1}{n+1} + \cdots = \frac{(p-1)!}{n(n+1)\ldots(n+p+1)}.$$

Amplificând fracţia din partea a doua cu $(n-1)!$ obţinem:

$$\frac{(n-1)!\,(p-1)!}{(n+p-1)!}$$

adică tocmai ce trebuia arătat.

Au rezolvat problema, bazându-se pe identitatea menţionată mai sus, D-nii: *Corduneanu Const.* şi *Wegener Nic. Eugen.* D-l *Teodorescu P. P.* a rezolvat direct problema.

Cu această ocazie D-l *Teodorescu* deduce din relaţia demonstrată, identitatea

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{i+1} C_n^i = -\frac{1}{n+1}.$$

ceiace arată că a doua relaţie din ex. 45, G. M., vol. 49, pag. 762 este greşită.

Cine citeşte soluţia identităţei menţionate vede imediat că se face o greşeală, puţin admisibilă, lăsându-se deoparte constanta de integrare.

Gh. Th. Gh.

Problema 2426. — *Să se găsească un patrat perfect de patru cifre astfel că dacă se intervertesc cele două cifre din mijloc, numărul obţinut este încă un patrat perfect dar în sistemul de numeraţie de bază 9.*

V. THÉBAULT

Soluţie dată de D-l *Teodorescu P.* (Bucureşti). Fie un număr N_{10} în sistemul zecimal şi N_9 în sistemul cu baza 9. Conform enunţului avem:

$$\overline{abcd} = N_{10}^2 \quad \text{şi:} \quad \overline{acbd} = N_9^2; \quad \text{sau:}$$

$$1000a + 100b + 10c + d = N^2 \text{ şi}$$

(1) $$729a + 81c + 9b + d = K^2,$$

*) Enunţ corectat.

trecând şi pe al doilea în sisiemul zecimal.

Mai putem scrie:

(2) $\qquad 9(81a+9c+b)+d=K^2$

dar un patrat perfect este faţă de modulul 9 de una din formele: $9n$; $9n+1$; $9n+4$; $9n+7$.

Privind la relaţia (2) şi ţinând seamă de relaţia (1) putem avea pentru d una din valorile: 0,1,4;

Pentru: $d=0$, avem: $c=0$ [din relaţia (1)].

Deci: $100(10a+b)=N^2$ şi: $9(81a+b)=K^2$.

Ambele paranteze trebue să fie patrate perfecte. Dând toate valorile posibile lui a şi b, găsim că nu există soluţie. Deci: $d=1;4$;

Vom calcula apoi patratele perfecte care se termină cu 1 sau 4 (deci rădăcina se termină cu 1;2; 8; 9) escluzând pe cele ce conţin cifra 9 (care nu există în sistemul cu baza 9).

Găsim astfel următoarele patrate perfecte, de patru cifre

1024;	2401;	3844;	6241;
1444;	2601;	4624;	6561;
1521;	2704;	4761;	6724;
1681;	3364;	5041;	7744;
1764;	3481;	5184;	8281;
2304;	3721;	6084;	8464;

cifrele acestor patrate sunt soluţii întregi ale ecuaţiilor

(3) $\quad 2\times5(100a+10b+c)=(N+1)(N-1)$

(4) $\quad 2\times5(100a+10b+c)=(N+2)(N-2)$.

Dar ele trebue să satisfacă şi una din ecuaţiile:

(5) $\qquad 3^2(81a+9c+b)=(k+1)(k-1)$

(6) $\qquad 3^2(81a+9c+b)=(k+2)(k-2)$

Luând cifrele fiecărui număr şi făcând verificarea pentru ecuaţiile (5) şi (6), găsim singura soluţie:

$a=4$; $\quad b=6$; $\quad c=2$; $\quad d=4$; deci;

$N_{10}=68$; $\quad N_{10}^2=4624=\overline{a\,b\,c\,d}$

şi $\quad N_9=62$; $\quad N_9^2=4264=\overline{a\,c\,b\,d}$.

Problema 2483. — 1° *Să se arate că funcţiile*

$$y=\arccos a\sqrt{x},\quad z=2\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}-2a\sqrt{x}}{1+2\sqrt{1-a^2x}}$$

au aceiaşi derivată.

2° *Să se determine valorile reale ale lui a astfel ca ecuaţia*

$$1+y'\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-a^2x)}}$$

să aibă o rădăcină dublă, y' fiind derivata lui y din (1).

V. ALACI

I

Pentru prima parte a problemei vom da trei soluţii:

Soluţia 1-a. Derivatele lui y şi z din (1), în raport cu variabila x, sunt respectiv:

$$y'=\frac{-1}{\sqrt{1-a^2x}}\cdot\frac{a}{2\sqrt{x}}=-\frac{a}{2\sqrt{x(1-a^2x)}};$$

$$z'=\frac{2}{1+\left(\frac{\sqrt{3}-2a\sqrt{x}}{1+2\sqrt{1-a^2x}}\right)^2}\times$$

$$\frac{-\frac{a}{\sqrt{x}}(1+2\sqrt{1-a^2x})+\frac{a^2}{\sqrt{1-a^2x}}(\sqrt{3}-2a\sqrt{x})}{(1+2\sqrt{1-a^2x})^2}$$

$$=-2a\frac{\sqrt{1-a^2x}(1+2\sqrt{1-a^2x})-a(\sqrt{3x}-2ax)}{\sqrt{x(1-a^2x)}[(1+2\sqrt{1-a^2x})^2+(\sqrt{3}-2a\sqrt{x})^2]}=$$

$$2a\frac{\sqrt{1-a^2x}+2-2a^2x-a\sqrt{3x}+2a^2x}{\sqrt{x(1-a^2x)}\,1+4\sqrt{1-a^2x}+4-4a^2x+3-4a\sqrt{3x}+4a^2x)}$$

$$=-2a\frac{\sqrt{1-a^2x}-a\sqrt{3x}+2}{4\sqrt{x(1-a^2x)}(\sqrt{1-a^2x}-\sqrt{3x}+2)}=-\frac{a}{2\sqrt{x(1-a^2x)}}$$

Funcţiile (1) au astfel aceiaşi derivată.

Soluţia 2-a. Vom dovedi că funcţiile y şi z diferă printr'o constantă, de unde va rezulta că ele au aceiaşi derivată. În adevăr, din relaţiile (1) deducem trecând la funcţiile inverse

$$\cos y=a\sqrt{x},\qquad \operatorname{tg}\frac{z}{2}=\frac{\sqrt{3}-2a\sqrt{x}}{1+2\sqrt{1-a^2x}}.$$

Relaţia 2-a, ţinând seama de prima, se mai poate scrie succesiv,

$$\operatorname{tg}\frac{z}{2}=\frac{\sqrt{3}-2\cos y}{1+2\sqrt{1-\cos^2y}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos y}{\frac{1}{2}+\sin y}=$$

$$\frac{\cos 30^0 - \cos y}{\sin 30^0 + \sin y} = \frac{-2\sin\frac{30^0+y}{2}\sin\frac{30^0-y}{2}}{2\sin\frac{30^0+y}{2}\cos\frac{30^0-y}{2}} =$$

$$\frac{\sin\frac{y-30^0}{2}}{\cos\frac{y-30^0}{2}} = \operatorname{tg}\frac{y-30}{2}$$

De aci urmează

$$\frac{y-30^0}{2} = z + k\pi, \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

sau

$$y - z = 30^0 + 2k\pi = ct,$$

tocmai ceeace trebuia stabilit.

Soluția 3-a. Conform celor stabilite de autorul problemei în articolul *„Funcții trigonometrice inverse cu aceiași derivată“*, publicat în „R. M. T“, Vol. XXV, N-rile 11 și 12 și Vol. XXVI, Nr. 1, rezultă că: *Două funcții de forma*

(2) $$y = \arccos Y, \quad z = 2\operatorname{arc\,tg} Z,$$

unde Y *și* Z *sunt la rândul lor functii de o aceiași variabilă* x, *au derivatele egale, dacă funcția* Z *se poate exprima cu ajutorul funcției* Y *printr'o relație de forma*

(3) $$Z = \frac{-Y \pm \sqrt{1-k^2}}{k \pm \sqrt{1-Y^2}},$$

k *fiind o cantitate constantă.*

În cazul problemei de față, avem

$$Y = a\sqrt{x} \quad \text{și} \quad Z = \frac{\sqrt{3} - 2a\sqrt{x}}{1 + 2\sqrt{1-a^2x}},$$

de unde eliminând pe x, deducem

$$Z = \frac{\sqrt{3}-2Y}{1+2\sqrt{1-Y^2}} = \frac{-Y+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}+\sqrt{1-Y^2}} = \frac{-Y+\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}{\frac{1}{2}+\sqrt{1-Y^2}}$$

ceeace ne arată că Z este în adevăr de forma (3), în care radicalii sunt luați cu semnul +, k având valoarea $\frac{1}{2}$.

II.

Trecem acum la partea 2-a a problemei, după soluția D-lui profesor *Vișa Eugen:* Inlocuind în ecuația

$$1 + y' = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-a^2x)}}$$

pe y' cu valoarea găsită mai sus, aceasta devine

$$1 - \frac{a}{2\sqrt{x(1-a^2x)}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-a^2x)}},$$

sau făcând să dispară numitorii, avem

$$2\sqrt{x(1-a^2x)} - a = 2\sqrt{x}$$

de unde prin ridicare la patrat deducem

$$4x(1-a^2x) - 4a\sqrt{x(1-a^2x)} + a^2 = 4x,$$

$$-4a^2x^2 + a^2 = 4a\sqrt{x(1-a^2x)},$$

iar printr'o nouă ridicare la patrat:

$$16a^4x^4 - 8a^4x^2 + a^4 = 16a^2x(1-a^2x),$$

$$16a^4x^4 + 8a^4x^2 - 16a^2x + a^4 = 0$$

și simplificând prin $a^2 \neq 0$, obținem

(1) $$16a^2x^4 + 8a^2x^2 - 16x + a^2 = 0$$

Pentru ca această ecuație să admită o rădăcină dublă, trebuie să aibă o rădăcină comună cu derivata ei, care este

$$64a^2x^3 + 16a^2x - 16 = 0,$$

sau

(2) $$4a^2x^3 + a^2x - 1 = 0$$

Inmulțind ecuația (2) cu $4x$ și scăzând-o apoi din (1), obținem

(3) $$4a^2x^2 - 12x + a^2 = 0,$$

rădăcina comună a ecuațiilor (1) și (2) fiind aceiași cu rădăcina comună a ecuațiilor (2) și (3).

Inmulțind acum ecuația (2) cu x și scăzând-o pe urmă din (2) deducem

(4) $$12x^2 - 1 = 0,$$

ceeace ne arată că rădăcina comună căutată este rădăcina comună a ecuațiilor (3) și (4).

Inmulțind în sfârșit ecuația (3) cu 3, iar ecuația (4) cu a^2 și scăzându-le apoi, găsim:

(35) $$36x - 4a^2 = 0,$$

de unde rezultă

$$x = \frac{a^2}{9},$$

care este rădăcina comună căutată.

Scriind că această rădăcină verifică ecuația (4), avem

$$\frac{12a^4}{81} - 1 = 0$$

de unde $12a^4 = 81$, deci $a^2 = \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Cum a trebuie, conform enunțului, să fie real, va trebui să luăm

$$a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

și deci

$$a = \pm\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \pm\sqrt[4]{\frac{27}{4}}.$$

Am determinat astfel pe a astfel ca ecuația din enunț sub 2° să aibă o rădăcină comună

Au rezolvat problema dând toate cele 3 soluții de sub I, d-nii: *Deutsch Emeric* (P. T.), *Fleșeriu Eugen* (P. T.) *Stănilă George* (Buzău) și *Vișa Eug.* (prof.). Au dat numai soluția 1-a de sub I, d-nii: *Poenaru Gh.* (P. T.) și *De Sabota Ioan* (Beiuș); în fine au dat numai soluția 1-a de sub I, d-nii: *Cârciu Ion* (Timișoara), *Cioara Alexandru* (P. T.), *Ciucescu Paul* (Slatina-Olt), *Coțiu Aurel* (student, Cluj), *Crăciunescu V.* (P. T.), *Gherlan V.* (P. T.), *Ghersch Paul* (T), *Giurconiu Mihail* (P. T.), *Manolescu Gh.* (P. T.), *Mărcuțiu Silviu* (P. T.) și *Teodorescu Petre* (Lic. Matei Basarab, București).

Problema 2611. — *Să se calculeze unghiurile pe care le face mediana corespunzătoare uneia din laturile unui triunghiu cu celelalte două, cunoscând exclusiv unghiurile acelui triunghiu.*

EUGEN VIȘA

Soluția. Problema 2486, a cărei soluție a fost publicată la pag. 95, a avut de scop demonstrarea a două relații trigonometrice dintre cari una este

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{b-c}{b+c}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A$$

unde α și β sunt unghiurile pe care le face mediana AA' respectiv cu laturile AB și AC. În această relație stă soluția problemei prezente. In adevăr, ținând seamă că $b=2R\sin B$ și $c=2R\sin C$, avem succesiv

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)\cos\frac{1}{2}(B+C)}{\sin\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{1}{2}(B-C)}$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)\sin\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}(B-C)} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(B-C)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A$$

încât formula considerată se poate scrie în funcție numai de unghiurile triunghiului

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(B-C)\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}A.$$

Cum unghiurile triunghiului sunt cunoscute, această formulă, considerată ca o ecuație, ne dă posibilitatea să calculăm pe $\alpha-\beta$. Cum $\alpha+\beta=A$, având suma și diferența unghiurilor α și β le vom calcula imediat.

Diutre rezolvitorii problemei numai D-nii *De Sabata I.* (Beiuș) și *Deutsch Em.* (P. T.), au dat formule calculabile prin logaritmi.

Alte soluții dela D-rele *Alexa M.* (P. T.), *Rațiu M.* (P. T.) și dela D-nii *Bogoevici I. Nic.* (Caransebeș), *Breazu M.* (Deva), *Constantinescu I. Gh.* (Slatina), *Deleanu Ar.* (București), *Drăghici Iosif* (Caransebeș) *Man Iosif* (P.T.), *Manoilă Dan* (Constanța), *Nemoianu C.* (P. T.), *Purcea M. I.* (Caracal) și *Radu Cor.* (Tg.-Mureș)

Gh. Th. Gh.

Problema 2622. — *Să se exprime unghiurile unui paralelogram în funcție de unghiurile ce le formează diagonalele cu una din laturi.*

I. LOZICIU

Soluție. Fie paralelogramul $ABCD$, M intersecția diagonalelor, $\sphericalangle MAB = \alpha$ și $\sphericalangle MBA = \beta$ unghiurile cunoscute. Problema se reduce la a calcula unghiul A, deoarece $A=C$ și $B=D=180°-A$.

In triunghiul AMB avem

$$\frac{\overline{MB}}{\sin\alpha} = \frac{\overline{AB}}{\sin AMB} = \frac{\overline{AB}}{\sin(\alpha+\beta)} \quad \text{sau} \quad \frac{\overline{MB}}{\overline{AB}} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

iar în triunghiul ABD:

$$\frac{\overline{BD}}{\sin A} = \frac{2\overline{MB}}{\sin A} = \frac{\overline{AB}}{\sin(A+B)} \quad \text{sau} \quad \frac{2\overline{MB}}{\sin A} = \frac{AB}{\sin(A+\beta)}.$$

Din cele două relații obținute, deducem prin eliminarea lui $\frac{\overline{MB}}{\overline{AB}}$, $\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\sin A}{2\sin(A+\beta)}$

$$2\sin\alpha(\sin A\cos\beta + \sin\beta\cos A) =$$
$$= \sin A(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)$$
$$(\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha)\sin A + 2\sin\alpha\sin\beta\cos A = 0$$

$$\therefore \quad \operatorname{tg} A = -\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

Soluții date de d-nii *Bogoevici I. Nic.* (Caransebeș), *Breazu M.* (Deva), *Drăghici Iosif* (Caransebeș) și *Radu Cor.* (Tg.-Mureș).

Observare. Problema se poate rezolva calculând

§ unghiurile $x = \sphericalangle MCB$, $y = \sphericalangle MBC$ şi observând că $A = \alpha + x$, $B = \beta + y$. Unghiurile x şi y sunt date de formulele

$$x + y = 180^0 - (\alpha + \beta)$$
$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(x - y) = \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta).$$

Au rezolvat problema în acest mod, D-nii *Deleanu I. Ar.* (Bucureşti), *De Sabata I.* (Beiuş) şi *Deutsch E.* (P. T.)

Gh. Th Gh.

Problema 2632. — *Să se demonstreze că dacă*

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}^2 \gamma,$$

atunci avem şi relaţia

$$\frac{\sin^2(\alpha + \gamma)}{\sin^2(\beta + \gamma)} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta}.$$

VALERIU PETCU

Soluţie dată de D-l *Popovici P. Const.* (bacalaureat, Bucureşti). Scriem relaţia de condiţie sub forma: $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \gamma} = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \beta}$ şi obţinem succesiv:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\gamma} = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma} \cdot \cdot \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\cos\alpha \cdot \cos\gamma}} = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\frac{\sin(\beta+\gamma)}{\cos\beta \cdot \cos\gamma}}$$

$$(1) \quad \cdot \cdot \cdot \quad \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin(\beta + \gamma)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma}.$$

Scriem, acum, relaţia de condiţie sub forma: $\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \gamma} = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \alpha}$ şi obţinem succesiv:

$$\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma} = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\alpha} \cdot \cdot \cdot \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\frac{\sin(\beta+\gamma)}{\cos\beta \cos\gamma}} = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\cos\alpha \cdot \cos\gamma}}$$

$$(\ ) \quad \cdot \cdot \cdot \quad \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin(\beta + \gamma)} = \frac{\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \gamma}{\sin \beta}.$$

Înmulţind relaţiile (1) şi (2):

$$\frac{\sin^2(\alpha + \gamma)}{\sin^2(\beta + \gamma)} = \frac{2 \sin \gamma \cos \alpha}{2 \sin \beta \cdot \cos \beta} \cdot \cdot \cdot \frac{\sin^2(\alpha + \gamma)}{\sin^2(\beta + \gamma)} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta}$$

căpătăm relaţia din enunţ.

Au dat soluţii asemănătoare D-nii *Bălă V. Const* (P. T.) *Bălăuţă M* (Deva), *Breazn M* (Deva). *Constantinescu I. Gh.* (Slatina), *Deleanu I. Ar.* (Bucurerti), *De Sabata I.* (Beiuş), *Deutsch Em.* (P T), *Gertler N. R.* (Bucureşti), *Mănoilă V. Dan* (Constanţa), *Păunescu Şt. Gh.* (Bucureşti), *Radu Corneliu* (Tg.-Mureş), *Soare V. M.* (Bucureşti) *Turbuţiu I.* (Carei), *Zănescu Liviu* (Bucureşti) şi *Lungu A. I.* (Bucureşti)

Gh. Th. Gh.

Problema 2637. — *Se dă sistemul de ecuaţii*

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} = \dfrac{c}{a-b} \\ \dfrac{1+xy}{1-xy} = \dfrac{a+b}{c} \\ (x^2 - y^2)(1 - x^2y^2) = a^2 - b^2. \end{cases}$$

Să se arate că dacă avem relaţia

$$(a+b+c)^3(-a+b+c)(a-b+c) = 16c^2(a+b-c)$$

sistemul este compatibil şi să se rezolve.

C. IONESCU-ŢIU

Soluţie dată de D-l *Petcu Al. Valeriu* (Bucureşti). În virtutea unei cunoscute proprietăţi a proporţiilor, primele două ecuaţii se scriu succesiv:

$$(1) \quad \frac{x}{y} = \frac{a-b+c}{-a+b+c}$$

$$(2) \quad xy = \frac{a+b-c}{a+b+c}.$$

Înmulţind relaţiile (1) şi (2) membru cu membru obţinem:

$$(3) \quad x^2 = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{(-a+b+c)(a+b+c)}.$$

Înmulţind relaţia (2) cu (1) răsturnată obţinem:

$$(4) \quad y^2 = \frac{(-a+b+c)(a+b-c)}{(a-b+c)(a+b+c)}.$$

Dacă sistemul este compatibil, atunci x^2 şi y^2 daţi de relaţiile (3) şi (4) trebue să verifice ultima ecuaţie,

$$x^2 - y^2 = \frac{(a+b-c)[(a-b+c)^2 - (-a+b+c)^2]}{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b+c)}$$

$$x^2 - y^2 = \frac{4c(a-b)(a+b-c)}{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b+c)}$$

$$1 - x^2y^2 = 1 - \frac{(a+b-c)^2}{(a+b+c)^2} = \frac{(a+b+c)^2 - (a+b-c)}{(a+b+c)^2}$$

$$1 - x^2y^2 = \frac{4c(a+b)}{(a+b+c)^2}.$$

Introducând valorile lui $x^2 - y^2$ şi $1 - x^2y^2$ în ultima ecuaţie, obţinem după simplificare şi aducere la acelaşi numitor

$$(a+b+c)^3(-a+b+c)(a-b+c) = 16^2(a+b-c)$$

care este tocmai relaţia din enunţ.

În cazul când această relaţie este satisfăcută, soluţiile sunt date de (3) şi (4):

$$x = \pm\sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{(-a+b+c)(a+b+c)}}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{(-a+b+c)(a+b-c)}{(a-b+c)(a+b+c)}}.$$

Au rezolvat problema D-nii *Bogoevici A.* (Caransebeş), *Breazu M.* (Deva), *Dodu Eug.* (Bucureşti), *Radu Corneliu* (Tg.-Mureş) şi *Soare V. Mircea* (Bucureşti).

Gh. Th. Gh.

PROBLEME PROPUSE

2685. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x+y+z+u=0 \\ x^2+y^2+z^2+u^2=145 \\ x^3+y^3+z^3+u^3=1050 \\ xy=zu \end{cases}$$

BARBU POPESCU SALCIA

2686. — Să se arate că fiind date relaţiile

$$a=m(1+n^2)(1+p^2),\quad b=n(1+p^2)(1+m^2),$$
$$c=p(1+m^2)(1+n^2)$$

şi

$$mn+np+pm=1,$$

rezultatul eliminării lui m, n, p este relaţia

$$(a+b+c)^5(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)=2^8a^2b^2c^2.$$

C. IONESCU-TIU

2687. — Să se stabilească identitatea

$$\begin{vmatrix} a_1^2+a_2^2 & a_1b_1+a_2b_2 & a_1c_1+a_2c_2 \\ a_1b_1+a_2b_2 & b_1^2+b_2^2 & b_1c_1+b_2c_2 \\ a_1c_1+a_2c_2 & b_1c_1+b_2c_2 & c_1^2+c_2^2-d^2 \end{vmatrix} = -d^2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2$$

MARIA NEUMANN.

2688. Dacă a şi b sunt numere reale ($a<b$), să se stabilească inegalităţile

$$\sqrt[9]{a^4} < \frac{5}{9}\,\frac{b-a}{\sqrt[9]{b^5}-\sqrt[9]{a^5}} < \sqrt[9]{b^4}.$$

Să se verifice apoi în cazul $a=1$, $b=2$.

V. ALACI

2689*. — Pe latura BC a unui triunghiu ABC se consideră două puncte M şi N. Fie B' şi C' conjugatele lui B şi C în raport cu M şi N. Paralela dusă prin B' la AC, cu paralela dusă prin C' la AB şi cu dreapta ce uneşte A cu mijlocul lui MN sunt trei drepte concurente.

GH. TH. GHEORGHIU

2690. — Să se construiască triunghiul ABC, dreptunghic în A, cunoscând piciorul înălţimei AH şi centrele cercurilor înscrise în triunghiurile BAH şi CAH.

D-L GH. BUICLIU

2691. — Să se construiască un triunghiu cunoscând mediana şi unghiurile B şi C.

EUGEN DODU

2692. — Se consideră un dreptunghiu ABCD şi un cerc O trecând prin vârfurile opuse A şi C ale dreptunghiului. Cercul O mai taie laturile dreptunghiului ABCD, sau prelungirile lor, în punctele P, Q, R, S.

Să se arate că patrulaterul PQRS este un dreptunghiu, având două din laturi paralele şi egale cu diagonala BD

VASILE VASU

2693. — Să se arate că între elementele unui triunghiu oarecare ABC avem următoarele relaţii

$$\Sigma a\cos^2 A\sin(B-C)=0$$
$$\Sigma a\cos^2 B\cos^2 C\sin(B-C)=$$
$$\frac{S}{R}\sin(A-B)\sin(B-C)\sin(A-C),$$

notaţiile fiind cele obicinuite.

P. TEODORESCU

2694* — Să se rezolve sistemul de ecuaţii vectoriale

$$\overline{a}\,\overline{x}+\overline{b}\,\overline{y}=\overline{u},\quad \overline{x}\,\overline{y}=v,$$

unde $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{u}$, $\overline{v}$ sunt vectori daţi, $\overline{x}$, $\overline{y}$ vectori necunoscuţi, iar $\overline{p}\,\overline{q}$ reprezintă produsul vectorial (geometric) al vectorilor $\overline{p}$ şi $\overline{q}$.

M. GHERMANESCU

ERATĂ.

1) La problema 2677, din n-rul trecut, partea 2-a a ultimei egalităţi trebuie ridicată la patrat.

2) In problema 2678, din n-rul trecut, se va adăoga: pentru $a=\frac{1}{3}$.

INFORMAŢII

1. Nu se publică în revistă decât manuscrise dela abonaţi.

2. Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol, trebuesc scrise citeţ (în special iscălitura) numai pe o parte a hârtiei. Probleme propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor, iar cele rezolvate, de enunţ. Nu sunt luate în considerare probleme rezolvate iscălite de mai mulţi corespondenţi. Problemele rezolvate vor fi redactate îndependent una de alta, şi nu în continuare.

3. Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

4. Numele colaboratorilor dela cari s'au primit soluţii la problemele publicate în acest număr şi care au sosit la redacţie după data de 15 a lunei precedente, nu mai pot fi trecute în corpul revistei Numele lor este însă menţionat pe copertă împreună cu numărul problemei rezolvate.

5. Rugăm pe corespondenţii noştrii la orice schimbare de adresă sau lipsă din localitate fără a avea pe cineva să le primească revista, să ne anunţe din vreme. În caz contrar revista ne vine înapoi şi cu regret anunţăm că a două oară nu o mai putem expedia. Mai mult, se suspendă expedierea numerelor următoare până ce abonatul va reclama aceste numere.

6. Aducem la cunoştinţa corespondenţii nostrii care ne trimit *probleme propuse* că ele trebue să fie cât mai *originale*, în sensul de a nu a fi asemănătoare cu cele publicate în ultimul timp.

7. *Fruntеş I. Petrache.* Am primit abonamentul. Nu putem să vă trimitem revista deoarece nu se înţelege adresa scrisă pe buletinul dela CEC.

Manuscrise primite de la corespondenții noștrii până la 1 a lunei curente și anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) și probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Bălăuță Mihai (1067, 1250, 1253, 2468); *Bogoevici Nicolae* (P; 2675, 2676, 2680, 2681); *Breazu Mihai* (1678, 1687, 2585, 2658, 2665, 2666, 2667, 2668, 2670, 2673, 2680, 2681, 2683, 2684); *Constantinescu Ilie* (P.); *Coțiu Aurel* (2632, 2657, 2658, 2661, 2666); *Deutsch Emeric* (P; 2676, 2679); *Giurconiu Mihai* (P; 2632, 2634, 2645, 2648, 2655, 2664, 2666, 2667, 2675); *Lenz Friedrich* (2607, 2636, 2665), *Lungu Ioan* (P; 2026, 2675, 2680); *Manoilă Dan* (2637); *Petcu Valeriu* (P; 1975, 1982); *Pisanca Ionel* (P; 1938, 1971, 2248, 2281, 2667, 2668); *Radu Corneliu* (2658, 2659, 2660, 2663, 2664); *De Sabata Ioan* (2588, 2637, 2638, 2639, 2657, 2658, 2659, 2660, 2666, 2667, 2668, 2672); *Seracin Eugen* (1657, 2607, 2636, 2639, 2657, 2660, 2663, 2664, 2666, 2667, 2672); *Soare Mircea* (2611, 2648, 2653, 2671); *Stănilă B.* (2528, 2536, 2562, 2570, 2575, 2577, 2607, 2623, 2632, 2634, 2658, 2659, 2663, 2664, 2666, 2668, 2679, 2680, 2681, 2684); *Tarția Cornel* (2538, 2552, 2566, 2567, 2576, 2580; *Teodorescu Petre* (N; 2669, 2679); *Stroe Ioan* (P; 2664); *Tănăsescu Virgil* (2314, 2483, 2625).

ANUL XXVIII. IANUARIE 1948. No. 11.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA
PREȚUL ABONAMENTULUI ESTE 300 LEI ANUAL PENTRU PARTICULARI
ȘI 600 LEI PENTRU INSTITUȚII
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRĂINĂTATE ESTE DE 600 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **V. ALACI:** ASUPRA UNGHIURILOR ASOCIATE ALE UNUI TRIUNGHIU.
2. **VINCENZO G. CAVALLARO:** SUR LES TRIANGLES HARMONIQUES.
3. NOTE MATEMATICE 19, 20.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 1877, 2484, 2532, 2538, 2552, 2566, 2602, 2607, 2633, 2648, 2653, 2659, 2664.
6. PROBLEME PROPUSE: 2695-2704.
7. INFORMATII.

Tip. „Gh. Hălmăgeanu", Timișoara
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebue să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea poporului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara, conţinând articole, note, probleme propuse şi rezolvate, vor fi trimise pe adresa: Prof. V. Alaci, Politehnica, Timişoara.

Administraţia revistei aduce la cunoştinţa generală următoarele:

1. Abonamentul pe anul XXVIII (15 Martie 1948 — 15 Februarie 1949) este 300 lei pentru particulari şi 600 pentru instituţii.

2. Taxa de membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este de 200 lei.

3. Volumele I, XXIII, XXV, XXVI şi XXVII sunt epuizate. Celelalte volume broşate se găsesc de vânzare cu preţul de 300 lei fiecare. La această sumă se va adăoga 50 lei costul expediţiei. In caz că se comandă mai multe volume se va adăoga la taxa de 26 lei pentru recomandat, câte 20 lei pentru fiecare volum.

4. Se găsesc de vânzare numere izolate din colecţie chiar din volumele epuizate. Preţul unui număr este de 30 lei la care se adaogă 2 lei expediţia. Din vol. XXVII se găsesc de vânzare no. 1, 4—12.

5. Se primesc reclamaţii că se pierde revista prin poştă. Aceste reclamaţii sunt adunate în ordinea sosirii lor şi vor fi satisfăcute la 15 Februarie 1949 când se vor vedea ce numere rămân descomplectate după legarea volumelor întregi. Orice reclamaţie de pierderea unui număr nu este luată în seamă decât la o lună dela data apariţiei acelui număr.

6. Tot ce priveşte administraţia se va adresa D-lui Prof. **Gh. Th. Gheorghiu** str. Voltaire Nr. 1, Timişoara I. Reclamaţiile ce necesită răspuns vor fi însoţite de o carte poştală timbrată legal.

7. Orice sumă destinată revistei se poate trimite prin CEC sub contul n-rul 85208 sau prin mandat poştal D-lui Prof. **Gh. Th. Gheorghiu** pe adresa de mai sus.

ANUL XXVIII — No 11. TIMISOARA, 1948 IANUARIE 15

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

Prețul abonamentului este 300 lei pentru particulari și 600 lei pentru instituții.
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. GH. TH. GHEORGHIU
Timișoara I, Str. Voltaire, No. 1.

ASUPRA UNGHIURILOR ASOCIATE ALE UNUI TRIUNGHIU

DE

V. ALACI

1. Considerăm un triunghiu oarecare ABC în care păstrăm notațiile obicinuite și construim apoi trei triunghiuri dreptunghice având respectiv catetele $a,\ b+c;\ b,\ c+a;\ c,\ a+b$.

Numim unghiuri asociate ale triunghiului ABC, *unghiurile* $\alpha,\ \beta,\ \gamma$, *ce se opun respectiv catetelor* $a,\ b,\ c$ *în cele trei triunghiuri dreptunghice construite*[1].

Evident că unghiurile $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ sunt pozitive, mai mici ca 45^0 și satisfac inegalitățile:

$$0<\alpha+\beta+\gamma<135^0. \tag{1}$$

Apoi, conform teoremei 1-a din *Trigonometria patratică*, p. 52, avem

$$sp\,\alpha=\frac{a}{2p},\qquad sp\,\beta=\frac{b}{2p},\qquad sp\,\gamma=\frac{c}{sp\,\gamma}$$

de unde rezultă cu ușurință

$$sp\,\alpha+sp\,\beta+sp\,\gamma=1 \tag{2}$$

2. *Ne propunem în cele ce urmează a găsi pentru suma unghiurilor asociate, limite mult mai restrânse ca acelea din inegalitățile* (1) Mai precis, ne propunem a afla extremele funcției de trei variabile

$$u=\alpha+\beta+\gamma, \tag{3}$$

care satisfac relația (2), adică

$$v=sp\,\alpha+sp\,\beta+sp\,\gamma-1=0. \tag{4}$$

Avem astfel de studiat maximul, sau minimul unei funcții de trei variabile, aceea din (3), cu o relație între ele, (4).

[1]) *V. Alaci:* Trigonometria patratică, p. 52.

Conform teoriei cunoscute[2]), valorile variabilelor care fac maximă, sau minimă funcția u sunt soluții ale sistemului,

$$\begin{cases} sp\,\alpha+sp\,\beta+sp\,\gamma-1=0\\ \dfrac{D(u,\ v)}{D(\alpha,\ \gamma)}=0\\ \dfrac{D(u,\ v)}{D(\beta,\ \gamma)}=0 \end{cases} \tag{5}$$

unde primii membrii ai relațiilor a 2-a și a 3-a, reprezintă determinanții funcționali ai funcțiilor u și v în raport cu α și γ, respectiv β și γ.

Să rezolvim sistemul (5), ținând seamă de rezultatul cunoscut, că derivata unei funcții $y=sp\,x$, când: $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ este;

$$y'=1-2\,sp\,x+2\,sp^2x,$$

Trig. patratică p. 26.

Prin urmare, dezvoltând primul determinant funcțional din (5), obținem

$$\frac{D(u,\ v)}{D(\alpha,\ \gamma)}=\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 1-2sp\alpha+2sp^2\alpha & 1-2sp\gamma+2\,sp^2\gamma \end{vmatrix}=0,$$

sau

$$sp\,\alpha-sp\,\gamma-(sp^2\alpha-sp^2\,\gamma)=0,$$

ecuație echivalentă cu următoarele două:

$$sp\,\alpha-sp\,\gamma=0, \tag{6}$$

$$sp\,\alpha+sp\,\gamma=1. \tag{7}$$

Procedând analog cu ultima ecuație din (5), găsim încă:

$$sp\,\beta-sp\,\gamma=0, \tag{6'}$$

$$sp\,\beta+sp\,\gamma=1 \tag{7'}$$

Sistemul de ecuații (5) este astfel echivalent cu următoarele 4 sisteme:

$$\text{(I)}\ \begin{cases} sp\alpha+sp\beta+sp\gamma=1\\ sp\,\alpha=sp\,\gamma\\ sp\,\beta=sp\,\gamma \end{cases}\qquad \text{(II)}\ \begin{cases} sp\alpha+sp\beta+sp\gamma=1\\ sp\,\alpha=sp\,\gamma\\ sp\,\beta+sp\,\gamma=1 \end{cases}$$

[2]) *V. Alaci:* Analiza Infinitezimală, vol. I.

$$(III)\begin{cases} sp\alpha+sp\beta+sp\gamma=1 \\ sp\,\beta=sp\,\gamma \\ sp\,\alpha+sp\,\beta=1 \end{cases} \qquad (IV)\begin{cases} sp\,\alpha+sp\,\beta+sp\,\gamma=1 \\ sp\,\alpha+sp\,\gamma=1 \\ sp\,\beta+sp\,\gamma=1. \end{cases}$$

Rămâne să rezolvim pe rând aceste sisteme şi să precizăm care este minimul şi maximul funcţiei u.

1°. Din ultimele două ecuaţii ale sistemului (I), deducem

$$sp\,\alpha=sp\,\beta=sp\,\gamma$$

şi atunci, prima ecuaţie ne dă

$$sp\,\alpha=sp\,\beta=sp\,\gamma=\frac{1}{3}.$$

Aplicând logaritmii avem

$$\log sp\,\alpha=\operatorname{colog}3=\bar{1},\ 52228.$$

Căutând în tabela de logaritmi din *Trig patratică*, găsim

la $\bar{1}$, 52270 . . . 26°, 33′
„ $\bar{1}$, 52288 . . . x
„ $\bar{1}$, 52290 . . . 26°, 34′.

Rezultă că,

diferenţei de 20, corespunde 60″
„ „ 18, „ $x=\frac{18\times60''}{20}=54''$.

Prin urmare

$$\alpha=\beta=\gamma=26°,\ 33',\ 54''.$$

Deducem că avem

(8) $$u_m=79',\ 41,\ 42'',$$

valoare minimă, fiindcă luând alte valori vecine pentru α, β, γ cuprinse între 0° şi 45°, care să satisfacă relaţia (4), găsim pentru u valori mai mari ca aceea din (8), fapt verificat.

2°. Prima ecuaţie din sistemul (II), în virtutea celei de a 3-a ne dă,

$$sp\,\alpha=0,\quad \text{deci}\quad \alpha=\gamma=0°$$

şi atunci din prima ecuaţie urmează

$$sp\,\beta=1,\quad \text{deci}\quad \gamma=90°.$$

Acest sistem de relaţii face maxim pe u:

(9) $$u_M=90°,$$

fiindcă luând alte valori vecine pentru α, β, γ cuprinse între 0° şi 45°, care să satisfacă relaţia (4), găsim pentru u valori mai mici ca aceea din (9), ceeace am verificat.

Maximul dat de relaţia (9), nu poate fi însă atins, fiindcă nu putem avea

$$\beta=90°,\quad \alpha=\gamma=0°.$$

3°. Prima ecuaţie din sistemul (III), în virtutea celei de a 3-a, ne dă

$sp\,\beta=0$, deci $\beta=\gamma=0°$

şi atunci din prima ecuaţie rezultă

$$sp\,\alpha=1,\quad \text{deci}\quad \alpha=90°.$$

Continuând ca la punctul precedent, ajungem la aceeaşi concluzie, anume că, maximul lui u este 90°,

$$u_M=90°,$$

dar acest maxim nu poate fi atins, cum s'a arătat.

4°. Adunând ultimele două ecuaţii din sistemul (IV) şi ţinând seamă de prima ecuaţie, găsim

$$sp\,\gamma=1,\quad \text{deci}\quad \gamma=90°,$$

de unde rezultă apoi din ultimele două ecuaţii

$$\alpha=\beta=0.$$

Urmează concluzia ca la punctul 2° şi 3°, anume

$$u_M=90°,$$

maxim care nu poate fi atins, cum s'a arătat.

În definitiv, din expunerea făcută rezultă că funcţia u admite un minim egal cu 79°, 41′ 42″ pe care îl atinge şi un maxim egal cu 90° pe care nu-l atinge.

Am arătat astfel că suma unghiurilor asociate α, β, γ ale unui triunghiu A B C *satisfac dubla inegalitate*

$$(1')\qquad \boxed{79°,\ 41',\ 42''\leq\alpha+\beta+\gamma<90°}$$

limita din stânga având loc când triunghiul ABC *este echilateral.*

Astfel, în locul limitelor prea largi din (1) — *pentru suma $\alpha+\beta+\gamma$ — am găsit limitele mult mai restrânse din* (1′), *ceeace tocmai ne propusesem.*

Observare. O metodă foarte simplă pentru a construi unghiurile asociate α, β, γ ale unui triunghiu ABC, este următoarea: Se ia un $\sphericalangle AOB=45°$ şi $OB=2p$. Pe OB se ia un segment $OM=a$, iar în M se ridică o perpendiculară pe OB, care întâlneşte în N latura OA. Se uneşte N cu B şi $\sphericalangle NBO=\alpha$. La fel, pe aceiaşi figură, se obţin unghiurile asociate β şi γ.

SUR LES TRIANGLES HARMONIQUES

PAR

M. VINCENZO G. CAVALLARO

I.

1. — Dans le travail „Sur un tétraèdre autonormal singulier“ *(Giorn. di Matem. di Battaglini*, LXVI, 1928, Napoli), j'ai donné le tétraèdre K(ABC) ayant les propriétés principales suivantes: 1° *L'arête* K A *est normale en* A *au plan de la base* A B C. 2°. *L'angle* BAC=A=α *est la projection orthogonale, en égale grandeur, de l'angle* BKC. 3° *L'arête orthogonale* K A *est égale à l'arête* B C *opposée.* J'ai demontré le *Théorème: Pour l'existence d'un tétraèdre autonormal singulier il faut et il suffit que le triangle* A B C *de la face base soit tels que, dits* α, β, γ *ses angles, l'on ait:*

(1) $$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$$

(1′) ou $$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=2.$$

J'ai appelé *triangle harmonique* le triangle ABC (1) ou (1′) (loc. cit.). On voit facilement que le triangle harmonique est *obtusangle.* En effet, par les relations générales sur un triangle quelconque

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=2,$$

ou

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=1$$

on aura, en vertu de (1) ou (1′):

(2) $$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=-\tfrac{1}{2}<0.$$

D'un triangle quelconque d'aire Δ et côtés BC=α, CA=b, AB=c, soient: O et R le centre et le rayon du cercle circonscrit, r le rayon du cercle inscrit, ϱ_1 et ϱ_2 les rayons du premier et du second cercle de *Lemoine* Ω, Ω' et V les points et l'angle de *Brocard;* 2α et 2β les longueurs des axes de l'éllipse de *Brocard* de foyers Ω. Ω' et de centre ω; H l'orthocentre, G le baricentre, O_9 le centre du cercle des neuf points et R_9 le rayon (qui est égal à $\frac{R}{2}$). J'ai donné (loc cit) la formule générale

(a) $$\varrho_2=R\,.\tan V$$

et *pour le triangle harmonique* les relations suivantes:

(.1) $$\Delta=R\varrho_2$$

(.2) $$4R^2=a^2+b^2+c^2$$

(.3) $$\Delta=R^2\tan V$$

(.4) $$2\tan V=\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma$$

(.5) $$\tan V=2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

(.6) $$\tan V=-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$$

(.7) $$\operatorname{cosec}^2 V-3=\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2+\left(\frac{c}{b}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2+\left(\frac{a}{c}\right)^2$$

(.8) $$\operatorname{cotg}^2 V=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right).$$

2. Des relations (a). (.4). (.5), (6) il vient facilement *pour un tr. harmonique,*

$$\varrho_2=2R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \qquad \varrho_2=-R\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma,$$

$$\varrho_2=\frac{R}{2}(\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma),\quad \varrho_2=-\frac{R}{2}\sin 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma$$

qu'on peuvent aussi démontrer en vertu de (2) et de la relation générale

$$\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Or, par la formule générale

(b) $$(2\varrho_1)^2=R^2+\varrho_2^2,$$

(que j'ai indiquée dans le même *journal de Battaglini*, 1927) en remplaçant à ϱ_2 l'expression (3), on a, en vertu de (1). (2),

(4) $$8\varrho_1^2=R\,(\sin^2 2\alpha+\sin^2 2\beta+\sin^2 2\gamma).$$

Remarque. Puisque dans un triangle quelconque on a

$$\sin^2 2\alpha+\sin^2 2\beta+\sin^2 2\gamma+2\cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma=2,$$

il vient, *pour un tr. harmonique*

(5) $$4\varrho_1^2=R^2(1-\cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma)$$

et, à cause de (b):

(6) $$\varrho_2=R\sqrt{-\cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma}.$$

3. — La formule génerale

$$2\Delta=(a+b+c)r=2Rr(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$$

donne, en vertu de (1), pour un tr. harmonique

(7) $$\varrho_2=r(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma).$$

4. Comme, en générale

(c), (8) $$\sigma^2=\varrho_1^2-\varrho_2^2,$$

on peut donner la formule de σ, pour un tr. harmonique, en remplaçant à ϱ_1 et ϱ_2 les expression (3), (5), respectivement.

II.

5. *Aire du triangle orthique.* Soient AA_0, BB_0, CC_0 les hauteurs d'un triangle quelconque. C'est:

$$B_0C_0 = a_0 = \pm a\cos\alpha = \pm R\sin 2\alpha$$
$$C_0A_0 = b_0 = b\cos\beta = R\sin 2\beta$$
$$A_0B_0 = c_0 = c\cos\gamma = R\sin 2\gamma.$$

Le triangle orthique d'aire Δ_0 est inscrit dans le cercle des neuf points, donc

$$(d)\qquad \Delta_0 = \frac{a_0 b_0 c_0}{4R_9} = \pm\frac{a\,b\,c\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{2R} = \pm 2\Delta\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

Comme, en général,

$2\Delta = R^2(\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma)=4R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

on aura, en général,

$$(e)\qquad 2\Delta_0 = \pm R^2\sin 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma.$$

Si le triangle est harmonique, on aura, en vertu de (2) et (d), ou en vertu de (.1), (3), (e):

$$(9)\qquad \Delta_0 = \Delta.$$

6. — Les points O, G, O_9, sont sur la droite d'*Euler* et l'on a $OO_9 = O_9H$, $OH = 3\,OG$.

Si P est un point quelconque du plan du triangle quelconque ABC, et x, y, z sont les distances de P aux sommets A, B, C du triangle, on sait que

$$\overline{GP}^2 = \tfrac{1}{3}(x^2+y^2+z^2) - \tfrac{1}{9}(a^2+b^2+c^2).$$

Donc

$$\overline{OG}^2 = R^2 - \tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2);\quad OH^2 = 9R^2 - (a^2+b^2+c^2).$$

La puissance $p(H)$ de l'orthocentre par rapport au cercle O(R) est

$$(f)\qquad p(H) = \pm(R^2 - OH^2) = \pm\{a^2+b^2+c^2) - 8R^2\},$$

où le signe négatif vaut pour un triangle obtusangle. (Le signe négatif hors de la paranthèse).

L'aire Δ_P du triangle podaire orthogonal de P est donnée par la formule connue

$$(g)\qquad \Delta_P = \Delta\frac{p(P)}{4R^2},$$

où $p(P)$ est la puissance de P par rapport à O(R). Si $P \equiv H$, il résulte, en vertu de la (f),

$$(h)\qquad \Delta_0 = \pm\Delta\left\{\frac{a^2+b^2+c^2}{4R^2} - 2\right\} = \pm\Delta\{(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma) - 2\}$$

et, *si le triangle est harmonique*, il vient des relations (h), (1)

$$(9)\qquad \Delta_0 = \Delta$$

et par (f) et (.2)

$$(10)\qquad p(H) = 4R^2.$$

III.

7. — *Circoncercle orthogonal au cercle des neuf points.* Par l'antique formule (n. 6)

$$(i)\qquad \overline{OH}^2 = 9R^2 - (a^2+b^2+c^2) = R^2\{9 - 4(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)\}$$

il vient immédiatement, *pour un tr. harmonique*, en vertu de (1) ou (.2);

$$(11)\qquad \overline{OH}^2 = 5R^2;\quad (OO_9)^2 = \frac{5R^2}{4};\quad \overline{OG}^2 = \frac{5R^2}{9}.$$

Or, puisque $R = 2R_9$, nous avons

$$(12)\qquad R^2 + R_9^2 = (O\,O_9)^2$$

ce qui prouve que *le circoncercle* O(R) *du triangle harmonique est orthogonal au cercle des neuf points correspondant.*

Inversement, si a lieu la (12), c'est-à-dire si les deux cercles sont orthogonaux, on aura, étant $R = 2R_9$, $(O\,O_9)^2 = \frac{5R^2}{4}$, $\overline{OH}^2 = 5R^2$ et, à cause de (i). $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma = 1$.

Remarque. *Comme on voit, est très facile de trouver le triangle* (1) *par la consideration des deux cercles orthogonaux, tandisque sa liaison au tétraèdre autonormal singulier est profonde. misterieuse!*

Remarque. C'est pour la facile consideration des deux dits cercles orthogonaux que M. *R. Müller*, en 1905, se rencontré avec ce triangle (1). (Voir *Note finale*).

8. La relation (11) $OG = \frac{1}{3}R\sqrt{5}$, pour un tr. harmonique, donne la suivante construction de ce triangle: Avec l'hypothénuse $EO = R$ on construit le triangle rectangle EGO ayant le cathète $EG = \frac{2}{3}R$ et, par suite $OG = \frac{R\sqrt{5}}{3}$ On trace la circonférence O(R) et l'on considère un point A sur elle. On joint A avec G et on prolonge AG de $GP = \frac{1}{2}AG$. On joint O avec P et du point P on tire la perpendiculaire à OP. Cette perpendiculaire rencontre en B, C la circonférence et l'on a le tr. harmonique ABC.

IV.

9. *Triangle tangentiel.* Je déclare d'abord le suivant théorème de *Pilatte* „Si deux triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, d'aires Δ_1, Δ_2 ont leurs côtés parallèles

et sont l'un inscrit et l'autre circonscrit à un même triangle A B C d'aire Δ, l'aire de ce dernier est moyenne proportionnelle entre les aires des deux autres : $\Delta^2 = \Delta_1 . \Delta_2$".

(*Annales de Gergonne*, 1811, p. 93, Voir *V. Thébault. Enseign. Mathem.*, 1939, p. 287). Or, on sait, que dans tout triangle, le triangle tangentiel XYZ, d'aire T, circonscrit au tr. ABC, d'aire Δ, a les côtés respectivement parallèles aux côtés du triangle orthique $A_0B_0C_0$, d'aire Δ_0, inscrit en A B C.

Donc (j)

$$\Delta^2 = \Delta_0 . T.$$

Si le triangle ABC est harmonique, on a (n. 5) $\Delta_0 = \Delta$ et, par suite, en vertu de (j), on a pour les aires

$$\Delta = \Delta_0 = T \tag{13}$$

et pour la forme, étant $\equiv$ un signe d'équivalence :

$$A B C \equiv A_0 B_0 C = X Y Z. \tag{13'}$$

10. — On voit immédiatement que dans un tr. quelconque A B C, le triangle podaire orth. de l'orthocentre H par rapport au triangle orthique $A_0B_0C_0$, a les côtés respectivement parallèles aux côtés du triangle A B C. Si ABC est obtusangle, ce triangle podaire $\xi\eta\zeta$, semblable au tr. A B C, est inscrit dans l'excercle, de rayon λ_a, correspondant au tr. orthique $A_0B_0C_0$ par rapport au côté $B_0C_0 = a_0$, tandisque $A_0 B_0 C_0$ est, par rapport au tr. $\xi\eta\zeta$, le triangle tangentiel. *Si* A B C *est harmonique*, son semblable $\xi\eta\zeta$ est aussi harmonique, et puisque $A_0 B_0 C_0$ est son tr. tangentiel, il résulte, par la (13') $\xi\eta\zeta \equiv A_0 B_0 C_0$ et par suite

$$A B C = \xi\eta\zeta \equiv A_0 B_0 C_0 = X Y Z. \tag{14}$$

$$\lambda_a = R \tag{15}$$

V.

11. Soit V_0 l'angle de *Brocard* du tr. orthique $A_0 B_0 C_0$ d'un tr. quelconque A B C. C'est

$$\operatorname{tang} V = \frac{4\Delta}{a^2+b^2+c^2}\ ;\ \operatorname{tang} V_0 = \frac{4\Delta_0}{a_0^2+b_0^2+c_0^2}$$

d'où (ss. II. n. 5)

$$\frac{\operatorname{tang} V}{\operatorname{tang} V_0} = \frac{\Delta(\sin^2 2\alpha+\sin^2 2\beta+\sin^2 2\gamma)}{4\Delta_0(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)} \tag{l}$$

et, par les relations du n. 5 qui donnent Δ et Δ_2 :

$$\frac{\operatorname{tang} V}{\operatorname{tang} V_0} =$$

$$\frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma(\sin^2 2\alpha+\sin^2 2\beta+\sin^2 2\gamma)}{\pm\sin 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)}. \tag{l'}$$

Si le tr. ABC est harmonique, on a, en vertu des relat. (1), (9) ou (1), (2):

$$\frac{\operatorname{tang} V}{\operatorname{taug} V_0} = \frac{\sin^2 2\alpha+\sin^2 2\beta+\sin^2 2\gamma}{4}. \tag{16}$$

Ayant généralement (n. 11 et n. 5)

$$\operatorname{tang} V_0 =$$

$$\frac{4\Delta_0}{a_0^2+b_0^2+c_0^2} = \frac{\pm 2R^2\sin 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma}{R^2(\sin^2 2\alpha+\sin^2 2\beta+\sin^2 2\gamma)} \tag{m}$$

il vient, *pour un tr. harmonique*, en vertu de la rel. (4) et puisque par les (.1), (9) est $4\Delta_0 = 4\Delta = 4R\varrho_2$:

$$\operatorname{tang} V_0 = \frac{R\varrho_2}{2\varrho_1^2}. \tag{17}$$

Or du tr. rectangle $\{R, 2\varrho_1, \varrho_2\}$, consideré dans 2, form. (b), puisque l'angle opposé au cathète ϱ_2 est égal à V, on a généralement

$$R = 2\varrho_1\cos V\ ;\quad \varrho_2 = 2\varrho_1\sin V$$

e par suite, en vertu de (17). on a, pour le tr. harmonique,

$$\operatorname{tang} V_0 = \sin 2V. \tag{18}$$

Remarque. On a (*G. Cavallaro, Boll. l'École Polyth. de Timişoara*, 1941, n. 1 — 2; *Mathesis* 1938; etc) la formule générale

$$\Omega\Omega' = \frac{R\varrho_2\sigma}{\varrho_1^2} \quad \text{et} \quad \frac{\Omega\Omega'}{2\sigma} = \frac{R\varrho_2}{2\varrho_1^2}. \tag{n}$$

Comme $\dfrac{\Omega\Omega'}{2\sigma} = \sin 2V$, on peut deduire autrement la (18) par la (17).

12. Ayant (*Bollet. cité*)

$$\sin 2V = \frac{\Omega\Omega'}{2\sigma} = \frac{\alpha}{\varrho_1} = \frac{\beta}{\varrho_2} = \frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\sigma} = \dots$$

on a, pour le tr. harmonique,

$$\operatorname{tang} V_0 = \frac{\Omega\Omega'}{2\sigma} = \frac{\alpha}{\varrho_1} = \frac{\beta}{\varrho_2} = \frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\sigma} = \dots \tag{19}$$

13. — Soient σ, ϱ_{01}, ϱ_{02} les rayons du cercle

de *Brocard*, du premier et du second cercle de *Lemoine* correspondants au tr. harmonique. Par les formules générales (*loc. cit.*)

$$\sigma = \frac{R}{2}\sqrt{1 - 3\operatorname{tang}^2 V}\,; \quad \varrho_1 = \frac{R}{2}\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 V}\,;$$

$$\varrho_2 = R \operatorname{tang} V$$

on a, en vertu de la (19). puisque $R = 2R_9$,

$$\text{(20)} \qquad \sigma_0 = \frac{R}{4}\sqrt{1 - 3\frac{a^2}{\varrho_1^2}}\,; \quad \varrho_{01} = \frac{R}{4}\sqrt{1 + \frac{a^2}{\varrho_1^2}}\,;$$

$$\varrho_{02} = \frac{R}{2}\frac{a}{\varrho_1}.$$

Comme on a généralement (*l. cité*)

$$R = \frac{2a^2}{\beta}$$

et on peut exprimer ϱ_1, ϱ_2 en fonction de (α, β), ainsi on peuvent exprimer tang. V_0, ϱ_0, ϱ_{02}, σ_0 en fonction de (α, β). Puis les éléments du tr. orthique peuvent être exprimer facilement en fonction des éléments du tr. harmonique correspondant: en fonction de (α, β); $(\varrho_1\ \varrho_2)$; (R, α); $(R, O_9\ \omega)$; etc. (Voir *Notes citées* au n. 11). Par exemple, par la formule gen. (n) on a pour le tr. orthique du tr. harmonique

$$\text{(21)} \qquad \Omega_0\Omega_0' = \frac{R_9\,\sigma_0\,\sigma_{02}}{\varrho_{01}^2} = F(\alpha, \beta) = \cdot\ \cdot$$

Nous avons ainsi une source de formules.

14. — Soit Δ_9 l'aire du tr. podaire orth. du centre de gravité G d'un tr. quelconque. C'est (*V. G. Cav.* Boll. di Matem. 1942. Genova)

$$\text{(p)} \qquad \frac{\Delta^2}{\Delta_9} = 9R\varrho_2.$$

Si le tr. est harmonique, est, (.1) et (9), $\Delta = R\varrho_2$ et en vertu de (p)

$$\text{(22)} \qquad \Delta = 9\Delta_9$$

Comme généralement (*Boll. cité de Timişoara*)

$$\text{(q)} \qquad R = \frac{2a^2}{\beta}, \quad \varrho_2 = \frac{2a^2}{\sqrt{4a^2 - \beta^2}} = \cdots$$

on a pour le tr. harmonique ou $\Delta = R\varrho_2$,

$$\text{(23)} \qquad \Delta = \frac{4a^4}{\beta\sqrt{4a^2 - \beta^2}} = \cdots$$

Si K est le point de *Lemoine* d'un tr quelconque, l'aire Σ du tr associé au quadrangle complet (A B C K) est donnée par la formule (*V. G. Cav. Boll. l'Éc. Polyt. Timişoara* 1940, n. 3—4)

$$\text{(r)} \qquad \Sigma = 3\Delta\varrho_2^2.$$

Si le tr. est harmonique, on a $\Delta = R\varrho_2$, et, en vertu de (9).

$$\text{(24)} \qquad \Sigma = 3R\varrho_2^3 = \frac{48a^8}{\beta\sqrt{4a^2 - \beta^2)^3}} = \cdots$$

15. *Note bibliographique.* J'ai reçu (3. VI. 1948) une Note de M. le prof. *L. Toscano* „Sui triangoli armonici". (*Anais de Ciencias do Porto*, 1943), Par cette Note je sais que M. *R. Müller* a publié la Note „Uber die Dreickederen Umkreis den Kreis der 9 Punkte orthogonal schneidet" (*Zeitschrift für Mathematischen Naturwissenschaftlichen unterricht* Vol. 36, 1905), et que même note est resumée par J. N. en *Mathesis*, 1906 „Sur les triangles dont le cercle circonscrit et le cercle des neuf points se coupent orthogonalement". Si γ est l'angle obtuse du tr harmonique, M. *Toscnno* indique la limitation (de *Müller*) $128^0, 10', 38'' < \gamma < 135^0$. Pour l'angle de *Brocard* M. *Toscano* donne $V < 17^0\ 37'\ 55'', 12$ La construction du N 8 et les relations (4), (9), (10), (11), (12), (13), (14), (15), (18) sont considerées dans la Note de M. *Toscano. Je n'ai donné une demontration la plus naturelle et complétetement différent.* La relation (9) $\Delta = \Delta_0$ était dans une note que j'avais envoyér en 1942 a M. *Nannei* à Genova (pour le *Boll de Matem*) et détruite par le bombardement! Les relations (13) $\Delta = \Delta_0 = T$ je l'ai envoyée a M. *Nannei* en Janvier du 1948. (*V. G. Cav.*).

NOTE MATEMATICE

19. — *Asupra unei clase de identităţi algebrice*

Vom arăta în rândurile de mai jos un mod simplu de a stabili o clasă remarcabilă de identităţi algebrice.

Să considerăm fracţia:

$$\text{(1)} \qquad A = \frac{f(a, b, c)}{(a-b)(a-c)}$$

unde $f(a, b, c)$ e o funcţie de a, b şi c.

Fracţia (1) se mai poate scrie:

$$A = \frac{f(a,b,c)\times(c-b)}{(a-b)(a-c)(c-b)} = \frac{f(a,b,c)\times(c-b)}{\Delta_3}$$

Δ_3 fiind determinantul *Wandermonde* al cantităţilor a, b, c. În mod absolut analog, deducem prin permutări circulare

$$B = \frac{f(b,c,a)\times(a-c)}{\Delta_3}, \quad C = \frac{f(c,a,b)\times(b-a)}{\Delta_3}.$$

Deci:

$$A+B+C=\frac{f(a,b,c)\times(c-b)+f(b,c,a)\times(a-c)+f(c,a,b)(b-a)}{\Delta_3}$$

Dar se observă că numărătorul e tocmai, desvoltarea după minorii primei linii, a determinantului:

$$D_3=\begin{vmatrix} f(a,b,c) & f(b,c,a) & f(c,a,b) \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix}.$$

Deci:

$$\Sigma A=\frac{D_3}{\Delta_3}.$$

Chestiunea tratată e susceptibilă de generalizare.

Fracția (1) am numit-o fracție generatoare. Pentru diferite cazuri particulare ale lui $f(a,b,c)$ obținem cunoscutele identități fracționare frecvente în orice manual didactic

ILIE N. CONSTANTINESCU

---

20. — *Asupra tangentelor la cercurile cari au ca diametre laturile unui triunghiu oarecare.* — Notăm cu T_a, T_b, T_c, respectiv, lungimea tangentei cuprinsă între punctele de contact, la cercurile descrise pe laturile AB și AC, etc În cele ce urmează, îmi propun, să găsesc ce relații există între aceste tangente și elementele principale și secundare ale triunghiului dat. Notațiile întrebuințate sunt cele obicinuite.

Fie D și E mijloacele laturilor AB și AC. Facem o mișcare de translație cu tangenta $T_a(TT')$ în așa fel ca punctul de contact T′ să ajungă în D și prelungim raza ET până se intersectează cu dreapta de translație Fie F acest punct de intersecție. S'a format astfel triunghiul DFF, dreptunghic în F. Se observă că avem:

$$\overline{EF}=\overline{TF}-\overline{TE}=\overline{T'D}-\overline{EA}=\frac{c}{2}-\frac{b}{2}=\frac{c-b}{2}$$

$$\overline{CB}=2\overline{ED},\ \overline{FD}=T_a.$$

În triunghiul dreptunghic DEF, avem:

$$T_a^2=\overline{ED}^2-\overline{EF}^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{c-b}{2}\right)^2=$$

$$\frac{a^2-(c-b)^2}{4}=\frac{(a+c-b)(a-c+b)}{4}=(p-b)(p-c).$$

Identic se obțin și lungimile celorlalte tangente.

Se găsește:

$$(1.1)\qquad T_a=\sqrt{(p-b)(p-c)},\quad T_b=\sqrt{(p-a)(p-c)},\quad T_c=\sqrt{(p-a)(p-b)}$$

$$(1.2)\qquad T_a^2+T_b^2+T_c^2=r(4R+r)=r(r_a+r_b+r_c)=rp\,\Sigma\,\mathrm{tg}\frac{A}{2}.$$

fiindcă:

$$T_a^2=p^2-p(b+c)+bc,$$

$$\Sigma T_a^2=3p^2-p(2a+2b+2c)+ab+bc+ca=$$

$$3p^2-4p^2+ab+bc+ca=-p^2+ab+bc+ca,$$

dar $\Sigma ab=p^2+r^2+4Rr$ (R. M T. XV p. 30)

deci: $\Sigma T_a^2=-p^2+p^2+r^2+4Rr=r(4R+r)$

Insă: $r_a+r_b+r_c=4R+r$ și $r_a=p\,\mathrm{tg}\frac{A}{2}$. (Formule cunoscute).

$$(1.3)\qquad T_aT_bT_c=sr=\frac{1}{2}bcr\sin A=\frac{1}{2}abr\sin C=\frac{1}{2}aCr\sin B.$$

Inmulțind relațiile dela 1.1, avem:

$$T_aT_bT_c=\sqrt{(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2}=(p-a)p-b)(p-c).$$

Ținând seamă de relația $s^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$, avem: $T_aT_bT_c=\frac{s^2}{p}$. Dar avem cunoscute relațiile

$$s=pr,\ R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{abc}{4s}.$$

Deci $T_aT_bT_c=sr=\frac{abcr}{4R}=\frac{abcr}{4\frac{a}{2\sin A}}=\frac{1}{2}bcr\sin A.$

etc.

$$(1.4)\qquad T_a=\sqrt{c(p-b)(p-c)}=\frac{s}{\sqrt{p(p-a)}}=r\sqrt{\frac{p}{p-a}}=\frac{bc\sin A}{2\sqrt{p(p-a)}}\ \text{etc.}$$

Ținând seamă de relațiile cunoscute:

$$s^2=p(p-a)(p-b)(p-c),\quad s=\frac{abc}{4R},$$

$$s=pr,\quad s=\frac{1}{2}bc\sin A,(p-b)(p-c)=rr_a,$$

avem succesiv:

$$T_a = \sqrt{(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} =$$

$$\frac{s}{\sqrt{p(p-a)}} = \frac{pr}{\sqrt{p(p-a)}} = r\sqrt{\frac{p^2}{p(p-a)}} =$$

$$r\sqrt{\frac{p}{p-a}} = \frac{\frac{abc}{4R}}{\sqrt{p(p-a)}} = \frac{abc}{4R\sqrt{p(p-a)}} =$$

$$\frac{bc\sin A}{2\sqrt{p(p-a)}} \cdot \text{ etc.}$$

Simplu, se mai pot stabili şi următoarele relaţii:

$$(1.5) \qquad T_a^2 T_b^2 + T_b^2 T_c^2 + T_c^2 T_a^2 = s^2$$

$$(1.6) \qquad \frac{1}{T_a^2} + \frac{1}{T_b^2} + \frac{1}{T_c^2} = \frac{1}{r^2}.$$

Aceste două relaţii din urmă sunt stabilite în Gazeta Matematică, vol. XLIII pag 164 ex. 11.

Observare. Nota prezentă nu este decât o extindere a problemei 4757 din Gazeta Matematică, unde se consideră un triunghiu dreptunghic.

La fel se pot obţine şi alte identităţi.

IONEL I. STAMATE

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul LIV, No. 4, Decembrie 1948. Asupra unor cuartice remarcabile, de *Şerban Gheorghiu*. Clasa identităţilor *Euler-Ioachimescu*, de *M. Adam*. Raport pentru acordarea premiului de „Istoria Matematicei", pe 1948, de *G. G. Constantinescu*, şi *V. Marian*. Concursul G. M. pe 1949. Note matematice. Probleme rezolvate şi propuse.

2. *Annales Scientifiques de l'Université de Jassy*, (T. XXX. 1944—1947). Sur la Géométrie des familles de transformations punctuelles simplement transitives, par *M. Haimovici*, Remarque sur la décomposition en homologies harmoniques d'une collinéation Hermitienne, par O. *Mayer*. Sur un nouveau cas intégrable de mouvement d'un corp solide autour d'un point fixe, par *Victor Nadolschi*. Surfaces dont les courbes des familles remarquables sont semblables, par *Gh. Gheorghiev*. Sur une représentation plane des surfaces, par *F. Marcus*. La discrimination des podaires des courbes planes selon leurs propriétés géométriques, par *A. Myller*. Expressions nouvelles pour la longueur des courbes et pour l'aire des surfaces formées, par *Ilie Popa*. Recherches sur le frottement du style dans les séismographes à enregistrement mécanique, par M-me *Florica Câmpianu*. Sur certaines inégalités entre les zèros, supposés tous réels, d'un polynome et ceux de sa dérivée, par *Tiberiu Popoviciu*. Sur la composition du groupe de collinéations d'une quadrique non-dégénéréé dans un espace projectif complexe, par *O. Mayer*.

3. *Letterio Toscano*. Una proprietà della Concoide de *Nicodeme*. (Anais da Faculdade de Ciencias do Porto, t. XXVI, 1941).

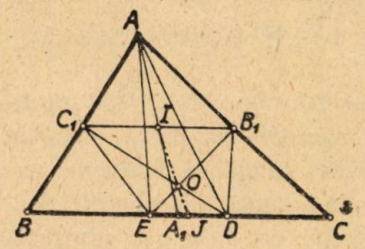
4. *Letterio Toscano*. Sui triangoli armonici (Anais da Faculdade de Ciencias do Porto, t. XXVIII, 1943).

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1877. — *Se consideră pe latura* BC *a triunghiului* ABC *segmentele* CE=AE şi BD=AD *şi fie* A_1 *mijlocul laturei* BC *Să se arate că centrul cercului circumscris triunghiului* ABC *şi mijloacele segmentelor* DE *şi* AA_1 *sunt trei puncte colineare.*

MARIA NEUMANN

Soluţia. Fie B_1 şi C_1 respectiv mijloacele laturilor AC şi AB. Cum CE = AE triunghiul AEC este isoscel şi deci dreapta EB_1 este mediană şi mediatoare. Analog DC_1. De aci rezultă că centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC este la intersecţia dreptelor B_1E şi C_1D. Pe de altă parte, dreapta AA_1 va fi tăiată de B_1C_1 în două părţi egale, adică mijlocul I al lui AA_1 va fi pe B_1C_1. Mai mult, I este la mijlocul lui B_1C_1 deoarece



$$\frac{IB_1}{IC_1} = \frac{A_1C}{A_1B} = 1.$$

Proprietatea din enunţul problemei s'a redus deci la a demonstra că în trapezul B_1C_1ED dreapta IJ care uneşte mijloacele laturilor paralele trece prin punctul O de intersecţie al diagonalelor C_1D, B_1E. Această proprietate este cunoscută Problema este deci rezolvată.

Au dat soluţii geometrice D-nii: *David Vasile, Deutsch Em., Gligor N. Ion, Purcea M. Ion şi Tilică Ştefan.*

Au dat soluţii analitice D-ra *Mang Ileana* şi D-nii: *Bakonyi C., Gherlan Vas., Lupescu Cor., Radoslav G. I. şi Văduva F. Marin.*

Gh. Th. Gh.

Problema 2484*. — *Să se arate că*

$$\arcsin\frac{1-x^3}{2ix\sqrt{x}}-\arccos\frac{1+x}{2\sqrt{x}}-\arcsin\frac{1-x}{2i\sqrt{x}}=\arccos\frac{1+x^3}{2x\sqrt{x}}\cdot$$

știind că $i=\sqrt{-1}$.

MIHAI GIURCONIU

Soluție dată de d-nul *Teodorescu P. Petre* (Bucureşti). Facem următoarele notații:

$$u=\arcsin\frac{1-x^3}{2ix\sqrt{x}}-\arcsin\frac{1-x}{2i\sqrt{x}};$$

$$v=\arccos\frac{1+x^3}{2x\sqrt{x}}+\arccos\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\cdot$$

Folosind formulele de mai jos: (vezi *M. Ghermănescu*, „Trigonometrie plană şi sferică" p 117).

$$\arcsin a\pm\arcsin b=\arcsin\left(a\sqrt{1-b^2}\pm b\sqrt{1-a^2}\right)$$

$$\arccos a\pm\arccos b=\arccos\left(ab\mp\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\right)$$

vom avea după efectuarea calculelor:

$$u=\arcsin\frac{1-x^2}{2ix}=\arccos\sqrt{1+\frac{(1-x^2)^2}{4x^2}}=\arccos\frac{1+x^2}{2x}\cdot$$

$$v=\arccos\frac{(1+x^3)(1+x)-(1-x^3)(1-x)}{4x^2}=\arccos\frac{1+x^2}{2x}\cdot$$

De unde rezultă $u=v$.

A mai rezolvat problema d-nul *Novac I. Ion* (P. T.).

Gh. Silaş

Problema 2532. — *În triunghiul* A B C *se notează cu* M *mijlocul laturei* B C, *cu* A′ *şi* A_1 *picioarele bisectoarei* A A′ *şi a înălțimei* AA_1 *şi cu* A_2 *punctul de tangență al laturei* B C *cu cercul înscris* I. *Să se demonstreze că*

$$\overline{MA'}\cdot\overline{MA_1}=\overline{MA_2}^2.$$

G-L GH. BUICLIU

Soluție. Într'un triunghiu în care $c<b$ avem:

(1) $$\overline{MA_1}=\frac{b^2-c^2}{2a}$$ (*Geometrie plană* O. N, Țino p. 206)

(2) $$\overline{MA'}=\overline{CA'}-\overline{CM}=\frac{ab}{b+c}-\frac{a}{2}=\frac{a(b-c)}{2(b+c)}$$

(3) $$\overline{MA_2}=\overline{CA_2}-\overline{CM}=(p-c)-\frac{a}{2}=\frac{b-c}{2}\cdot$$

Din relațiile (1), (2) şi (3) se deduce imediat relația din enunț.

S'au primit soluții bune de la D-nii: *Bâlă V. Const.* (Cordeşti-Gorj), *Deutsch Emeric* (P. T.), *Cioară Alex.* (P. T.), *Gherlan I. Vasile* (P. T.), *Iovănel Chiriac, Neguț A. Ionel* (Lic. Tg.-Jiu), *Novac I. Ioan* (P. T.), *Râmboiu N. Septimiu* (Cluj), *Simeon Livia* (P. T.), *Teodorescu P. Petre* (Liceul „M. Basarab", Bucureşti).

Relații analoage există şi pentru bisectoarea exterioară şi cercurile circumscrise.

G-l Gh. B.

Problema 2538. — *Să se studieze variațiunea funcției*

$$y=x-\mathrm{L}\frac{x(x+1)}{2x-1},$$

şi să se reprezinte grafic.

E. ARGHIRIADE

Soluție. Din condiția necesară:

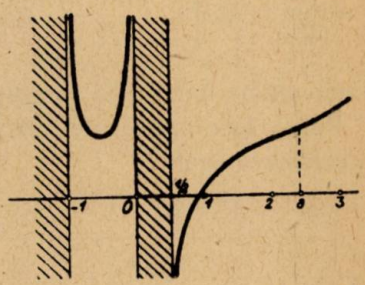
$$\frac{x(x+1)}{2x-1}>0$$

rezultă intervalul de existență al funcției

$$-1<x<0$$

şi

$$x>\frac{1}{2}\cdot$$



Pentru a uşura calculul derivatei, scriem funcția sub forma

$$y=x-\mathrm{L}x-\mathrm{L}(x+1)+\mathrm{L}(2x-1)$$

şi pentru derivată vom găsi

$$y'=\frac{2x^3-x^2+x+1}{x(x+1)(2x-1)}=\frac{(2x+1)(x^2-x+1)}{x(x+1)(2x-1)}\cdot$$

Calculând derivata a doua găsim

$$y''=\frac{4x^4-8x^3-6x^2-2x+1}{x^2(x+1)^2(2x-1)^2}\cdot$$

---

*) Enunț corectat.

Pentru a găsi numărul rădăcinilor reale ale numărătorului derivatei a doua, vom folosi teorema lui *Sturm*.

Polinoamele din şirul lui *Sturm* sunt:

$$P(x) = 4x^4 - 8x^3 - 6x^2 - 2x + 1$$
$$P_1(x) = 8x^3 - 12x^2 - 6x - 1$$
$$P_2(x) = 24x^2 + 12x - 3$$
$$P_3(x) = -x + 1$$
$$P_4 = -33$$

Semnele polinoamelor din şirul lui *Sturm* pentru $x = -\infty$ şi $x = +\infty$ sunt,

Pentru $-\infty$: $+ \; - \; + \; + \; -$

Pentru $+\infty$: $+ \; + \; + \; - \; -$.

Din variaţiile acestor semne, deducem că există două valori reale ale lui x care anulează numărătorul derivatei a doua.

Tot cu ajutorul teoremei lui *Sturm* foarte uşor aflăm că una din rădăcini se află în intervalul de neexistenţă $(0, \frac{1}{2})$, iar cealaltă pe care o notăm cu a este cuprinsă în intervalul (2, 3) şi pentru care curba va avea un punct de inflexiune

În variaţia funcţiei vom avea de calculat şi $y(+\infty)$, care este o nedeterminare.

$$y(+\infty) = \lim_{x\to\infty}\left[x - \mathrm{L}\frac{x(x+1)}{2x-1}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} x \cdot \lim_{x\to\infty}\left[1 - \frac{\mathrm{L}x}{x} - \frac{\mathrm{L}(x+1)}{x} + \frac{\mathrm{L}(2x-1)}{x}\right].$$

Cum ultima limită este 1, rezultă că $y(+\infty) = +\infty$.

Putem face tabloul de variaţie a funcţiei şi reprezentarea grafică:

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	a	3	$+\infty$
y'	$--$	0	$++$	‖	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
y''	$+$	$+$		‖	$-$	$-$	0	$+$	$+$
y	$\infty-$	$\searrow m$	$\nearrow +\infty$	‖	$-\infty$	$\nearrow$	$y(a)$	$\nearrow$	$+\infty$

Minimul m al funcţiei este:

$$m = y\left(-\tfrac{1}{2}\right) = -\tfrac{1}{2} + \mathrm{L}\,8.$$

Vom avea:

$$y(2) < y(a) < y(3) \text{ sau}$$
$$2 - \mathrm{L}\,2 < y(a) < 3 - \mathrm{L}\tfrac{12}{5}.$$

Deoarece $y(1) = 1 - \mathrm{L}\,2 > 0$. curbă taie axa Ox în intervalul $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Au rezolvat bine d-nul *Coţiu Aurel* (student, Cluj). Soluţii parţiale s'au primit dela d-nii: *Bogoevici I.* (elev, Caransebeş). *Cioară Alex.* (P. T.), *Crăciun Silvia* (P.. T), *Gherlan Vasile* (P. T.), *Novac Ioan* (P. T.), *Teodorescu Petre* (elev, Bucureşti).

Gh. Silaş

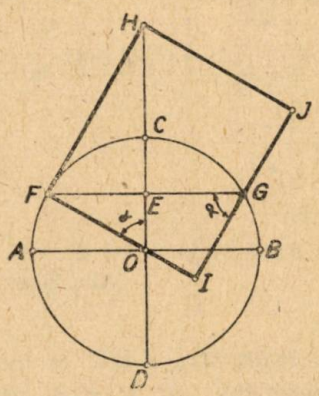
Problema 2552. — *Se dă un cerc* O, AB *şi* CD *respectiv un diametru orizontal şi vertical,* E *mijlocul lui* OC, FG, *coarda dusă prin* E *paralel cu* AB. *Tangenta la cerc în* F *întâlneşte prelungirea diametrului vertical în* H. *Se duce raza* FO *prelungită; se duce în* H *perpendiculara* HJ *pe* FH; *se duce prin* G *perpendiculara comună pe* FO, HJ, *care intersectează în* I *pe* FO *prelungit, Se cere:*

1° *Să se cerceteze dacă figura* FHJI *este un patrat*

2° *Să se determine poziţia lui* E *pe* OC *astfel încât figura* FHJI *să fie un patrat.*

VIRGIL GHITESCU

Soluţie geometrică. Prin construcţie patrulaterul FIJH este un dreptunghiu. Ne propunem să-i găsim dimensiunile considerând pe E ca un punct oarecare luat pe OC. Triunghiurile dreptunghice FGI şi FEO sunt asemenea având unghiul din F comun. Din asemănarea lor scoatem



$$\frac{FI}{FG} = \frac{FE}{FO};$$

notând cu R=FO raza cercului şi ţinând seamă că FG=2 FE, relaţia precedentă dă

$$FI = \frac{2\overline{FE}^2}{R}.$$

Dar: $\overline{FH}^2 = OH \cdot EH$ încât pentru ca dreptunghiul FHJI să fie pătrat este necesar să avem

$$\frac{4\overline{FH}^4}{R^2} = OH \cdot EH.$$

Din triunghiurile dreptunghice formate pe figură scoatem succesiv

$$\overline{FE}^2 = R^2 - \overline{OE}^2$$

$$OH = \frac{R^2}{OE}, \quad EH = OH - OE = \frac{R^2 - \overline{OE}^2}{OE}$$

valori care introduse în relaţia precedentă ne conduc la egalitatea

$$(\overline{40E}^2 - 2R^2)^2 = 0$$

adică

$$OE = \frac{\sqrt{2}}{2}R.$$

Această egalitate precizează poziţia lui E pe OC pentru care dreptunghiul FIJH este pătrat, şi anume la o distanţă de centru egală cu jumătatea laturei pătratului înscris în cerc. Deci, în cazul când $OE = \frac{1}{2}R$, dreptunghiul considerat nu este pătrat.

Au dat soluţii asemănătoare D-nii: *Bogoevici A.* (Caransebeş), *Breazu M.* (Deva), *Cioară Gh. Alex.* (P. T.), *Deutsch Em.* (P. T.), *Gherlan I. Vas.* (P. T.), *Giurconiu M.* (P. T.), *Marinescu S. D.* (Ploeşti), *Mihăilescu Dinu* (Bucureşti) şi *Teodorescu P. P.* (Bucureşti).

Soluţie trigonometrică Punem $\sphericalangle EOF = \sphericalangle FGI = \alpha$ şi $OF = R$. Din triunghiurile dreptunghice formate pe figură, urmează:

$$OE = R\cos\alpha,\ GF = 2FE = 2R\sin\alpha,\ HF = R\operatorname{tg}\alpha,$$
$$IF = GF\sin\alpha = 2R\sin^2\alpha.$$

Dacă $OE = \frac{1}{2}R$, rezultă $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, adică $\alpha = 60^0$ (luăm numai prima determinare folosibilă pe figura definită de problemă) şi deci

$$HF = R\operatorname{tg}\alpha = R\sqrt{3},$$
$$IF = 2R\sin^2\alpha = \frac{3}{2}R$$

adică $HF \neq IF$ şi figura nu este un pătrat. Pentru a fi pătrat este necesar ca

$$R\operatorname{tg}\alpha = 2R\sin^2\alpha$$
$$\because\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$

de unde scoatem singura soluţie acceptabilă

$$\operatorname{tg}\alpha = 1;\ \alpha = 45^0.\ \text{Rezultă } OE = \frac{\sqrt{2}}{2}R.$$

Soluţii asemănătoare date de D-rele: *Alexa Mag.* (P. T.) şi *Raţiu M.* (P. T.) şi de D-nii: *Dodu A. Eug.* (Bucureşti), *Purcea M. I.* (Caracal) şi *Soare V. M.* (Caracal).

D-nii *Coţiu A.* (Cluj), *Deutsch Em.* (P. T.), *Găzdău M.*, *Novac I. I.* (P. T.), *Schächter E.* şi *Stănilă George* (Bucureşti) au dat soluţii analitice

Gh. Th. Gh.

Problema 2556. — *Să se afle derivata funcţiei*

$$y = \frac{x+1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

şi apoi să se studieze variaţia funcţiei

$$z = 4\sqrt{x}\,y',$$

y' fiind derivata lui y.

V. ALACI

Soluţie Derivata funcţiei y din enunţ, este

$$y' = \frac{\sqrt{x} - (x+1)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{2x\sqrt{x}}$$
$$= \frac{2x - x - 1}{2x\sqrt{x}} - \frac{3x}{4x(x+1)\sqrt{x}} = \frac{2x^2 - 3x - 2}{4x\sqrt{x}(x+1)}.$$

Având pe y' rezultă că expresia funcţiei z din enunţ este

$$(1)\qquad z = 4\sqrt{x}\cdot\frac{2x^2 - 3x + 2}{4x\sqrt{x}(x+1)} = \frac{2x^2 - 3x - 2}{x(x+1)}.$$

Trebuie deci să studiem variaţia funcţiei z din (1). Observăm întâiu că putem scrie

$$z = \frac{2(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x(x+1)}.$$

Rezultă acum că avem

$$z = 0,\ \text{pentru } x = -\tfrac{1}{2} \text{ şi } x = 2;$$

de asemeni $z = \infty$, pentru $x = -1$ şi $x = 0$

Mai rămâne să vedem dacă funcţia z are maxim, sau minim şi pentru ce valori. Pentru aceasta luăm derivata lui z, pe care apoi o vom anula, avem

$$z' = \frac{(4x-3)(x^2+x) - (2x^2-3x-2)(2x+1)}{x^2(x+1)^2}$$
$$= \frac{5x^2 + 4x + 2}{x^2(x+1)^2}.$$

Anulând pe z', adică luând

$$5x^2 + 4x + 2 = 0,$$

deducem

$$x = \frac{-2 \pm i\sqrt{6}}{5}$$

şi vedem că rădăcinele sunt imaginare, prin urmare funcţia z nu admite valori maxime şi minime.

Cu datele obţinute mai sus, putem construi acum

următorul tablou de variație:

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		2		$+\infty$
z'		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
z	2	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\to$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	0 $\nearrow$ 2

în virtutea căruia se poate ușor trasa curba reprezentativă.

Soluții date de d-șoara *Rațiu Maria* (P. T.) și de d-nii; *Bălă C-tin* (P. T.), *Bătăuță Mihai* (Deva), *Beu Dorin* (Lic. Cluj), *Bota Valentin* (P. T.), *Cioară Gh. Alexandru* (P.T.), *Cioca Ioan* (P. T.), *Coțiu Aurel* (Cluj), *Dodu Eugen* (Lic. Mihai Viteazul, București), *Erdélyi Ioan* (P. T), *Gherlan Vasile* (P. T.), *Ghiriș Ioan* (P. T.), *Giurconiu Mihai* (P. T.), *Gongu Theodor* (P. T.), *Hurezeanu Romulus* (Liceul Tg.-Jiu), *Lenz Friedrich* (Lic. Matei Basarab, București), *Man Octavian* (P. T.), *Neguț Ioan* (Tg.-Jiu), *Nemoianu C-tin* (P. T), *Novac Ioan* (P. T.), *Pantea Alexandru* (Lic. Beiuș), *Păunescu Gh.* (Lic. Matei Basarab, București), *Pisanca Ionel* (T.), *Purcea Ion* (Lic. Caracal), *De Sabata Ioan* (Lic. Beiuș), *Seracin Eugen* (P. T), *Simeon Liviu* (P. T.), *Soporean Emil* (P. T.), *Stănilă George* (student, București), *Székely George* (P. T.), *Tămășescu Virgil* (Lic. Tg.-Jiu), *Turbuțiu Gh.* (P. T.) și *Zbarcea Ioan* (P. T.). S'au primit și 8 soluții greșite.

Problema 2602. — *Să se stabilească identitatea*

$$(n-1)\operatorname{arc\,tg} i\,x + \operatorname{arc\,tg} i\,\frac{(1-x)^{n-1}-2(1+x)^{n-1}}{(1-x)^{n-1}+2(1+x)^{n-1}} = \frac{\log\sqrt{2}}{i},$$

unde $i=\sqrt{-1}$, *iar* n *întreg pozitiv.*

V. ALACI

Prima soluție. Ținând seamă de relația cunoscută

$$(1)\qquad \operatorname{arc\,tg}\alpha = \frac{1}{2i}\log\frac{1+i\alpha}{1-i\alpha}$$

și notând cu E și primul membru al identității cerute, putem scrie succesiv:

$$E = \frac{n-1}{2i}\log\frac{1-x}{1+x} + \frac{1}{2i}\log\frac{1-\dfrac{(1-x)^{n-1}-2(1+x)^{n-1}}{(1-x)^{n-1}+2(1+x)^{n-1}}}{1+\dfrac{(1-x)^{n-1}-2(1+x)^{n-1}}{(1-x)^{n-1}+2(1+x)^{n-1}}}$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{n-1} + \log 2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{n-1}\right],$$

sau

$$E = \frac{1}{2i}\log 2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{n-1} = \frac{\log 2}{2i} = \frac{\log\sqrt{2}}{i},$$

ceeace trebuia stabilit.

Soluții analoage date de d-rele *Alexa Magdalena* (P.T), *Rațiu Maria* (P. T.), și de d-nii: *Breazu Mihai* (P. T.), *Coțiu Aurel* (student, Cluj), *Deutsch Emeric* (P. T), *Filip Alexandru* (Lic. Constanța), *Gherlan Vasile* (P.T.) *Lungu Ioan* (Polit. București), *Pantea Alexandru* (Lic. Beiuș), *Păunescu Gh.* (Lic Matei Basarab, București), *Popa Pavel* (Lic. Oradea), *Purcea Ion* (Lic. Caracal), *De Sabata Ioan* (P. T.), *Seracin Eugen* (P. T.) și *Stănilă George* (student, București).

Soluția 2-a. În articolul autorului problemei intitulat: *„O metodă pentru a construi clase de funcții care au aceiași derivată“* din „R.M.T. vol. XXVIII No. 1“, *se demonstrează că funcțiile*

$$(1)\qquad \begin{cases} u = a\operatorname{arc\,tg} X \qquad v = b\operatorname{arc\,tg} Y + \\ c\operatorname{arctg} i\,\dfrac{\sqrt[c]{(1-iX)^a(1+iY)^b}-k\sqrt[c]{(1+iX)^a(1-iY)^b}}{\sqrt[c]{(1-iX)^a(1+iY)^b}+k\sqrt[c]{(1+iX)^a(1-iY)^b}}, \end{cases}$$

au aceiași derivată.

Particularizând și luând, $a=c=1$, $b=n$,

$$k=2,\ X=Y=ix,\ (i=\sqrt{-1})$$

funcțiile (1) devin după unele simplificări

$$u=a\operatorname{arc\,tg} ix,\qquad v=n\operatorname{arc\,tg} ix \operatorname{arc}+\operatorname{tg} i\,\frac{(1-x)^{n-1}-2(1+x)^{n-1}}{(1-x)^{n-1}+2(1+x)^{n-1}}.$$

Aceste funcții u și v având aceiași derivată, urmează că ele diferă printr'o constantă, adică avem

$$v-u = (n-1)\operatorname{arc\,tg} ix + \operatorname{arc\,tg} i\,\frac{(1-x)^{n-1}-2(1+x)^{n-1}}{(1-x)^{n-1}+2(1+x)^{n-1}} = C. \qquad (2)$$

Să determinăm această constantă.

În adevăr, identitatea (2) trebuind să fie adevărată pentru orice valoare a lui x, în particular pentru $x=0$ ea ne dă:

$$\operatorname{arc\,tg} i\,\frac{-1}{3} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3i} = C.$$

Dacă acum în identitatea (1) de care ne-am folosit în prima soluție, luăm

$$\alpha = \frac{1}{3i},$$

obținem

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3i}=\frac{1}{2i}\log\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2i}\log 2=\frac{\log\sqrt{2}}{i}=C$$

Înlocuind în (2) valoarea lui C găsită, avem tocmai identitatea cerută.

Soluții date de d-nii: *Deutsch Em.* (P. T.), *Dodu Eugen* (Lic Mihai Viteazui, Bucureşi), *Pisanca Eugen* (Timişoara) şi *Roman C-tin* (Timişoara).

Problema 2607. — *Să se calculeze modulul expresiei imaginare*

$$\frac{1+e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{i+e^{i\theta}+e^{-i\theta}},$$

unde $i=\sqrt{-1}$, *iar* θ *real.*

V. ALACI

Soluție. Din formulele cunoscute ale lui *Euler:*

$$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i},\quad \cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2},$$

deducem,

$$e^{i\theta}-e^{-i\theta}=2i\sin\theta,\quad e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos\theta,$$

astfel că expresia dată, notată cu E, devine

$$E=\frac{1+2i\sin\theta}{i+2\cos\theta}=\frac{(1+2i\sin\theta)(2\cos\theta-i)}{(2\cos\theta+i)(2\cos\theta-i)}=$$

$$\frac{2(\cos\theta+\sin\theta)-i(1-4\sin\theta\cos\theta)}{4\cos^2\theta+1},$$

sau

$$E=\frac{2(\cos\theta+\sin\theta)}{1+4\cos^2\theta}-i\frac{1-2\sin 2\theta}{1+4\cos^2\theta}.$$

Dar ştim că modulul unei expresii imaginare de forma $A-iB$ este $\sqrt{A^2+B^2}$, astfel că avem,

$$\text{mod. } E=\frac{\sqrt{4(\cos\theta+\sin\theta)^2+(1-2\sin 2\theta)^2}}{1+4\cos^2\theta}=$$

$$=\frac{\sqrt{4(1+\sin 2\theta)+(1-4\sin 2\theta+4\sin^2 2\theta)}}{1+4\cos^2\theta},$$

sau

$$\text{mod. } E=\frac{\sqrt{5+4\sin^2 2\theta}}{1+4\cos^2\theta}.$$

Soluții date de d-ra *Rațiu Maria* (P. T.) şi de d-nii: *Bălăuță Mihai* (P. T.), *Breazu Mihai* (P. T.), *Deutsch Em.* (P. T.), *Gherlan V.* (P. T.), *Păunescu Gh.* (Lic. Matei Basarab, Bucureşti), *Radu Corneliu* şi *Soare Mircea* (Polit. Bucureşti).

Problema 2633. — *Să se stabilească pe cale directă, că într'un triunghiu oarecare* A B C *avem relațiile.*

$$\frac{a+b-2c\cos B}{\sin(B-\frac{1}{2}C)}=\frac{2b\cos\frac{1}{2}C}{\sin B},$$

$$\operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}B-\tfrac{1}{8}C\right)=\frac{4b\cos\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{4}C-c}{4b\cos\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{4}C+c}\operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}B+\tfrac{1}{8}C\right).$$

V. ALACI

Soluție. Soluția foarte bună a d-lui *Păunescu Gheorghe* (Lic Matei Basarab, Bucureşti):

1°. În relația sinusurilor

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

aplicând o proprietate a rapoartelor egale, avem

$$\frac{a+b-2c\cos B}{\sin A+\sin B-2\sin C\cos B}=\frac{b}{\sin B}.$$

Ținând seamă că $\sin A=\sin(B+C)$ şi transformând în produs suma $\sin A+\sin B$, mai putem scrie

$$\frac{a+b-2c\cos B}{2\sin(B+\frac{1}{2}C)\cos\frac{1}{2}C-4\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\cos B}=\frac{b}{\sin B}$$

$$\therefore\quad \frac{a+b-2c\cos B}{\sin\left(B+\frac{C}{2}\right)-2\sin\frac{C}{2}\cos B}=\frac{2b\cos\frac{1}{2}C}{\sin B},$$

sau

$$\frac{a+b-2c\cos B}{\sin\left(B-\frac{C}{2}\right)}=\frac{2b\cos\frac{1}{2}C}{\sin B},$$

tocmai prima relație.

2°. Pornind dela relația

$$\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{b}{c},$$

scriem succesiv

$$\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{\sin B}{2\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C}=$$

$$\frac{\sin B}{4\sin\frac{1}{4}C\cos\frac{1}{4}C\cos\frac{1}{2}C}=\frac{b}{c}$$

$$\therefore\quad (1)\quad \frac{\sin B}{\sin\frac{1}{4}C}=\frac{4b\cos\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{4}C}{c}.$$

Dar primul membru se mai poate scrie şi sub forma,

$$\frac{\sin B}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{\sin\left[\left(\frac{1}{2}B-\frac{1}{8}C\right)+\left(\frac{1}{2}B+\frac{1}{4}C\right)\right]}{\cos\left[\left(\frac{1}{2}B-\frac{1}{8}C\right)\cos\left(\frac{1}{2}B+\frac{1}{8}C\right)\right]}\cdot\frac{\sin\left[\left(\frac{1}{2}B+\frac{1}{8}C\right)-\left(\frac{1}{2}B-\frac{1}{8}C\right)\right]}{\cos\left[\left(\frac{1}{2}B+\frac{1}{8}C\right)\cos\left(\frac{1}{2}B-\frac{1}{8}C\right)\right]},$$

sau

$$\frac{\sin B}{\sin\frac{1}{4}C}=\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}B-\frac{1}{8}C\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}B+\frac{1}{8}C\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}B+\frac{1}{8}C\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}B-\frac{1}{8}C\right)}.$$

Din egalitățile (1) și (2) deducem,

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}B-\frac{1}{8}C\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}B+\frac{1}{8}C\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}B+\frac{1}{8}C\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}B-\frac{1}{8}C\right)}=\frac{4b\cos\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{4}C}{c}$$

Aplicând o proprietate a proporțiilor, obținem

$$\frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}B-\frac{1}{8}C\right)}{2\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}B+\frac{1}{8}C\right)}=\frac{4b\cos\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{4}C-c}{4b\cos\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{4}C+c},$$

de unde rezultă

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}B-\frac{1}{8}C\right)=\frac{4b\cos\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{4}C-c}{4b\cos\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{4}C+c}\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}B+\frac{1}{8}C\right),$$

tocmai a 2-a identitate cerută.

Alte soluții date de d-nii; *Bălă C-tin* (P. T.), *Bălăuță Mihai* (P. T.), *Breazu Mihai* (P. T.), *Constantinescu Gh.* (Slatina-Olt), *Deutsch Em.* (P. T.), *Radu Corneliu*, *Purcea Ion* (Caracal) și *De Sabata Ion* (P. T.).

Observare. D-l *Deutsch Emeric* a dat și următoarea interesantă generalizare pentru a 2-a identitate, anume:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}B-\frac{1}{2^n}C\right)=$$

$$\frac{2^{n-1}b\prod_{n=2}^{n}\cos\frac{1}{2^{n-1}}C-c}{2^{n-1}b\prod_{n=2}^{n}\cos\frac{1}{2^{n-1}}C+c}\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}B+\frac{1}{2^n}C\right).$$

Problema 2643. — *Să se rezolve sistemul*

$$\begin{cases} xy+z\sum x=a \\ yz+x\sum x=b \\ zx+y\sum x=c. \end{cases}$$

MAIOR G. P. BERESCU

Soluție dată de D-l *Petcu Al. Vateriu* (București). Sistemul se mai scrie:

$$\begin{cases} (y+z)(z+x)=a \\ (x+y)(z+x)=b \\ (x+y)(y+z)=c. \end{cases}$$

Avem:

$$(x+y)(y+z)(z+x)=\pm\sqrt{abc}.$$

Împărțind această ecuație prin fiecare ecuație a sistemului precedent obținem:

$$\begin{cases} x+y=\pm\frac{1}{a}\cdot\sqrt{abc} \\ y+z=\pm\frac{1}{b}\cdot\sqrt{abc} \\ z+x=\pm\frac{1}{c}\cdot\sqrt{abc}. \end{cases}$$

Suma ecuațiilor este:

$$x+y+z=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{abc}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Ținând seamă de ecuațiile sistemului precedent, găsim soluțiile:

$$x=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{abc}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

$$y=\pm\tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{abc}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)$$

$$z=\pm\tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{abc}\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Au rezolvat problema D-nii *Bălăuță M.* (Deva), *Breazu M.* (Deva), *De Sabata I.* (Beiuș) și *Deutsch Em.* (P. T.).

Problema 2653* — *Dacă se proiectează vârfurile unui patrulater pe diagonalele sale, se obține un alt patrulater a cărui suprafață se obține din suprafața celui inițial înmulțită cu patratul cosinusului unghiului făcut de diagonale.*

GH. TH. GEORGHIU

Soluție. Pentru calculul suprafeței patrulaterului oarecare ABCD întrebuințăm formula

$$S_{ABCD}=\tfrac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\alpha$$

unde AC și BD sunt diagonalele patrulaterului, iar α unghiul format de acestea. Notăm cu A'B'C'D' patrulaterul obținut prin proiecția vârfurilor A,B,C și D pe diagonalele sale. Cum diagonalele A'C' și B'D' ale patrulaterului A'B,C'D' sunt respectiv situate pe BD și AC, unghiul format din ele este tot α, iar suprafața patrulaterului A'B'C'D' va fi

$$S_{A'B'C'D'}=\tfrac{1}{2}A'C'\cdot B'D'\cdot\sin\alpha. \quad (2)$$

Cum A'C' și B'D' reprezintă proiecțiile lui AC pe BD respectiv a lui BD pe AC, ținând seamă

că proecția unui segment pe o dreaptă se calculează inmulțind lungimea segmentului cu cosinusul unghiului format de ssgmen. cu dreapta, avem .

$$A'C' = AC\cos\alpha; \quad B'D' = BD\cos\alpha.$$

Inlocuind în (2) și ținând seamă de (1), obținem

$$S_{A'B'C'D'} = \tfrac{1}{2} AC.BD,\sin\alpha\cos^2\alpha = S_{ABCD}\cos^2\alpha,$$

adică tocmai proprietatea anunțată.

Au dat bune soluții analoage D-nii; *Bălăuță Mihai* (Deva) *Bogocvici I Nicolae* (Caraosebeș), *Breazu Mihai* (Deva), *Deleanu I. Aristide* (București), *Deutsch Emeric* (P. T.), *Gertler M. Richard* (București) *Lungu A. Ioan* (Pol. București), *Purcea M. Ioan* (P. T.), *De Sabata Ioan* (Beiu) și *Zănescu Liviu* (București).

O bună soluție prin geometrie analitică a trimis D-l *Radu Corneliu* (Tg.-Mureș).

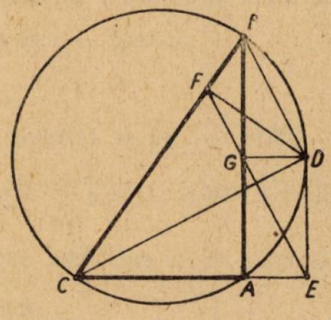
A. Geier

Problema 2659. — *În triunghiul dreptunghic* B A C, *fie* D *punctul unde bisectoarea unghiului* C *întâlnește cercul circumscris triunghiului dat,* E *și* G *proiecțiile lui* D *respectiv pe* A C *și* A B, *iar* F *punctul unde* E G *întâlnește pe* B C. *Să se arate că*

$$AB\,(BC + AC) = 2\,EF\,.\,DC.$$

MAIOR G. P. BOERESCU

Soluția. Dreapta ce unește pe E cu G este dreapta lui *Simson* corespunzătoare punctului D. Rezultă deci că D F este perpendiculară pe B C. În acest caz patrulaterul DFCE este inscriptibil, având ungihiurile din E și F drepte. Aplicăm teorema lui *Ptolomeu:*



$$(1)\qquad EF\,.\,DC = DF\,EC + FC\,.\,DE$$

D fiind la mijlocul arcului A B, G va fi mijlocul coardei A B. Mai ținând seamă că D este pe bisectoare și că patrulaterul DGAE este dreptunghiu vom avea: $DF = DE = GA = \tfrac{1}{2} AB$.

Cu acestea relația (1) devine

$$(2)\qquad EF\,.\,DC = \tfrac{1}{2} AB\,(EC + FC)$$

Dar putem scrie:

$$(3)\qquad EC + FC = AC + BC + AE - BF.$$

Cum triunghiurile dreptunghice D B F și A E G sunt egale ca având $DF = AG = \tfrac{1}{2} AB$ și unghiurile

$$\sphericalangle BDF = \sphericalangle AGE = \tfrac{1}{2}\hat{C},$$

cu laturile perpendiculare rezultă că $AE = BF$, deci

$$EC + FC = AC + BC$$

și înlocuind în (2) obținem

$$2\,EF\,.\,DC = AB\,(AC + BC).$$

S'au primit soluții dela d nii: *Bălăuță Mihai* (Deva), *Breazu Mihai* (Deva), *Dodu Eugen* (București), *Găzdău Mircea* (Deva), *Manoilă Dan* (Constanța), *Păunescu Gh.* (București), *Purcea Ion* (Caracal), *Zănescu Liviu* (Buc).

Gh. Silaș

Problema 2664. — *Să se demonstreze identitatea*

$$(\operatorname{tg}x + 2\sin 4x)(1 - 3\operatorname{tg}^2 x) = (1 + 2\cos 4x)(3\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}^3 x).$$

FL. NEDELCU

Soluția A demonstra identitatea din enunț, este tot una cu a demonstra identitatea

$$\frac{\operatorname{tg}x + 2\sin 4x}{1 + 2\cos 4x} = \frac{3\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x},$$

sau, în baza unei formule cunoscute,

$$\frac{\operatorname{tg}x + 2\sin 4x}{1 + 2\cos 4x} = \operatorname{tg} 3x.$$

Prima parte se mai poate scrie

$$\frac{\sin x + 2\sin 4x\cos x}{\cos x + 2\cos 4x\cos x}.$$

Dar, în baza formulelor cunoscute,

$$\sin x + 2\sin 4x\cos x = \sin x + (\sin 3x + \sin 5x)$$
$$= \sin 3x + (\sin x + \sin 5x) = \sin 3x + 2\sin 3x\cos 2x$$
$$= \sin 3x\,(1 + 2\cos 2x),$$
$$\cos x + 2\cos 4x\cos x = \cos x + (\cos 3x + \cos 5x)$$
$$= \cos 3x + (\cos x + \cos 5x) = \cos 3x + 2\cos 3x\cos 2x$$
$$= \cos 3x\,(1 + 2\cos 2x),$$

încât fracția ce trebue să calculăm se mai scrie

$$\frac{\sin x + 2\sin 4x\cos x}{\cos x + 2\cos 4x\cos x} = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \operatorname{tg}^3 x.$$

Au rezolvat problema d-nii: *Bălăuță M.* (Deva), *Breazu M.* (Deva), *Deutsch Em.* (P. T.), *Drăghici I.* (Caransebeș), *Păunescu Șt. Gh.* (București), *Petcu Al. Val.* (București), *Purcea M. I* (Caracal), *Tibăr I. A* (Constanța) și *Zănescu Liviu* (București).

Gh. Th. Gh.

PROBLEME PROPUSE

2695*) — Se cer numerile prime de patru cifre, știind că: 1°. Răsturnatul lor este prim. 2°. Suma cifrelor este număr prim 3°. Suma, cifrelor sumei cifrelor este număr prim. 4°, Suma lui și răsturnatului este divizibilă prin 13.

Care dintre numerele de mai sus au cifrele patrate perfecte şi numărul format de primele două cifre prim?

CORNELIU POPESCU

2696. — Două automobile A şi B vin pe o şosea din aceiaşi direcţie; automobilul A cu o viteză de 10 m. sec., iar B cu 8 m sec. La o răscruce automobilul B, care ajunge în acest punct cu 5 sec. în urma automobilului A, o apucă cu aceiaşi viteză pe un drum ce face cu şoseaua un unghiu de 30°. Automobilul A continuând să meargă normal pe şosea. Se cere:

1°. Timpul şi locul de încrucişare a celor două automobile.

2°. După cât timp automobilul B se va afla la distanţa de 1 Km. de şosea

3°. La ce distanţă de drum se află automobilul A după timpul din 2°.

4°. Care este tot în acest moment distanţa dintre cele două automobile.

NICOLAE BOGOEVICI

2697. — Să se găsească suma primilor n termeni ai seriilor cu termeni generali:

$$u_n = \sin n\alpha \cos n^2\alpha, \quad v_n = \sin n\alpha \sin n^2\alpha.$$

Considerând,

$$\alpha \leq \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)^{\frac{\pi}{2}},$$

să se interpreteze geometric rezultatul.

F. NEDELCU

2698*. — Fie (A', B', C'), (A'', B'', C'') picioarele a două grupe de ceviene în triunghiul ABC, precum şi intersecţiile $A_1(AA', B''C'')$, $B_1(BB', C''A'')$, $C_1(CC', A''B'')$, $A_2(AA'', B'C')$, $B_2(BB'', C'A')$, $C_2(CC'', A'B')$. Dreptele $A''A_1$, $B''B_1$, $C''C_2$, $A'A_2$, $B'B_2$, $C'C_2$ concură în acelaş punct.

M. GHERMANESCU

2699. — In care triunghiuri, unul din punctele lui *Feurbach* este pe cercul circumscris?

V. THÉBAULT

2700. — Se dă triunghiul ABC şi M un punct mobil pe latura BC. Fie P şi Q proecţiile lui M pe AB şi AC. Se cere minimul produsului

$$P = r_1 \cdot r_2,$$

r_1 şi r_2 fiind respectiv razele cercurilor înscrise în triunghiurile BMP şi CMQ.

ILIE N. CONSTANTINESCU

2701. — Să se arate că dacă avem

$$\frac{dy}{dx} + \frac{\cos y}{\cos x} = 0,$$

expresiile

$$E_1 = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}, \quad E_{2,3} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{x}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{y}{2}\right)$$

sunt constante.

C. IONESCU-TIU

2702. — Se dă ecuaţia

$$2z^2 - 2z\operatorname{tg} 2\varphi + \operatorname{tg}^2 2\varphi - 2 = 0.$$

Presupunând că rădăcinele ecuaţiei sunt coordonatele unui punct P din plan (axe rectangulare), se cere:

1°. Curba descrisă de punctul P când φ variază.

2°. Punctele de contact ale tangentelor la curbă, paralele cu direcţia $m = \operatorname{tg}\alpha$.

3°. Să se găsească trigonometric punctele de intersecţie ale curbei cu dreapta

$$x\cos\varphi - y\sin\varphi - 1 = 0.$$

VALERIU PETCU

2703. — Să se rezolve ecuaţia

$$[(1+i)(\cos x - \sin x)]^m - [(1-i)(\cos x + \sin x)]^m = 0, \quad (i = \sqrt{-1})$$

şi apoi să se calculeze suma

$$S = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\cos\frac{k\pi}{m} - \sin\frac{k\pi}{m}}{\cos\frac{k\pi}{m} + \sin\frac{k\pi}{m}}.$$

EMERIC DEUTSCH

2704. — Intr'un triunghiu ABC cu unghiurile B şi C ascuţite, avem relaţia:

$$\frac{\cos B\, cp\, C + \cos C\, cp\, B}{\cos B\, cp\, C - \cos C\, cp\, B} = \operatorname{cotg}\left(45^\circ - \frac{A}{2}\right)\operatorname{cotg}\frac{C-B}{2}.$$

V. ALACI

INFORMAŢII

1. Nu se publică în revistă decât manuscrise dela abonaţi.

2. Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol, trebuesc scrise citeţ (în special iscălitura) numai pe o parte a hârtiei. Probleme propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor, iar cele rezolvate, de enunţ. Nu sunt luate în considerare probleme rezolvate iscălite de mai mulţi corespondenţi. Problemele rezolvate vor fi redactate îndependent una de alta, şi nu în continuare.

3. Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

4. Numele colaboratorilor dela cari s'au primit soluţii la problemele publicate în acest număr şi care au sosit la redacţie după data de 15 a lunei precedente, nu mai pot fi trecute în corpul revistei Numele lor este însă menţionat pe copertă împreună cu numărul problemei rezolvate.

5. Rugăm pe corespondenţii noştrii la orice schimbare de adresă sau lipsă din localitate fără a avea pe cineva să le primească revista, să ne anunţe din vreme. În caz contrar revista ne vine înapoi şi cu regret anunţăm că a doua oară nu o mai putem expedia. Mai mult, se suspendă expedierea numerelor următoare până ce abonatul va reclama aceste numere.

6. Aducem la cunoştinţa corespondenţii noştrii care ne trimit *probleme propuse* că ele trebue să fie cât mai *originale*, în sensul de a nu a fi asemănătoare cu cele publicate în ultimul timp.

ANUL XXVIII. FEBRUARIE 1949. No. 12.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIŞOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA
PREŢUL ABONAMENTULUI ESTE 300 LEI ANUAL PENTRU PARTICULARI
ŞI 600 LEI PENTRU INSTITUŢII
PREŢUL ABONAMENTULUI PENTRU STRAINĂTATE ESTE DE 600 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **D. POMPEIU**: ALGEBRA SI ARITMETICA.
2. **L-T. COL. MIHAIL FOCSENEANU**: O CUBICA REMARCABILA.
3. NOTA MATEMATICA 21.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 2478, 2481, 2495, 2514, 2585, 2616, 2618, 2621, 2625, 2646, 2650.
6. PROBLEME PROPUSE: 2705-2714.
7. ERATA.
8. TABLA DE MATERII.
9. INFORMATII.

Tip. „Gh. Hălmăgeanu", Timişoara
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebue să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea poporului românesc, pe calea eare-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Mulţumim D-lui Rector **Ilie Murgulescu** prin bunăvoinţa căruia, revista noastră a primit dela *Institutul Politehnic din Timişoara,* o subvenţie de 40.000 lei.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara, conţinând articole, note, probleme propuse şi rezolvate, vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci**, Politehnica, Timişoara.

Administraţia revistei aduce la cunoştinţa generală următoarele:

1. Abonamentul pe anul XXVIII (15 Martie 1948 — 15 Februarie 1949) este 300 lei pentru particulari şi 600 pentru instituţii.

2. Taxa de membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este de 200 lei.

3. Volumele I, XXIII, XXV, XXVI şi XXVII sunt epuizate. Celelalte volume broşate se găsesc de vânzare cu preţul de 300 lei fiecare. La această sumă se va adăoga 50 lei costul expediţiei. In caz că se comandă mai multe volume se va adăoga la taxa de 26 lei pentru recomandat, câte 20 lei pentru fiecare volum.

4. Se găsesc de vânzare numere izolate din colecţie chiar din volumele epuizate. Preţul unui număr este de 30 lei la care se adaogă 2 lei expediţia. Din vol. XXVII se găsesc de vânzare no. 1, 4—12.

5. Se primesc reclamaţii că se pierde revista prin poştă. Aceste reclamaţii sunt adunate în ordinea sosirii lor şi vor fi satisfăcute la 15 Februarie 1949 când se vor vedea ce numere rămân descomplectate după legarea volumelor întregi. Orice reclamaţie de pierderea unui număr nu este luată în seamă decât la o lună dela data apariţiei acelui număr.

6. Tot ce priveşte administraţia se va adresa D-lui Prof. **Gh. Th. Gheorghiu** str. Voltaire Nr. 1, Timişoara I. Reclamaţiile ce necesită răspuns vor fi însoţite de o carte poştală timbrată legal.

7. Orice sumă destinată revistei se poate trimite prin CEC sub contul n-rul 85208 sau prin mandat postal D-lui Prof. **Gh. Th. Gheorghiu** pe adresa de mai sus.

ANUL XXVIII — No 12. TIMISOARA, 1949 FEBRUARIE 15

REVISTA MATEMATICĂ DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

Prețul abonamentului este 300 lei pentru particulari și 600 lei pentru instituții.

Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. GH. TH. GHEORGHIU
Timișoara I, Str. Voltaire, No. 1.

ALGEBRĂ ȘI ARITMETICĂ

DE

D. POMPEIU

În cartea lui Edouard Lucas: *Théorie des nombres*, autorul atinge, în prefață și chestia raporturilor dintre Algebră și Aritmetică și spune, în esență, că paralelismul aparent al calculelor, în cele două discipline, ascunde pentru Aritmetică dificultăți și excepții care de multe ori împiedică orice analogie.

1. În cele ce urmează îmi propun să ilustrez cu un exemplu elementar observarea lui *Edouard Lucas*

Să considerăm, în Algebră, o înmulțire de două polinoame

$$\begin{aligned}(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)(1+x+x^2)=\\ a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\\ a_0x+a_1x^2+a_2x^3+a_3x^4+\\ a_0x^2+a_1x^3+a_2x^4+a_3x^5=\\ =A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4+A_5x^5\end{aligned}$$

de unde rezultă

$$\begin{aligned}A_0&=a_0\\ A_1&=a_0+a_1\\ A_2&=a_0+a_1+a_2\\ A_3&=a_1+a_2+a_3\\ A_4&=a_2+a_3\\ A_5&=a_3.\end{aligned}\tag{1}$$

Acum observăm că

$$\begin{aligned}A_0+A_3&=a_0+a_1+a_2+a_3\\ A_1+A_4&=a_0+a_1+a_2+a_3\\ A_2+A_5&=a_0+a_1+a_2+a_3,\end{aligned}$$

adecă

$$A_0+A_3=A_1+A_4=A_2+A_5.\tag{2}$$

Dar, tabloul (1) unit cu condițiile (2) ne arată că și propoziția *reciprocă* este adevărată:

Dacă într'un polinom de gradul cinci observăm că relațiile (2) sunt îndeplinite, atunci polinomul conține ca factor pe

$$\varphi=1+x+x^2.$$

Iată, așa dar, o interesantă propoziție de Algebră, în care se recunoaște simplicitatea și uniformitatea calculelor algebrice.

2. Să trecem acum la *Aritmetică.*

O să punem

$$x=10$$

și la coeficienții a_k întroducem condițiile:

1° a_k: numere întregi și pozitive;

2° $0\leq a_k<10$

Cu aceste condiții aritmetice, să luăm ca prim exemplu

$$N=1\,4\,2\,8\,5\,7.$$

Condițiile (2) sunt îndeplinite

$$\begin{aligned}7+2&=9\\ 5+4&=9\\ 8+1&=9.\end{aligned}\tag{3}$$

Deci numărul N conține, ca factor, pe 111, ceia ce se și verifică imediat. Dar faptul că propoziția din Algebră este adevărată și în reciprocă, ne autorizează să afirmăm că: în prezența ca factor în N, a lui 111, stă explicarea relațiilor (3) pe care le constatăm la numărul N.

Aceasta este propoziția generală, dar ca aplicare în Aritmetică se ivesc excepții aparente, care trebuesc lămurite și înlăturate.

Exemplu: numărul

$$N=2\,7\,0\,0\,6\,3$$

nu satisface, după cum se vede, condițiile (2) căci avem

$$\begin{aligned}3+0&=3\\ 6+7&=13\\ 0+2&=2\end{aligned}$$

şi cu toate acestea

$$N = 270063 = 2433 \times 111$$

adecă

$$\begin{array}{r} 2\,4\,3\,3 \\ 2\,4\,3\,3 \\ 2\,4\,3\,3 \\ \hline N = 2\,7\,0\,0\,6\,3 \end{array}.$$

Însă atunci această sumă poate fi scrisă

$$N = 3 + (3+3).10 + (3+3+4)10^2 + (3+4+2)10^3 + (4+2)10^4 + 2.10^5.$$

Sub forma aceasta (care ne întoarce la Algebră) condiţiile (2) sunt satisfăcute şi aparenta excepţie se înlătură.

Acest exemplu ne arată că pentru un număr N orcare, de şase cifre, putem păşi, graţie tabloului (1), la calcularea factorului N_0 care să ne dea

$$N = N_0(1 + x + x^2)$$

Se 'nţelege că dacă N este orcare, calculul nu reuşeşte şi nu avem pe N_0.

3. *Observare finală.* Operaţia

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3)(1 + x + x^2) = P(x)$$

poate fi generalizată: ea dă naştere la o sumă de rezultate interesante de caracter algebric-aritmetic, dar, trecând la limită, putem găsi un criteriu, în *teoria funcţiilor*, pentru existenţa, pe cercul de rază *unu*, a polului simplu $x = +1$.

O CUBICĂ REMARCABILĂ

DE

L-t.-Col. MIHAIL FOCŞENEANU.

Se ştie că *locul punctelor de întoarcere ale hipocicloidelor cu 3 întoarceri, înscrise într'un triunghiu* T, *este o cubică* (R) *cu punct dublu*[1].

Cubica (R), cel puţin pe cale pur geometrică, nu a fost studiată. Studiul ei pe această cale scoate în evidenţă câteva proprietăţi interesante.

1°. *Construcţia curbei* (R) *prin puncte.*

Punctele O, H, O_9 fiind cele clasice în triunghiul ABC, perpendiculara Δ în O_9 pe OH tae laturile în d_a, d_b, d_c, iar tangenta la cercul (O_9) în extremitatea razei O_9O tae laturile lui T în $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$.

Dreptele d_aO, d_bO, d_cO intersectează $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$ în t_a, t_b, t_c, iar cercurile cu centrele în d_a, d_b, d_c şi de raze, respectiv $\overline{d_a t_a}$, $\overline{d_b t_b}$, $\overline{d_c t_c}$, taie laturile BC, CA, AB, de aceiaşi parte cu $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$ în α', β', γ'.

Să considerăm pe Δ un punct ω. Dreapta ωO intersectează α_1, β_1, γ_1 în ω_1, iar cercul cu centrul în ω, de rază $\overline{\omega\omega_1}$, intersectează BC în ω_2, ω_3 (ω_2 fiind cel mai apropiat din acestea de A_m mijlocul lui BC).

Razele $\omega_3\omega$ şi $\omega\omega_2$ tae cercul cu centrul în ω şi de rază $3\overline{\omega\omega_2}$ în ω_4 şi ω_5 (în sensul către OH).

Unul din punctele de întoarcere R_1 al hipocicloidei (H) cu centrul în ω şi înscrisă în T, se obţine luând intersecţia lui ωR_1 (în sensul către OH) astfel că $\overset{\frown}{\omega_5\,\omega\,R_1} = \frac{1}{3}\overset{\frown}{\omega_5\,\omega\,\omega_4}$, cu cercul ce conţine ω_4 şi ω_5.

Se ştie că centrele ω ale hipocicloidelor (H) înscrise în T sunt pe Δ, iar raza cercului tritangent este

$$\overline{\omega\omega_1} = \frac{R}{2\cos \overset{\frown}{O_9\,O\,\omega}} = \frac{R}{2\cos\lambda}.$$

Cercul cu diametrul $\overline{\omega_2\omega_5}$, de centru Ω tae BC a 2-a oară în ω_5' şi dacă notăm

$$\overset{\frown}{\omega_3\,\omega\,\omega_2} = \overset{\frown}{\omega_2\,\Omega\,\omega_0'} = 2\hat{\gamma}$$

avem imediat $\hat{\delta} = \text{arc}\ R_1\omega_5 = \text{arc}\ \omega_5\omega_5' = \frac{1}{3}(\pi - 2\hat{\gamma})$ c. c. t. d.

Construcţia se simplifică şi pune în evidenţă ulterior toate proprietăţile curbei (R) şi ale hipocicloidelor (H), dacă notăm cu $\hat{\alpha}_a$ şi $\hat{\beta}_a$ unghiurile ascuţite (Δ, BC) şi (Δ, d_aO). Să proectăm pe O_9 în O_9' pe BC şi pe ω în ω' pe aceiaşi latură şi să însemnăm $\overline{d_aO} = d$; $\overline{O_9A_m} = \frac{R}{2}$ (R raza cercului ABC) şi $\overline{\omega\omega_2} = \varrho$.

Avem succesiv:

$$\overline{OO_9'} = d\cos\beta_a \sin\alpha_a \quad \text{şi} \quad \overline{O_9'A_m} = d\sin\beta_a\sin\alpha_a$$

$$\therefore\ \overline{O_9A_m} = \frac{R}{2} = d\sin\alpha_a \ \text{şi}\ \varrho = \frac{d\sin\alpha_a}{\cos\lambda}.$$

Din triunghiul $\omega_2 d_a \omega$ avem

---

[1]) De ex.: *A. Labrousse.* Sur les courbes unicursales ayant leurs aires rationnelles. (Revue de mathématiques spéciales 1927).

(1) $$\varrho\cos\gamma = \overline{d_a\omega}\,.\,\sin\alpha_a$$

Însă

$$\overline{d_a\omega} = \overline{d_aO_9} - \overline{\omega O_9} = d\cos\beta_a - \overline{O\omega}\sin\lambda = \frac{d\cos(\beta_a+\lambda)}{\cos\lambda}$$

și relația (1) ne dă, ținând seamă de faptul că β, γ, λ sunt unghiuri ascuțite,

(2) $$\hat{\gamma} = \hat{\beta}_a + \hat{\lambda}$$

Putem calcula $\hat{\omega}_a = \widehat{O\omega R_1}$ observând că

$$\hat{\omega}_a = \hat{\gamma} + \hat{\delta} - (\hat{\alpha}_a + \hat{\lambda}),$$

care ne dă:

(3) $$\hat{\omega}_a = \frac{\pi}{3} + \frac{\hat{\beta}_a - 3\hat{\alpha}_a}{3} - \frac{2\hat{\lambda}}{3}.$$

Relația (3) ne permite construcția curbei (R), punând în evidență și proprietățile ei. Celelalte două puncte de întoarcere R_2 și R_3 se construesc fie, căutând vârfurile triunghiului echilateral înscris în cercul (ω), fie aplicând construcția lui R_1 în raport de d_b și d_c. În al doilea mod de construcție, dacă se notează cu α_b, β_b și α_c, β_c unghiurile lui Δ respectiv cu CA, d_bO și cu AB, d_cO relația (3) devine:

(3′) $$\hat{\omega}_b = \frac{\pi}{3} - \frac{3\alpha_b - \beta_b}{3} - \frac{2\lambda}{3}$$
$$\hat{\omega}_c = \frac{3\alpha_c - \beta_c}{3} - \frac{\pi}{3} + \frac{2\lambda}{3}.$$

Observând că O, d_a, ω, ω_2 sunt 4 puncte pe același cerc din cauză că

$$\widehat{O\omega\omega_2} = \hat{\beta} - \hat{\alpha} = \widehat{Od_a\omega_2},$$

punctul ω_2 *se află la intersecția cercului* $O\omega d_a$ *cu* BC, de unde decurge proprietatea: *cercurile* $O\omega d_a$, $O\omega d_b$, $O\omega d_c$ *taie laturile lui* T *pe cercul tritangent al hipocicloidei* (H).

Din construcțiile de mai sus, se vede că curba are *3 ramuri distincte și 3 asimtote.*

2°. *Asimtote.*

Vom găsi asimtotele, dacă în formulele (3) și (3′) facem $\lambda = \frac{\pi}{2}$. În acest caz $O\omega$ devine Δ' paralela din O la Δ și avem: $OR_1 \parallel \omega R_1$, $OR_2 \parallel \omega R_2$, $OR_3 \parallel \omega R_3$. Unghiurile

$$\omega_a = \frac{\beta_a - 3\alpha_a}{3}, \quad \omega_b = -\frac{3\alpha_b - \beta_b}{3}, \quad \omega_c = \frac{3\alpha_c - \beta_c}{3}$$

sunt unghiurile pe care le fac asimtotele cu Δ', unghiuri măsurate dela Δ' în sensul acelor unui ceasornic. Dacă R_a, R_b, R_c sunt punctele de întoarcere ale hipocicloidei lui *Steiner*, se vede ușor că *asimtota determinată de* ω_a *este paralelă cu* R_bR_c.

3°. *Puncte de inflexiune.*

Să luăm de aceiași parte cu α', β', γ' pe laturile respective, 3 segmente

$$\overline{d_aI_a} = 3\overline{d_a\alpha'},\ \overline{d_bI_b} = 3\overline{d_b\beta'},\ \overline{d_cI_c} = 3\overline{d_c\gamma'}$$

Punctele I_a, I_b, I_c sunt puncte de întoarcere ale hipocicloidelor cu centrele în d_a, d_b, d_c. Dacă considerăm pe I_a, corespunzător lui d_a și I_a', I_a'' corespunzătoare la 2 poziții ale lui d_a infinit vecine, d_a' deasupra lui BC iar d_a'' sub BC, I_a' este sub BC, iar I_a'' deasupra. Când d_a' și d_a'' tind către d_a, I_a' și I_a'' tind către I_a. Urmează că d_aI_a *care este o tangentă de întoarcere lui* (H), *este tangentă de inflexiune lui* (R).

Punctele I_a, I_b, I_c sunt punctele de inflexiune. Din relațiile

$$\frac{\overline{d_at_a}}{\overline{d_aO}} = \frac{\overline{d_bt_b}}{\overline{d_bO}} = \frac{\overline{d_ct_c}}{\overline{d_cO}} = \frac{\overline{O_0O}}{\frac{R}{2}},$$

ținând seamă de $\overline{d_a\alpha'} = \overline{d_at_a}$, $\overline{d_a\alpha_1} = \overline{d_aO}$ și analoagele, se scoate ușor relațiile

(4) $$\frac{\overline{d_aI_a}}{\overline{d_a\alpha_1}} = \frac{\overline{d_bI_b}}{\overline{d_b\beta_1}} = \frac{\overline{d_cI_c}}{\overline{d_c\gamma_1}} = \frac{3R}{\overline{OH}},$$

ceiace demonstrează că I_a, I_b, I_c *sunt situate pe o dreaptă* D, *paralelă cu* Δ.

Putem preciza rolul dreptei D în ABC. Avem relațiile

$$\frac{\overline{d_aB}}{\overline{d_aC}} = \frac{3R^2 - c^2}{3R^2 - b^2} \quad \therefore \quad \overline{d_aB} = -a\frac{3R^2 - c^2}{b^2 - c^2}$$

și

$$\overline{d_a\alpha'} = -\frac{aR^2}{b^2 - c^2}$$

și dacă ținem seama că $\overline{d_aB} + a + \overline{CI_a} = 3\overline{d_a\alpha'}$ obținem (în valoare absolută)

(5) $$\overline{I_aC} = \frac{ab^2}{b^2 - c^2} \quad \therefore \quad \frac{\overline{I_aC}}{\overline{I_aB}} = \frac{b^2}{c^2}.$$

Relaţia (5) ne arată că I_a se află pe dreapta lui *Longchamps* a lui T. *Dreapta punctelor de inflexiune este deci dreapta lui Longchamps a triunghiului format de tangentele inflexionale.*

Dacă notăm cu d' distanţa dela O_9 la D şi d_1 distanţa dela O_9, centrul conicei de focare O, H, înscrisă în T, la directoarea relativă la O, avem din (4)

$$d' = \frac{3}{4} d_1 .$$

4°. *Puncte remarcabile.*

Punctul dublu al cubicei (R) este imaginar, ceiace se poate uşor demonstra. Pentru aceia considerând un punct R pe curbă, să vedem câte hipocicloide (H) admit pe R ca punct de întoarcere. Fie Δ_1 o paralelă la Δ care împarte distanţa dela R la Δ începând dela aceasta în raportul $\frac{1}{3}$. Dreapta ωR tae Δ_1 în ω_1'. Atunci când ω se plimbă pe Δ, $\omega_1 \omega_1'$ trece mereu prin F, pe OR. Cunoscându-se ω_1, razele omoloage $O\omega_1$ şi $O\omega_1'$ sunt în omografie. Razele duble se construesc uşor cunoscând intersecţiile a 3 perechi de raze omoloage cu cercul de diametru OO_9. Fie ω şi η cele 2 intersecţii ale razelor duble, cu Δ. Dacă ω este centrul unei hipocicloide (H), vom arăta că η nu mai poate fi centrul alteia. Fie Δ_2 omotetica de raport $^1/_2$ a dreptei Δ în raport de O. Luând un punct x pe Δ şi notând cu λ unghiul $O_9 O x$, să construim în O unghiul

$$\widehat{O_9 O x'} = \frac{2}{3}\lambda \text{ şi apoi } \widehat{x' O x''} = \frac{\pi}{3} + \frac{\beta_a - 3\alpha_a}{3}$$

în sens invers lui λ, (x'' fiind pe Δ_2). Paralela din R la Ox'' tae Δ în x'''.

Se vede că atunci când λ creşte, x''' se depărtează de O_9 şi deci de x'. Când x' se mişcă dela ω spre O_9, x''' se deplasează dela ω în sens invers lui x'. O singură dată coincid x' şi x''' şi anume în ω.

Putem spune deci că *o singură hipocicloidă* (H) *admite* R *ca punct de întoarcere.*

D-l *A. Labrousse* a afirmat pe baza unei particularizări a teoremei generale referitoare la suprafeţele raţionale ale unor curbe unicursale, că (R) are un punct dublu. Se vede că în acest caz punctul dublu este imaginar.

Punctele R_a, R_b, R_c ale hipocicloidei lui *Steiner* (H_S) se obţin făcând în (3) şi (3'), $\lambda = 0$ — Pentru R_c de ex. avem din (3)

$$\omega = \frac{\pi}{3} + \frac{\beta_a - 3\alpha_a}{3} \text{ şi } \overline{O_9 R_c} = \frac{3}{2} R$$

Se vede că asimtota celor 2 ramuri care conţin punctele de inflexiune, face cu $O_9 R_c$ un unghiu egal cu $\frac{\pi}{3}$, adică este paralelă cu $R_b R_c$.

Puncte de întoarcere situate pe $O\omega$, se obţin atunci când $\omega_a = 0$, adică $\lambda = \frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\omega_1$ şi construcţia este foarte simplă.

Punctele de întoarcere ale lui (H), *tangentă dreptei d.* În acest caz (H) este determinată univoc, centrul ω fiind la intersecţia dreptelor Δ_i ale triunghiurilor T_i formate cu câte 3 din laturile patrulaterului (T, d)[2]. Construcţia se face ca la 1°.

Mai sunt şi alte puncte interesante pe (R) ca de ex. cele de întoarcere ale curbelor (H) care admit ca centre simetricele d_a', d_b', d_c' ale lui d_a, d_b, d_c faţă de O_9, care se obţin pentru $\lambda = -\left(\frac{\pi}{2} - \beta_a\right)$ etc. Ţin să remarc că *aceste hipocicloide sunt egale cu cele care ne dau punctele de inflexiune.*

Cu acestea, caracteristicele principale curbei (R) au fost studiate.

5° *Generarea cubicei* (R). Înainte de a încheia voi spune câteva cuvinte asupra unui mod de generare a curbei. (R) fiind unicursală, se poate alege o conică (C) tritangentă cubicei (de ex. hiperbola care admite ca asimptote două din asimptotele lui (R) şi tangentă acesteia în alt punct ce urmează a se determina). Dacă pe o tangentă fixă t a hiperbolei se iau 2 puncte fixe a, b, o tangentă variabilă cd tae ab în c. Fie c' conjugatul lui c faţă de a, b. Dreapta care uneşte un alt punct fix P situat în interiorul conicei (C) cu c', tae tangenta cd. în R, pe cubica (R).

---

[2]) *D. Barbilian.* Două proprietăţi ale patrulaterului. G. M. vol. XXXV pag. 285–287.

NOTA MATEMATICA

21. — *Asupra problemelor 2556, 2588 şi 2667.* Aceste probleme deşi sunt nişte relaţii algebrice, sunt în realitate nişte relaţii trigonometrice în care s'au înlocuit funcţiunile trigonometrice cu litere. Ne permitem să dăm mai jos soluţiile lor pe această cale.

1. Dezvoltând relaţia

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{tg}(a+b+c+d)=0,$$

obţinem identitatea trigonometrică

$$\text{(2)} \qquad \Sigma \operatorname{tg} a = \Sigma \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c.$$

Pentru a satisface relaţiei (1) putem lua

$$a=i(\lambda_1-\lambda_2),\quad b=i(\lambda_2-\lambda_3),$$
$$c=i(\lambda_3-\lambda_4),\quad d=i(\lambda_4-\lambda_1),$$

unde i este unitatea imaginară. Relaţia (2) devine

$$\text{(3)} \quad \Sigma \operatorname{tg} i(\lambda_1-\lambda_2)=\Sigma \operatorname{tg} i(\lambda_1-\lambda_2)\operatorname{tg} i(\lambda_2-\lambda_3)\operatorname{tg} i(\lambda_3-\lambda_4),$$

Dar cum: $\operatorname{tg} i\lambda = i \operatorname{th}\lambda$, unde $\operatorname{th}\lambda$ este tangenta iperbolică, avem

$$\operatorname{tg} i(\lambda_1-\lambda_2)=\frac{\operatorname{tg} i\lambda_1-\operatorname{tg} i\lambda_2}{1+\operatorname{tg} i\lambda_1 \operatorname{tg} i\lambda_2}=i\frac{\operatorname{th}\lambda_1-\operatorname{th}\lambda_2}{1-\operatorname{th}\lambda_1 \operatorname{th}\lambda_2},\ldots$$

şi punând: $\operatorname{th}\lambda_1=a_1,\ldots$, relaţia (3) devine, după ce simplificăm cu i în ambele părţi,

$$\text{(4)} \quad \Sigma \frac{a_1-a_2}{a_1a_2-1}=\Sigma \frac{(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_4)}{(1-a_1a_2)(1-a_2a_3)(1-a_3a_4)}.$$

Dacă împărţim relaţia (2) cu produsul

$$\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c \operatorname{tg} d,$$

relaţia devine

$$\Sigma \frac{1}{\operatorname{tg} a}=\Sigma \frac{1}{\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c}$$

de unde deducem că inversând în (4) fiecare fracţie cu inversa ei, obţinem o relaţie (4′) deasemeni adevărată. Relaţiile (4) şi (4′) constitue obiectul problemei 2556.

2. Considerăm inegalitatea cunoscută

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{cotg}^2 x+\operatorname{cotg}^2 y+\operatorname{cotg}^2 z \geqq 1$$

unde arcele x, y, z satisfac relaţiei

$$\text{(6)} \qquad x+y+z=\pi$$

(a se vedea de ex., *Culegere de probleme de tritrigonometrie* de *V. Cristescu*, vol. I, cap. XIX, pr. 27). Relaţia (6) este satisfăcută dacă luăm

$$x=\alpha-\beta,\quad y=\beta-\gamma,\quad z=\gamma-\alpha+\pi.$$

Punând: $\operatorname{tg}\alpha=a$, $\operatorname{tg}\beta=b$, $\operatorname{tg}\gamma=c$, avem

$$\operatorname{cotg} x=\frac{bc+1}{b-c},\ldots$$

încât identitatea (5) se scrie

$$\frac{(ab+1)^2}{(a-b)^2}+\frac{(bc+1)^2}{(b-c)^2}+\frac{(ca+1)^2}{(c-a)^2}\geqq 1.$$

Adunând la fiecare fracţie câte o unitate obţinem

$$\frac{(1+a^2)(1+b^2)}{(a-b)^2}+\frac{(1+b^2)(1+c^2)}{(b-c)^2}+\frac{(1+c^2)(1+a^2)}{(c-a)^2}\geq 4$$

care este inegalitatea ce formează obiectul problemei 2588.

3. Să considerăm trei arce α, β, γ definite prin relaţia

$$\text{(7)} \qquad \operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=1$$

sau, ceiace este totuna cu

$$\frac{\Sigma \operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{1-\Sigma\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=1$$

sau

$$\text{(8)} \qquad \Sigma \operatorname{tg}\alpha+\Sigma\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

Relaţia (7) spune însă că

$$\alpha+\beta+\gamma=\tfrac{1}{4}\pi+k\pi \qquad (k=\text{întreg})$$

şi deci

$$2\alpha+2\beta+2\gamma=\tfrac{1}{2}\pi+2k\pi.$$

Aplicând acestei relaţii tangenta, obţinem

$$\text{(9)} \qquad \Sigma \operatorname{tg} 2\alpha=1.$$

Relaţia (9) este deci condiţionată de (8). Dacă punem

$$\operatorname{tg}\alpha=x,\quad \operatorname{tg}\beta=y,\quad \operatorname{tg}\gamma=z,$$

atunci relaţia (8) devine

$$\Sigma \frac{4xy}{(1-x^2)(1-y^2)}=1$$

$$\text{(10)} \quad \therefore \quad \Sigma \frac{xy}{(1-x^2)(1-y^2)}=\frac{1}{4}$$

relaţie care va avea loc în ipoteza (8), care conform notaţiilor făcute, se scrie

$$\text{(11)} \qquad \Sigma x+\Sigma xy=1+xyz.$$

Demonstrarea identităţei (10) în ipoteza (11) face obiectul problemei 2667.

PROF. V. NEACSU

Nota precedentă consideră problemele 2556, 2588 și 2667 rezolvate Au rezolvat aceste probleme direct d-nii:

Problema 2556, *Dodu A. Eug.* (București) și *Mihăilescu C. Const.* (București).

Problema 2588 a fost rezolvată pe aceiași cale ca în nota precedentă de D-nii *Petcu Al. Val.*, (București) și *De Sabata I.*

Problema 2667, *Bălăuță M.* (Deva), *Breazu M.* (Deva), *De Sabata I.* (Beiuș), *Deutsch Em.* (P. T.), *Giurconiu M.* (P. T.) *Petcu Al. Val.* (București), *Pisanca N. I.* (Timișoara) și *Seracin E.* (P. T.).

Gh. Th. Gh.

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul LIV, No. 5, Ianuarie 1949. † Profesorul *Alexandru Pantazzi*, de *Al. V. Nicolescu*. Asupra unor teoreme a lui *Darboux*, de *C. Coșniță*. Asupra unor condiții necesare transformării în sateliți ai pământului a corpurilor lansate de pe pământ, de *C. Iacob*. Concursul „Gazetei Matematice" din 1949, de G-l *Gh. Buicliu*, *V. Claudian* și *G. D. Simionescu*. Note matematice. Probleme rezolvate și propuse.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 2478. — *Se consideră un triunghiu* B A C *și un punct* M. *De ce unghiu trebuie să se rotească triunghiul* A B C *în jurul punctului* A, *astfel ca latura* B C *să treacă prin punctul* M?

L-T C-DOR C. V. COSTACHESCU

Soluție. Fie D piciorul înălțimei coborîte din A pe B C. Luăm A D ca axă Ox și perpendiculara în A pe A D ca axă Oy. Fie A M distanța lui M dela A și μ unghiul formată de AM cu AD. Rotim triunghiul în sens direct în jurul lui A și notăm cu ω unghiul de rotație, adică unghiul format de AD cu Ox. Punctul D descrie un cerc cu centrul în A și de rază AD, având ecuația $x^2+y^2-\overline{AD}^2=0$. Latura B C rămâne tangentă la acest cerc. Fie ω_1 unghiul corespunzător poziției lui A D, când B C trece prin M. Vom determina pe ω_1 scriind că tangenta în D la cerc trece prin M.

Într'o poziție oarecare punctul D are coordonatele

$$x_1 = AD\cos\omega, \quad y_1 = AD\sin\omega$$

iar ecuația lui BC este

$$x\cos\omega + y\sin\omega - AD = 0.$$

Scriind că BC trece prin punctul M de coordonate $x_0 = AM\cos\mu$, $y_0 = AM\sin\mu$, obținem

$$\cos\omega_1\cos\mu + \sin\omega_1\sin\mu - \frac{AD}{AM} = 0,$$

sau

$$(1) \qquad \cos(\omega_1 - \mu) = \frac{AD}{AM}.$$

Din (1) se vede că trebuie să distingem trei cazuri:

1. AM > AD, adică M este exterior cercului cu raza AD În acest caz avem două soluții pentru ω_1.

2. AM=AD, adică M se află pe cerc. Avem o singură soluție, $\omega_1 = \mu$.

3. AM<AD, în care caz problema este imposibilă.

Au dat soluții bune d-nii: *Constantinescu G. Virgil* (Slatina-Olt), *Haret Sp. Radu* (București) și *Teodorescu P. Petre* (București).

A. Geier

Problema 2481. — *Să se stabilească relația*

$$P_m^n = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-n} (m-\alpha)\,P_{m-\alpha-1}^{n-1}$$

unde simbolul P_k^i *reprezintă suma produselor primelor k numere întregi pozitive luate câte i.*

E. VISA

Solutie dată de D-l *Teodorescu P. P.* (București). D-l *Vișa* stabilește în „Pitagora" anul V, no 4, pag. 102, următoarea formulă:

$$(1) \qquad P_k^i = P_{k-1}^i + k\,P_{k-1}^{i-1}.$$

În relația din enunț, cea mai mică valoare pe care o poate avea m este n. Pentru $m = n$, relația devine: $P_n^n = n\,P_{n-1}^{n-1}$ care e adevărată, ținând seama de (1) (unde putem face $i = k$; se ține seama de $P_r^q = 0$ $(q > r)$). Presupunând că relația se verifică pentru $m-1$, vom arăta că e adevărată pentru m. Prin ipoteză avem:

$$(2) \qquad \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-n-1} (m-\alpha-1)P_{m-k-2}^{n-1} = P_{m-1}^n.$$

Atunci:

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-n} (m-\alpha)\,P_{m-\alpha-1}^{n-1} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-n-1} (m-\alpha-1)\,P_{n-\alpha-2}^{n-1} +$$

$$m\,P_{m-1}^{n-1} = P_{m-1}^n + m\,P_{m-1}^{n-1} = P_m^n$$

ținând seama de (1) și (2).

Relația e astfel demonstrată.

Notă. Această problemă se găsește propusă, tot de d-l *E. Vișa*, și în „Pitagora", anul V, no. 4 pag. 132 sub: S 311 și rezolvată în anul V, no. 9 pag. 324—25. Acea soluție diferă de cea dată mai sus.

Problema 2495. — *Într'o uzină metalurgică se toarnă un corp sferic omogen din fontă. Modelul prevedea că din interiorul sferei* S_1 *să lipsească o altă sferă* S_2, *care putea fi înscris într'un con circular isoscel drept, cu vârful în centrul corpului sferic, iar cu baza tangentă sferei* S_1. *Se cere poziția centrului de greutate a corpului sferei, în funcție de* R_1 *raza sferei* S_1.

KINSKY IOAN

Soluție. Enunțul problemei este incomplet, deoarece în general raza sferei înscrise într'un „con circular drept isoscel" (adică con de rotație) nu se poate calcula numai în funcție de înălțimea conului.

Vom rezolva problema, presupunând raza sferei S_2 cunoscută.

Făcând o secțiune prin corpul dat, cu un plan ce trece prin linia centrelor O_1O_2, se obține figura a două cercuri tangente interior în punctul C_1 în care O_1O_2 taie cele două cercuri, cercul cu centrul în O_2 fiind înscris într'un triunghiu isoscel O A B, format de tangentele duse din O_1 la cercul O_2 cu tangenta în C la cercul O_2.

Observăm, că corpul poate fi născut geometricește prin rotația acestei figuri în jurul dreptei O_1O_2. Cum corpurile de rotație și omogene își au centrul de greutate pe axa de rotație, corpul nostru își are centrul de greutate pe dreapta O_1O_2, care ne va servi ca axă de referință, după ce alegem origina, o unitate de măsură și drept sens pozitiv $\overline{O_1O_2}$.

Notăm cu R_1 și R_2 razele sferelor S_1 și S_2, iar cu x abscisa centrului de greutate G.

Avem:

$$F_1 = \text{greutatea sferei } S_1 = \frac{4\pi R_1^3}{3}\delta_1$$

aplicată în O_1, de abscisă $x_1 = 0$,

$$F_2 = \text{greutatea sferei } S_2 = \frac{4\pi R_2^3}{3}\delta,$$

aplicată în O_2, de abscisă $x_2 = R_1 - R_2$, δ fiind densitatea fontei.

Cele două forțe fiind paralele și de sens contrar atribuim, de exemplu lui F_2, semnul minus și înlocuind în

$$x = \frac{F_1x_1 + F_2x_2}{F_1 + F_2},$$

se obține

$$x = \frac{R_2^3(R_2 - R_1)}{R_1^3 - R_2^3}.$$

În două cazuri x poate fi exprimat numai în funcție de R_1, și anume:

1. dacă triunghiul O_1AB. din a cărui rotație s'a născut conul, este dreptunghiu isoscel, sau

2. dacă triunghiul O_1AB este echilateral.

În aceste două cazuri avem:

$$(1^0) \qquad R_2 = \frac{R_1}{1+\sqrt{2}}, \qquad (2^0) \qquad R_2 = \frac{R_1}{3},$$

$$x = \frac{11 - 8\sqrt{2}}{7}R_1; \qquad x = -\frac{R_1}{39}.$$

Au rezolvat problema, fără a da indicații asupra poziției lui G față de O_1. D-nii: *Manolescu George* (P. T.). *Novac I. Ioan* (P. T.) și *Teodorescu P. Petre* (București).

A. Geier

Problema 2514. — *Să se rezolve ecuația*

$$|x^2 - 4| - 2|x^2 - 9| = 14 - x^2.$$

V. ALACI

Soluție. În această ecuație intervine noțiunea de modul, asupra căreia vom da — pentru corespondenții noștrii — unele lămuriri. În adevăr, dacă A este un număr real, atunci

$$(1) \qquad |A| = \begin{cases} A, & \text{dacă } A > 0 \\ 0, & \text{„ } A = 0 \\ -A, & \text{„ } A < 0. \end{cases}$$

Referindu-ne la ecuația dată, observăm că rădăcinele ecuațiilor,

$$x^2 - 4 = 0, \quad x^2 - 9 = 0,$$

sunt respectiv,

$$x = \mp 2, \quad x = \mp 3.$$

Acum considerăm șirul de intervale

$$-\infty < -3 < -2 < 2 < 3 < \infty$$

prin care facem să treacă în mod continu variabila x și avem:

1. Pentru,

(2) $-\infty < x < -3$, avem $x^2 - 4 > 0$, $x^2 - 9 > 0$

şi atunci în virtutea egalităţii (1), rezultă

$$|x^2-4|=x^2-4,\quad |x^2-9|=x^2-9,$$

astfel că ecuaţia dată, în acest caz, este echivalentă cu următoarea,

$$x^2-4-2(x^2-9)=14-x^2,$$

sau

$$14-x^2=14-x^2,$$

ecuaţie verificată pentru orice valoare a lui x — fiind o identitate — evident, cu restricţia din (2).

Prin urmare, orice număr din intervalul deferit de (2) este o soluţie a ecuaţiei date.

2°. Pentru $x=-3$, avem

$$x^2-4>0,\quad x^2-9\equiv 0.$$

astfel că,

$$|x^2-4|=x^2-4,\quad |x^2-9|=0,$$

iar ecuaţia dată devine

$$x^2-4=14-x^2,$$

ecuaţie verificată pentru $x=-3$.

Prin urmare, $x=-3$ este soluţie a ecuaţiei date.

3°. Pentru

$$-3<x<-2, \tag{3}$$

observăm că

$$x^2-4>0,\quad x^2-9<0$$

şi în virtutea lui (1), avem

$$|x^2-4|=x^2-4,\quad |x^2-9|=-(x^2-9)$$

astfel că ecuaţia dată devine

$$x^2-4+2(x^2-9)=14-x^2,$$

sau,

$$x^2=9,\quad \text{deci}\quad x=\mp 3,$$

valori care nu cad în intervalul (3), deci ecuaţia dată în acest caz, nu admite nici o rădăcină.

4°. Pentru $x=-2$, avem

$$x^2-4\equiv 0,\quad x^2-9<0$$

şi în virtutea lui (1) rezultă

$$|x^2-4|=0,\quad |x^2-9|=-(x^2-9),$$

astfel că ecuaţia dată devine

$$2(x^2-9)=14-x^2,$$

de unde

$$x=\frac{\pm\sqrt{96}}{3}\neq -2,$$

deci $x=-2$, nu este soluţie a ecuaţiei date.

5°. Pentru,

$$-2<x<2, \tag{4}$$

observăm că

$$x^2-4<0,\quad x^2-9<0$$

şi în virtutea lui (1), avem

$$|x^2-4|=-(x^2-4),\quad |x^2-9|=-(x^2-9),$$

astfel că ecuaţia dată devine

$$-(x^2-4)+2(x^2-9)=14-x^2,$$

de unde deducem

$$x=\pm\sqrt{14}\simeq\pm 3{,}74,$$

valori care nu sunt cuprinse în intervalnl (4), deci ecuaţia dată n'admite soluţii în acest caz.

6°. Pentru $x=2$, avem

$$x^2-4\equiv 0,\quad x^2-9<0$$

şi atunci

$$|x^2-4|=0,\quad |x^2-9|=-(x^2-9)$$

astfel că ecuaţia dată devine

$$2(x^2-9)=14-x^2,$$

de unde

$$x=\frac{\pm\sqrt{96}}{3}\neq 2,$$

deci $x=2$, nu este soluţie a ecuaţiei date.

7°. Pentru

$$<x<3, \tag{5}$$

observăm că

$$x^2-4>0,\quad x^2-9<0,$$

prin urmare

$$|x^2-4|=x^2-4,\quad |x^2-9|=-(x^2-9),$$

iar ecuaţia dată devine

$$x^2-4+2(x^2-9)=14-x^2,$$

de unde

$$x=\mp 3,$$

valori ce nu cad în intervalul (5). Rezultă că ecuaţia dată, în acest caz, n'admite soluţii.

8°. Pentru $x\equiv 3$, avem

$$x^2-4>0,\quad x^2-9\equiv 0,$$

prin urmare,

$$|x^2-4|=x^2-4,\quad |x^2-9|=0$$

iar ecuația dată devine

$$x^2 - 4 = 14 - x^2,$$

de unde,

$$x = \pm 3$$

și evident că numai soluția $x = 3$ convine problemei.

9°. În fine, pentru

(6) $3 < x < \infty$, avem

$$x^2 - 4 > 0, \quad x^2 - 9 > 0,$$

prin urmare

$$|x^2 - 4| = x^2 - 4 \quad |x^2 - 9| = x^2 - 9,$$

iar ecuația dată devine

$$x^2 - 4 - 2(x^2 - 9) = 14 - x^2,$$

sau

$$14 - x^2 = 14 - x^2,$$

ecuație verificată de orice valoare a lui x — fiind o identitate — evident, cu restricția din (6).

Prin urmare, orice număr din intervalul (6) satisface ecuația dată.

Din cele expuse până aci, rezultă că ecuația dată are o infinitate de soluții : toate acelea cuprinse în intervalul $(-\infty, -3)$, toate acelea cuprinse în intervalul $(3, +\infty)$ și inclusiv rădăcinele $x = -3$ și $x = 3$.

Observare. Am dat detailat soluția acestei probleme, pentru că ecuația din enunț este — pentru corespondenții noștrii — un gen nou de ecuație. Vedem că, de și ea este de gradul al 2-lea, admite totuși o infinitate de soluții, cuprinse în anumite intervale închise.

Soluție bună dată de d-l *Mărcuțiu Silviu* (P. T.); altă mai puțin bună dată de d-l *Neguț Ion* (Lic. Tg-Iiu).

S'au primit încă foarte multe soluții cu totul greșite, din necunoașterea noțiunei de modul.

Problema 2585. — *Să se rezolve ecuația*

$$sp\, x + \sin x = 2\, sp\, x \sin x.$$

V. ALACI

Soluție. Din cauza formulelor ce le vom folosi, suntem obligați să considerăm următoarele cazuri.

1°. *Cazul* $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

În acest caz, din *Trigonometria patratică*, avem

$$sp\, x = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x},$$

iar ecuația dată devine

$$\frac{\sin x}{\sin x + \cos x} + \sin x = \frac{2 \sin^2 x}{\sin x + \cos x},$$

care se descompune în ecuațiile

$$\begin{cases} \sin x = 0, & \text{deci } x = 0, \text{ soluție a ecuației date,} \\ \dfrac{1}{\sin x + \cos x} + 1 = \dfrac{2 \sin x}{\sin x + \cos x}. \end{cases}$$

Cum, în ipoteza noastră $\sin x + \cos x > 0$, a 2-a ecuație simplificată, devine

$$1 + \cos x = \sin x$$

sau,

(1) $$2 \cos^2 \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

de unde deducem

$$\cos \frac{x}{2} = 0, \quad \text{deci} \quad x = \pi$$

care nu este soluție nefiind în intervalul considerat.

Tot din (1) mai avem

$$\cos \frac{x}{2} = \sin \frac{x}{2}, \quad \text{sau} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) = \sin \frac{x}{2},$$

de unde rezultă soluția

$$x = \frac{\pi}{2}.$$

2°. *Cazul* $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$.

În acest caz, din *Trig. patratică* avem

$$sp\, x = \frac{\sin x}{\sin x - \cos x},$$

iar ecuația dată devine

$$\frac{\sin x}{\sin x - \cos x} + \sin x = \frac{2 \sin^2 x}{\sin x - \cos x},$$

care se descompune în ecuațiile

$$\sin x = 0, \quad \text{deci} \quad x = \pi$$

soluție a ecuației date în virtutea ipotezei, și

$$\frac{1}{\sin x - \cos x} + 1 = \frac{2 \sin x}{\sin x - \cos x}.$$

Fiindcă, în ipoteza noastră avem $\sin x - \cos x > 0$, ecuația 2-a devine

$$1 - \cos x = \sin x,$$

sau

$$2\sin^2\frac{x}{2}=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2},$$

deci

(2) $$\sin\frac{x}{2}=0 \quad \text{şi} \quad \sin\frac{x}{2}=\cos\frac{x}{2}.$$

Prima din ecuaţiile (2) ne dă

$$x=2k\pi, \qquad (k=0, 1, 2\ldots)$$

care nu-i soluţie a ecuaţiei, nefiind cuprinsă intervalul considerat. A 2-a ecuaţie din (2) se mai poate scrie

$$\sin\frac{x}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right),$$

care ne dă soluţia

$$x=\frac{\pi}{2}$$

valabilă pentru ecuaţia dată.

3°. *Cazul* $\pi\leqq x\leqq\frac{3\pi}{2}$. În acest caz avem

$$sp\,x=\frac{-\sin x}{\sin x+\cos x},$$

astfel că ecuaţia dată se mai poate scrie

$$\frac{-\sin x}{\sin x+\cos x}+\sin x=\frac{-2\sin^2 x}{\sin x+\cos x},$$

care se descompune în ecuaţiile

$$\sin x=0, \quad x=\pi$$

soluţie compatibilă cu acest caz, şi

$$\frac{-1}{\sin x+\cos x}+1=\frac{-2\sin x}{\sin x+\cos x},$$

dar fiindcă, $\sin x+\cos x<0$, rezultă

$$-1+\sin x+\cos x=-2\sin x$$

sau

$$1-\cos x=3\sin x,$$

*** (3) $$2\sin^2\frac{x}{2}=6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}.$$

De aci deducem,

$$\sin\frac{x}{2}=0,$$

prin urmare $x=2k\pi$, soluţie incompatibilă cu ipoteza.

Mai avem încă din (3) ecuaţia

$$\sin\frac{x}{2}=3\cos\frac{x}{2},$$

sau

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=3.$$

Căutând în tabela liniilor trigonometrice naturale şi efectuând calculul ce se impune, găsim

$$\frac{x}{2}\simeq 71^\circ,\ 33',\ 42'',$$

deci

$$x\simeq 143^\circ,\ 7'\ 22''$$

soluţie compatibilă cu ipoteza, pentru ecuaţia dată.

4°. *Cazul* $\frac{3\pi}{4}\leqq x\leqq 2\pi$. In acest caz avem,

$$sp\,x=\frac{-\sin x}{\sin x-\cos x},$$

astfel că ecuaţia dată se poate scrie

$$\frac{-\sin x}{\sin x-\cos x}+\sin x=\frac{-2\sin^2 x}{\sin x-\cos x},$$

care se descompune în ecuaţiile

$$\sin x=0, \quad \text{deci} \quad x=2\pi,$$

soluţie compatibilă cu acest caz, şi

$$\frac{-1}{\sin x-\cos x}+1=\frac{-2\sin x}{\sin x-\cos x},$$

dar fiindcă $\sin x-\cos<0$, rezultă

$$-1+\sin x-\cos x=-2\sin x,$$

sau,

$$1+\cos x=3\sin x$$

*** (5) $$2\cos^2\frac{x}{2}=6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}.$$

De aci deducem

$$\cos\frac{x}{2}=0, \quad \text{deci} \quad x=(2k+1)\pi,$$

care nu este soluţie a ecuaţiei date, nefiind cuprinsă în intervalul închis considerat. Mai avem încă din (5) ecuaţia

$$\cos\frac{x}{2}=3\sin\frac{x}{2},$$

sau

$$\operatorname{cotg}\frac{x}{2}=3,$$

deci arcul $\frac{x}{2}$, având în vedere relaţia (4), cu arcul din (4), astfel că

$$\frac{x}{2} \simeq 18^0,\ 26',\ 18''$$

deci

$$x = \simeq 36^0,\ 52',\ 36'',$$

care nu este soluție a ecuației, nefiind în intervalul considerat. De altfel se putea observa că în cadranul al 4-lea, ecuația dată nu admite soluție, fiindcă primul membru este negativ, iar cel de al 2-lea este pozitiv.

Au considerat numai primul caz d-nii: *Coțiu Aurel* (student, Cluj), *Neguț Ion* (Lic. Tg.-Jiu), *Petcu Valeriu* (Lic. Mihai Viteazul, București) și *Popa Pavel* (Lic. Oradea).

Au considerat toate cazurile, dar n'au găsit rezultatele de mai sus, d-nii: *Erdélyi Ioan* (P. T.) și *Pantea Alexandru* (Lic. Beiuș).

Problema 2616. — *Dacă* $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, a_{n+1}$ *sunt termenii unei progresii aritmetice cu rația* r, *să se arate că:*

$$\sum_{n=2}^{n} a_{n-1}\, a_n = \frac{a_{n-1}\, a_n\, a_{n+1} - a_0\, a_1\, a_2}{3r}$$

și mai general

$$S_p = \sum_{n=p}^{n} a_{n-p+1}\, a_{n-p+2} \ldots a_{n-1}\, a_n =$$

$$= \frac{a_{n-p+1}\, a_{n-p+2} \ldots a_{n+1} - a_0 a_1 a_2 \ldots a_p}{(p+1)r}.$$

Că aplicație să se calculeze suma

$$\sum_{n=2}^{n} (4n^2 - 9)(4n^2 - 1).$$

D. BANDLER

Soluție. Problema nu este altceva decât un procedeu foarte cunoscut de însumări. Exercițiile 34 și 35 din „Cursul de Algebră Superioară" de *Th. Angheluță*, pag. 60, sunt tocmai problema de mai sus. Suma din aplicație se calculează scriind-o sub altă formă:

$$\sum_{n=2}^{n} (4n^2-9)(4n^2-1) = \sum_{n=2}^{n} (2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3) =$$

$$= \frac{1}{10}[(2n+5)(2n+3)(2n+1)(2n-1)(2n-3) + 1.3.5.7].$$

S'au primit soluții dela d-nii: *Breazu Mihai* (Deva), *Coțiu Aurel* (student, Cluj), *Deutsch Emeric* (Deva) și *Radu Corneliu* (Tg.-Mureș).

Gh. Silaș

Problema 2618. — *Să se formeze ecuațiile de gradul al 3-lea în* x *ale căror rădăcini* x_1, x_2, x_3 *verifică relația*

$$x_1 = x_3(a - x_3);\ x_3 = x_2(a - x_2);\ x_2 = x_1(a - x_1)$$

EUGEN VISA

Soluție. Ecuațiile căutate vor fi de forma:

$$x^3 - u\,x^2 + v\,x - w = 0 \tag{1}$$

unde avem: $u = \Sigma x_1$, $v = \Sigma x_1 x_2$, $w = x_1 x_2 x_3$.

Trebue să determinăm coeficienții u, v, w.

Facem suma relațiilor date prin enunț, apoi suma produselor acestora luate câte două, apoi produsul lor și ținând seamă de identități evidente, avem:

$$\Sigma x_1 = a\Sigma x_1 - \Sigma x_1^2 = a\,\Sigma x_1 - (\Sigma x_1)^2 + 2\,\Sigma x_1 x_2,$$

$$\Sigma x_1 x_2 = a^2 \Sigma x_1 x_2 - a\Sigma x\, x_2(x_1 + x_2) + \Sigma (x_1 x_2)^2,$$

$$x\ x\ x = x\ x\ x\,[a^3 - a^2\Sigma x_1 + a\Sigma x_1 x_2 - x_1 x_2 x_3].$$

Dar

$$\Sigma (x_1 x_1)^2 = (\Sigma x_1 x_2)^2 - 2\,x_1 x_2 x_3 \Sigma x_1,$$

$$\Sigma x_1 x_2 (x_1 + x_2) = \Sigma x_1 x_2 \Sigma x_1 - 3\,x_1 x_2 x_3$$

și înlocuim cu u, v, w, astfel că avem:

$$\begin{aligned} u &= a\,u - u^2 + 2\,v \\ v &= a^2 v - a\,u\,v + 3\,a\,w + v^2 - 2\,u\,w \\ w &= w(a^3 - a^2\,u + a\,v - w). \end{aligned} \tag{2}$$

Una din soluții corespunde cazului $w=0$, ceeace înseamnă că cel puțin o rădăcină e 0. Relațiile din enunț conduc în acest caz la soluția banală

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

și ecuația (1) este:

$$x^3 = 0.$$

Eliminând acest caz și simplificând ecuația 3-a cu w, scoțând pe w din ecuația 3-a și pe v din ecuația 1-a și substituindu-le în ecuația 2-a, obținem următoarea ecuație în u:

$$u^4 - 2(4a - 1)u^3 + (23a^2 - 8a - 1)u^2 - 2(14a^3 - 4a^2 - a - 3)u + 12a(a^3 - 1) = 0$$

care are următoarele rădăcini:

$$u_1 = 3(a-1);\ u_2 = 2a;\ u_{3,4} = \frac{1}{2}\left(3a + 1 \pm \sqrt{a^2 - 2a - 7}\right)$$

Vom avea patru cazuri de considerat.

Cazul I. $u_1 = 3(a-1)$, $v_1 = 3(a-1)^2$, $w_1 = (a-1)^3$

Ecuația (1) devine: $[x - (a-1)]^3 = 0$, sau

$$x_1 = x_2 = x_3 = a - 1,$$

care verifică enunțul.

Cazul II. $u_2 = 2\,a$, $v_2 = a(a+1)$, $w_2 = a^2 - 1$.

Ecuația (1) devine: $x^3-2ax^2+a(a+1)x-(a^2-1)=0$ care are rădăcinile:

$$x_1=a-1,\quad x_{2,3}=\frac{1}{2}\left[a+1\pm\sqrt{(a+1)(a-3)}\right],$$

care nu verifică relațiile din enunț. Acest caz trebue eliminat.

Cazul III, IV: $u_{3,4}=\frac{1}{2}(3a+1\pm\sqrt{a^2-2a-7})$,

$v_{3,4}=\frac{1}{2}(a^2+2a-1\pm(a+1)\sqrt{a^2-2a-7})$

$w_{3,4}=\frac{1}{2}(a^2-a-2\pm a\sqrt{a^2-2a-7})$.

Ecuațiile vor fi: $x^3-u_{3,4}x^2+v_{3,4}x-w_{3,4}=0$.

Aplicație. Pentru $a=4$ găsim ecuațiile:

$$x^3=0,\quad (x-3)^3=0$$

$x^3-6x^2+9x-3=0$ și $x^3-7x^2+14x-7=0$.

Au rezolvat problema d-nii: *Breazu Mihai* (Deva), *De Sabata P. Ioan* (Beiuș).

Gh. Silaș

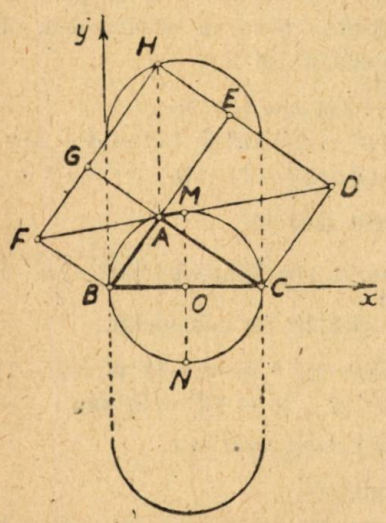
Problema 2621. — *Vârfurile* B, C *ale unui triunghiu dreptunghiu sunt fixe, iar vârful* A *al unghiului drept este variabil. Fie* CDEA, BFGA *patratele construite respectiv pe laturile* AC, AB *în exteriorul triunghiului. Se cere:*

1. *Să se afle locul geometric al intersecției dreptelor* DE, FG.

2. *Să se demonstreze că dreapta* DF *trece printr'un punct fix.*

GH. DUMITRESCU

Soluție geometrică: 1. Fie H punctul de intersecție al dreptelor DE și FG. Triunghiurile dreptunghice BAC și HEA sunt egale având catetele egale. Rezultă: HA=BC=const. și $\sphericalangle EAH=\sphericalangle ACB$. Din ultima egalitate, având și EA ⊥ AC, deducem HA ⊥ BC. Prin urmare H se se obține din A printr'o translație de amplitudine BC și perpendiculară pe BC. Locul lui H se va compune din două semicercuri (după poziția punctului A față de diametrul BC), obținute printr'o translație de amplitudine BC, perpendicular pe BC, a celor două semicercuri în care diametrul BC împarte cercul dat, translațiile lor făcându-se în sensuri opuse.



2) Vom demonstra mai întâi că punctele F, A, D sunt colineare. In adevăr avem, unind pe A cu D și cu F:

$$\sphericalangle DAC+\sphericalangle CAB+\sphericalangle BAF=45^0+90^0+45_0=180^0.$$

Fie acum M punctul unde dreapta DF taie a doua oară cercul. Avem:

$$45^0=\sphericalangle CAD=\sphericalangle CAM,$$

din care rezultă arc CM = 90°, adică prin M situat la un sfert de cerc de C, trec toate dreptele FD.

Pentru A situat sub diametrul BC al cercului, vom avea ca punct fix N, diametral opus cu M.

Soluție analitică: Luăm BC ca axă xx' și perpendiculara în punctul B pe BC, ca axă yy'. Fie α unghiul pe care-l face dreapta BC cu Bx. Vom avea următoarele ecuații:

(AC) $y=x\operatorname{tg}\alpha$; (cercul ABC) $x^2+y^2-2rx=0$

Avem următoarele coordonate:

$$C(2r,0),\ A[r(1+\cos 2\alpha),\ r\sin 2\alpha].$$

Unghiul α are valori cuprinse în intervalul $[-90^0+90^0]$. Pentru calcularea coordonatelor punctelor D și F vom separa cazurile când α are valori pozitive și negative.

Cazul I. $\alpha>0$. Găsim următoarele coordonate

$$D[r(2+\sin 2\alpha),\ r(1-\cos 2\alpha)],$$
$$F[-r\sin 2\alpha,\ r(1+\cos 2\alpha)],$$

1. Putem scrie acum ecuațiile dreptelor DE și FG, la intersecția cărora se află punctul H.

(DE) $y-r(1-\cos 2\alpha)=-\operatorname{cotg}\alpha[x-r(2+\sin 2\alpha)]$

(FG) $y-r(1+\cos 2\alpha)=\operatorname{tg}\alpha(x+r\sin 2\alpha)$.

Dacă am elimina parametrul α între ecuațiile acestea, am obține ecuația locului, care ar trebui verificat dacă este soluție în întregime sau nu. Pentru a înconjura verificările vom rezolva ecuațiile de mai sus în raport cu x și y.

Pentru ușurarea calculului vom nota: $\sin 2\alpha=u$ și $\cos 2\alpha=v$. Ținând seamă că avem:

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$$

$$\text{şi } u^2+v^2=1$$

ecuaţiile de mai sus devin:

$$(1+v)x+uy=2r(u+v+1)$$
$$ux-(1+v)y=-2r(1+v).$$

Acest sistem ne dă soluţia:

$$x=r(1+v)=r(1+\cos 2\alpha)$$
$$y=ur+2r=r\sin 2\alpha+2r.$$

Examinând această soluţie observăm că avem

$$x_H=x_A \text{ şi } y_H=y_A+2r,$$

unde x_A = abscisa lui A, ceeace înseamnă că H se obţine din A printr'o translaţie de amplitudine $2r$, în semnul y-ilor pozitivi, rezultat găsit şi obţinut din semicercul superior diametrului BC prin translaţia amintită. Ecuaţia cercului din care face parte acest semicerc se obţine din soluţia de mai sus eliminând pe α:

$$(x-r)^2+(y-2r)^2=r^2.$$

2. Ecuaţia dreptei DF este:

$$y-r(1+\cos 2\alpha)=\frac{-\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}(x+r\sin 2\alpha)$$

care, cu notaţiile de mai sus şi după efectuarea calculelor devine: $(y-r)(1+u)+(x-r)v=0$ care trece totdeauna prin punctul $(M\,r,\,r)$.

Cazul II: $\alpha<0$. Procedând absolut analog găsim următoarele coordonate:

$$D\,[r(2-\sin 2\alpha),\ r(-1+\cos 2\alpha)];$$
$$F\,[r\sin 2\alpha,\ -r(1+\cos 2\alpha)]$$

şi pentru punctul H

$$H\,[r(1+\cos 2\alpha),\ r\sin 2\alpha-2r]$$

adică

$$x_H=x_A \text{ şi } y_H=y_A-2r$$

obţinem astfel al doilea semicerc, simetricul primului faţă de BC, constituind a doua parte a locului cerut.

Ecuaţia dreptei FD se scrie în acest caz

$$v(x-r)+(u-1)(y+r)=0,$$

şi se vede că trece prin punctul $N(r,\,-r)$.

S'au primit soluţii dela d-nii: *Breazu Mihai* (Deva), *Deleanu Aristide* (Bucureşti), *Deutsch Em.* (P. T.), *Filipescu Aurel* (Constanţa), *Manoilă Dan* (P. T.), *Petcu Valeriu*, *Popovici Const.* (Bucureşti), *Purcea Ion* (Caracal) *Radu Corneliu* (Tg.-Mureş).

Gh. Silaş

Problema 2625. — *Se cer patratele de forma* $abcdefdef$, *ştiind ca* $4\,abc=def$.

IONEL N. PISANCA

Soluţia. Numărul dat se mai scrie şi astfel:

$$N=10^6\,abc+4.10^3\,abc+4\,abc$$

sau

$$N=(10^3+2)^2.abc$$
$$N=1002^2.abc.$$

Pentruca numărul N să fie un pătrat perfect, trebuie ca abc să fie un pătrat perfect. Dar abc nu poate să fie mai mare decât 225, căci conform enunţului împătritul lui abc este un număr de trei cifre.

Putem lua deci pentru abc, dacă nu considerăm soluţiile formale, numai următoarele patrate formate din trei cifre; 100, 121, 144, 169, 196, 225. Problema admite următoarele soluţii:

$10020^2=100400400$ $\quad$ $13026^2=169676676$
$11022^2=121484484$ $\quad$ $14028^2=196784784$
$12024^2=144576576$ $\quad$ $15030^2=225900900$

Soluţii date de D-nii *Popa F. Pavel* (Oradea) şi *Tibăr I. Aurel* (Constanţa); D-nii *Deutsch Emeric*, *Petcu Al Valeriu* şi *Tămăşescu Virgil* au mai dat afară de soluţiile de sus şi toate soluţiile formale. D-l *Purcea M. Ion* (Caracal), a dat două soluţii şi o soluţie formală. D-nii *Constantinescu I. Gheorghe* (Slatina) şi *Breazu Mihai* (Deva) au dat câte două soluţii şi D-nii *Corneliu S. Radu* (Tg.-Mureş) şi *Giurconiu Mihai* (Timişoara) câte o soluţie.

M. Neumann

Problema 2646. — *Să se găsească un patrat de cinci cifre ştiind că se obţine prin adunarea unui patrat perfect, cu un cub perfect.*

IONEL PISANCA

Soluţie. Vom avea de rezolvat în numere întregi şi pozitive ecuaţia:

(1) $$x^2=y^2+z^3$$

cu condiţia $10.000\leqq x^2<100.000$ sau

(2) $$100\leqq x\leqq 316.$$

Deoarece avem $z^3\leqq x^2<100.000$, va trebui să avem

(3) $$z\leqq 46.$$

Cum s'a arătat în R. M. T. anul XXVII, Nr. 1?, pag. 167 scriem ecuaţia (1) sub forma

$$z^3 = (x+y)(x-y).$$

Facem substituţiile: $x+y=m$; $x-y=n$ şi vom avea:

$$(4) \qquad x=\frac{m+n}{2},\quad y=\frac{m-n}{2},\quad z^3=mn.$$

Pentru a rezolva problema rămâne să determinăm numerele m şi n, care trebue să îndeplinească următoarele condiţiuni:

1) Să fie de aceeaşi paritate, ca x şi y să rezulte întregi.

2) $200 \leq m+n \leq 632$, cum rezultă din (2). Vom elimina cazul banal $z^3=0^3=0$, care ne conduce la ecuaţia $x^2=y^2$ ale cărei soluţii sunt: $x^2=100^2$, $101^2,\ldots,316^2$, adică toate patratele perfecte de cinci cifre.

Pentru a determina pe m şi n, vom considera pe rând cuburile 1^3, $2^3,\ldots,46^3$, care le vom descompune în toate modurile posibile în câte doi factori m şi n care să îndeplinească condiţiile de mai sus şi apoi cu formulele (4) vom obţine soluţiile.

Rezultatele, aranjate în ordinea mărimii, sunt:

$105^2=11.025=91^2+14^3=55^2+20^3=42^2+21^3$,
$112^2=12.544=104^2+12^3$, $118^2=13.924=10^2+24^3$,
$119^2=14.161=70^2+21^3$,
$120^2=14.400=105^2+15^3=80^2+20^3=24^2+24^3$,
$123^2=15.129=120^2+9^3$, $125^2=15.625=0^2+25^3$,
$127^2=16.129=123^2+10^3$, $129^2=16.641=127^2+8^3$,
$132^2=17.424=60^2+24^3$, $136^2=18.496=120^2+16^3$,
$140^2=19.600=76^2+24^3$, $141^2=19.881=109^2+0^3$,
$143^2=20.449=99^2+22^3$, $147^2=21.609=141^2+12^3$,
$153^2=23.409=136^2+17^3$, $154^2=23.716=42^2+28^3$,
$155^2=24.025=101^2+24^3$, $161^2=25.921=63^2+28^3$,
$162^2=26.244=81^2+27^3$, $165^2=27.225=15^2+30^3$,
$168^2=28.224=140^2+24^3$, $171^2=29.241=153^2+18^3$,
$172^2=29.584=171^2+7^3$, $179^2=32.041=71^2+30^3$,
$185^2=34.225=158^2+21^3=85^2+30^3$,
$190^2=36.100=171^2+19^3$,
$192^2=36.864=183^2+15^3=64^2+32^3$,
$195^2=38.025=143^2+26^3=105^2+30^3$,
$209^2=43.681=88^2+33^3$,
$210^2=44.100=190^2+20^3=174^2+24^3=35^2+35^3$,
$216^2=46.656=0^2+36^3$, $218^2=47.524=214^2+12^3$,
$223^2=50.176=168^2+28^3$, $225^2=50.625=63^2+36^3$,
$231^2=53.361=210^2+21^3=132^2+33^3$,
$232^2=53.824=200^2+24^3$,
$234^2=54.756=109^2+35^3=90^2+36^3$,
$249^2=62.001=237^2+18^3$, $251^2=63.001=249^2+10^3$,
$253^2=64.009=231^2+22^3=3^2+40^3$,
$255^2=65.025=195^2+30^3$, $258^2=66.564=242^2+20^3$,
$260^2=67.600=252^2+16^3=60^2+40^3$,
$270^2=72.900=162^2+36^3$, $273^2=74.529=21^2+42^3$,
$276^2=76.176=253^2+23^3$, $277^2=76.729=223^2+30^3$,
$280^2=78.400=120^2+40^3$, $287^2=82.369=91^2+42^3$,
$288^2=82.944=224^2+32^3$, $291^2=84.681=195^2+36^3$,
$295^2=87.025=245^2+30^3$, $297^2=88.209=55^2+44^3$,
$300^2=90.000=276^2+24^3$, $309^2=95.481=66^2+45^3$,
$314^2=98.596=186^2+40^3$, $315^2=99.225=90^2+45^3$.

S'a primit o soluţie bună dela d-nul *Deutsch Emeric*. D-nul *Tibăr I. Aurel* (Constanţa) a găsit 14 soluţii.

Au găsit câte o singură soluţie d-nii: *Dodu Eugen* (Bucureşti), *Coatu N.* şi *Breazu Mihai* (Deva).

Gh. Silaş

Problema 2550. — *Se dă un triunghiu isoscel* ABC(AB=AC). *Să se arate că:*

1. *Cercul ce trece prin* A, C *şi este tangent în* C *la* BC *este egal cu cercul circumscris triunghiului* ABC.

2. *Cercul ce trece prin* A, C *şi este tangent în* A *la* AB *trece prin centrul triunghiului* ABC. *Fie* ABC *un triunghiu oarecare, în care se duc cercurile ce trec prin* (A, C), (A, B) *şi sunt tangente în* C, B *laturii* BC, *precum şi cercurile ce trec prin aceleaş perechi de puncte şi sunt tangente respectiv la* AB, AC.

1. *Să se arate că raza cercului* ABC *este medie proporţională între razele primelor două cercuri.*

2. *Să se deetrmine relaţia dintre unghiurile triunghiului* ABC, *astfel ca ultimele două cercuri să treacă prin centrul triunghiului* ABC.

3. *Să se extindă, atât cât este posibil, la tetraedru proprietăţile precedente.*

CEZAR COSNITA

Soluţie. 1. Fie B' mijlocul laturii AC, O_1 centrul cercului ce trece prin A, C şi este tangent în C la BC şi O centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Atât O_1 cât şi O se află pe mediatoarea laturii AC. O_1 se mai află pe perpendiculara în C la BC, iar O pe mediatoarea laturii BC, care este şi înălţimea şi bisectoarea dusă din vârful A. Deci $AO \parallel CO_1$.

Triunghiurile dreptunghice OB'A şi O_1B'C

sunt egale că având $AB' = B'C$ şi unghiurile cuţite egale ca alterne interne.

Rezultă că $O_1C = OA$, deci cercurile sunt egale. Fie O_2 centrul cercului ce trece prin A, C şi este tangent în A la AB. Vom arăta că $O_2O = O_2A$.

Într'adevăr avem:

$$\sphericalangle OAO_2 = \sphericalangle BAO_2 - \sphericalangle BAO = 90^0 - \tfrac{1}{2}A$$

$$\sphericalangle AOO_2 = 90^0 - \sphericalangle AOB' = 90^0 - \tfrac{1}{2}A.$$

Deci triunghiul AO_2O este isoscel, adică $O_2O = O_2A$. Cercul O_2 trece prin O.

Cazul triunghiului oarecare.

1, Fie O_c şi O_b, R_c şi R_b centrele şi razele cercurilor ce trec prin (A, C), (A, B) şi sunt tangente în C şi B laturii BC şi A', B', C', mijloacele laturilor triunghiului ABC.

Unim pe A cu O. Vom arăta că perechile de triunghiuri

$$(\Delta BO_bC' \text{ şi } \Delta OB'A),$$
$$(\Delta CO_cB' \text{ şi } \Delta OC'A)$$

sunt asemenea.

Într'adevăr se ştie că $\sphericalangle AOB' = \sphericalangle B$.

Apoi avem $\sphericalangle BO_bC' = \sphericalangle B$, ca unghiuri cu laturile perpendiculare. Rezultă că $\sphericalangle AOB' = \sphericalangle BO_bC'$ adică prima pereche de triunghiuri dreptunghice sunt asemenea. În mod analog avem

$$\sphericalangle AOC' = \sphericalangle CO_cB' = C,$$

adică şi a doua pereche de triunghiuri dreptunghice, sunt asemenea.

Scriind în fiecare pereche proporţionalitatea laturilor şi ţinând seamă de notaţiile obişnuite, vom avea:

$$\frac{R_b}{c} = \frac{R}{b} \text{ şi } \frac{R_c}{b} = \frac{R}{c}.$$

Înmulţind aceste două relaţii obţinem $R_bR_c = R^2$

Q. E. D.

2. Fie O_1 şi O_2 centrele cercurilor ce trec prin (A, B), (A, C) şi sunt tangente în A respectiv la AC şi AB.

Pentru ca cercul cu centrul O_1 să treacă prin O trebue să avem:

$$O_1O = O_1A,$$

adică triunghiul O_1OA să fie isoscel, trebuind să existe următoarea egalitate între unghiuri:

$$\sphericalangle O_1OA = \sphericalangle O_1AO.$$

Dar avem

$$\sphericalangle O_1AO = \sphericalangle CAO_1 - \sphericalangle CAO =$$
$$(90^0 - \sphericalangle AOB') = \sphericalangle AOB' = \sphericalangle B, \ \sphericalangle O_1OA = C.$$

Deci trebue să avem B=C. Dacă această relaţie există, atunci ştim din prima parte a problemei că şi cercul de centru O_2 va trece prin O. Deci relaţia cerută este B=C.

Nici un corespondent n'a extins proprietăţile precedente la tetraedru. Redacţia aşteaptă acest lucru pentru a fi publicate sub forma de note.

Au rezolvat problema d-nii: *Bogoevici I. Nic.* (Caransebeş), *Deutsch Emeric* (*P.* T.), *Manoilă Dan* (Constanţa), *Radu Corneliu* (Tg.-Mureş).

Gh. Silaş

PROBLEME PROPUSE[1]

2654[2] — Pe laturile unui triunghiu ABC, se iau punctele A_1, B_1, C_1. Există un singur triunghiu $A_2B_2C_2$, înscris în ABC, ale cărui laturi să întâlnească pe acelea ale lui $A_1B_1C_1$ pe laturile lui ABC.

M. Ghermanescu

2705*. — Să se determine cifrele diferite între ele a, b, c, d astfel încât numerele:

$$M = abc; \quad N = abcd; \quad P = bc$$

să satisfacă relaţia: $M^2 = N^2 + P^2$.

Corneliu Popescu

2706. — Să se calculeze limita expresiei

$$E = \frac{x\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x-1} - 3x + 2}{x\sqrt{x+2} + 14\sqrt{x+2} - 6x - 20},$$

pentru $x = 2$.

C. Ionescu-Ţiu

[1]) Problema 2104 se anulează ne având nici un sens.

[2]) Problema publicată cu acest număr fiind cunoscută, se anulează şi se înlocuieşte cu prezenta.

2707, Dacă $a>1$ şi $p>1$ întreg, să se arate că şirul

$$u_n = \frac{}{\sqrt[p]{a(a^{p-1}-1)}+\sqrt[p]{a(a^{p-1}-1)}+\cdots+\sqrt[p]{a(a^{p-1}-1)}},$$

unde numărul radicalilor suprapuşi este n, are o limită. Să se determine această limită.

PETRE TEODORESCU

2708. — Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} (x+y+z+t)^2-4(yz+yt+zt)=2a \\ (x+y+z+t)^2-4(xz+xt+zt)=2b \\ (x+y+z+t)^2-4(xy+xt+yt)=2c \\ (x+y+z+t)^2-4(xy+xz+yz)=2d. \end{cases}$$

VALERIU PETCU

2709. — Dacă $a<b$, se cere să se stabilească dubla inegalitate,

$$1+a^2<\frac{b-a}{\operatorname{arc\,tg}\frac{b-a}{1+ab}}<1+b^2,$$

luând cel mai mic arc pozitiv pentru numitorul expresiei din mijloc. Să se verifice pentru $a=1$, $b=2$.

V. ALACI

2710. — In triunghiul ABC fie O centrul cercului circumscris şi D diametral opusul lui C. Să se arate că $\sphericalangle$ DBO este egal cu $\sphericalangle$ BAC.

N. N. MIHALEANU

2711* — În planul unui triunghiu ABC se consideră două puncte M şi N. Dreptele MC şi NP se taie într'un punct P. Să se arate că paralele duse prin M şi N respectiv la AC şi AB se întâlnesc într'un punct I situat pe AP.

GH. TH. GHEORGHIU

2712. — Într'un triunghiu oarecare ABC, înscris în cercul O, perpendicularele în B şi C respectiv pe AB şi AC se întâlnesc în A_1. Analog se construesc punctele B_1 şi C_1. Fie A_2, B_2, C_2, picioarele perpendicularelor din A_1, B_1, C_1, respectiv pe BC, CA, AB. Să se arate că:

1. Triunghiurile ABC, $A_1B_1C_1$ sunt egale.
2. Dreptele A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sunt concurente.
3. Dreptele AA_2, BB_2, CC_2 sunt concurente.

EMERIC DEUTSCH

2713. — Se dă un patrat ABCD (AC, BD, diagonale). Se ia simetricul A' a lui A în raport cu B şi simetricul C' a lui C în raport cu D. Perpendiculara din A pe A'C' taie pe BC în B'. Simetrica lui BC' în raport cu BC taie pe A'C' în E. Paralela din B la AC taie pe DC în N şi pe AC' în M.

Să se arate că:

1. Punctele A, B, E, N, B', C' sunt conciclice.
2. Dacă I şi J sunt intersecţiile dreptelor C'B, C'A' cu AC, atunci avem relaţia:

$$(\overline{BM}\cdot\overline{AI}+\overline{C'M})(\overline{BN}\cdot\overline{AJ}-\overline{C'N})=(\overline{BN}\cdot\overline{AJ}+\overline{C'N})(\overline{BM}\cdot\overline{AI}-\overline{C'M}).$$

VASILE NEACSU

2714. — Fie AB axa mare a unei elipse cu centrul în O şi (C) cercul ei principal. Tangenta dintr'un punct variabil M la elipsă, întâlneşte cercul (C) în punctele P şi Q. Se cere locul intersecţiei dreptei AQ cu tangenta în P la (C). Să se compare rezultatul cu problema 5100 rezolvată la pag. 437 Vol. XLV, „*Gazeta Matematică*".

G-L GH. BUICLIU

ERATĂ.

In articolul din N-rile 9 şi 10 c. se vor face rectificările:

Pag. 135. col. I, rândul 2 de jos, în loc de 1, se va ceti -1.

Pag. 138, col. I, rândul 3, în loc de $m+2$, se va ceti $m+1$.

Pag. 138, col. I, rândul 5, în loc de $m+1$, se va citi $m+2$.

Pag. 156, în tabloul de sub *cazul 9*, valoarea lui y' corespunzătoare lui $x=\infty$, este 1, iar nu ∞.

TABLA DE MATERII

I. ARTICOLE

a) Aritmetică.

D. Pompeiu Despre explicație în Matematice . 65
„ „ Algebră și Aritmetică 185

b) Geometrie.

N. N. Mihăileanu Tetraedrul ortocentric și grupul ortocentroidal 17
M. Vincenzo G. Gavallaro La gènèration plus naturelle des cercles de Neuberg par les segments Toricelliens, etc 33
M. Vincenzo G. Cavallaro Sur les triangles harmoniques 171

c) Trigonometrie.

V. Alaci Relații remarcabile între elementele unui triunghiu 49

d) Algebră superioară.

V. Alaci O metodă pentru a construi anumite clase de funcții care au aceeași derivată 2
G. Iuga Șiruri de forme ternare reprezentate prin determinanți . . . 81
E. Arghiriade Observațiuni asupra teoremei lui Rolle 113

e) Geometrie analitică.

E. Arghiriade Asupra teoremei lui Terquem 5
Maria Neumann Discuția sistemului format de trei ecuații liniare cu trei necunoscute prin observațiuni geometrice 19
Mircea V. Soare Axe de simetrie la cubice . . 66
A. Vișa Asupra cubicelor circulare și iperbolice - echilatere unicursale drepte 133, 153,
Lt.-Col. M. Focșeneanu. O cubică remarcabilă . . 186

f) Analiză Matematică.

V. Alaci Asupra unghiurilor asociate ale unui triunghiu 169

g) Mecanică.

C. Costăchescu Generalizarea unei probleme de Cinematică Aero-Navală . . . 79

II. REDACȚIONALE

* * * Comitetul de conducere al Revistei Matematice din Timișoara 1, 2
* * * Inștiințare asupra concursului instituit de Revista Matematică din Timișoara 9, 10
* * * Inștiințare asupra premiului acordat 24

III. NOTE MATEMATICE*)

a) Aritmetica și Teoria Numerelor.

6*) **O. N. Țino** O altă soluție a problemei 2394 53
7 **A. Golden** Sur la résolution de la congruence 71
9 **I. N. Constantinescu** Despre explicație în Matematică 98

b) Geometrie.

20 **I. I. Stamate** Asupra tangentelor la cercurile cari au ca diametre laturile unui triunghiu oarecare 175

c) Algebră.

1. **V. Alaci** Studiul unei funcții 8
2. **V. Ghițescu** Asupra unei note 22
4. **V. Alaci** Studiul unei funcții simplu-discontinue 23
8 **E. Deutsch** O simplificare 86
10. **A. Gloden** Sur un système diophantien . . 99
13. **K. E. Roth** Asupra manualului de cl. VIII, algebră, de prof. Hollinger . . 117
14. **C. Ionescu-Țiu** Asupra unor identități . . . 138
17. **N. N. Mihăileanu** Indentități algebrice . . , 158
18. **I. N. Constantinescu** Funcții trigonometrice inverse circulare și patratice care au aceeași derivată 159
19. **I. N. Constantinescu** Asupra unei clase de identități algebrice 174
21. **N. Neacșu** Asupra problemelor 2556, 2588 și 2667. 189

d) Geometrie analitică.

3. **P. P. Teodorescu** Asupra problemei 2366 . . 22
15. **Maria Neumann** Asupra relației lui Laguerre 138

e) Trigonometrie.

11. **I. Rizescu** Asupra unor sume trigonometrice 99
12. **E. Vișa** Asupra unor sume trigonometrice 115

f) Analiză Matematică.

5. **V. Alaci** Desvoltare in serie a funcției $f(x)=\text{arc}\,sp\,x$, $0\leq\text{arc}\,sp\,x\leq\frac{\pi}{2}$ . . 37

IV. BIBLIOGRAFIE

a) Articole.

R. Bădescu și Fl. Bărbulescu Trasarea marginei comunei și rezultate obținute la plugurile Reșița 54
R. Bădescu și Fl. Bărbulescu Relații matematice în studiul răsturnării brazdei de către plug 54
R. Bădescu O problemă de actualitate . . 54

*) In această coloană sunt înscrise numerele de ordine ale notelor.

R. Bădescu Evoluția matematicelor și unele aplicațiuni biologice 54

M. St. Botez Studiul Geometriei descriptive acum o sută de ani în România 87

M. Șt. Botez Contribuție pentru o simplificare a sistemului de proecție Monge într'un caz special 87

M. St. Botez † Nicolae Abramescu 88

M. St. Botez Sur une nouvelle Géométrie cotée 77

V. G. Cavallaro Trigonometria patratica . . . 100

V. G. Cavallaro Sulla Nota, Pentagonno regolare e dodecaedro regolare 100

V. G. Cavallaro Sulla formula che exprime una distanza variabile in funzione di tre distanz assegnate . . . 100

V. G. Cavallaro Sul centro di gravita del semicerchio eterogeneo con denzità proporzionale alla distanza dal centro 100

V. G. Cavallaro Fattoriale del triangole e dei poligoni 100

V. G. Cavallaro Tetraedro tirettangolo 100

I. G. Murgulescu und E. Latiu Refraktometrische Methoden für die Analyse von Lösungen 39

I. G. Murgulescu und Filofteia Dobrescu Die quantitative Fällung von Blei als basisches Bleisalicylat 39

I. G. Murgulescu, Zur theorie der Oxi-Reductionsmethoden der Mass-Analyse . . 87

P. Sergescu, La Littérature mathématique dans la première période (1665—1701) du „Journal des Savants“ . . . 10

P. Sergescu, Documentation et informations. 10

P. Sergescu, La vie et l'oeuvre de Gaspard Monge 10

L. Toscano, Una proprietà della Concoide de Nicomede 177

L, Toscano, Sui triangli armonici. 176

b) Cărți și cursuri apărute.

R. Bădescu și C. Naneș. Culegere de probleme technice propuse la examele de Matematici generale și Mecanică 54

c) Reviste.

Annales Scientifiques de L'Uuiversité de Jassy. . 176

Bulletin de Science et technique de la Polytechnique de Timișoara 87

Collоquiume Mathematicum. 24

Gazeta Matematică 10, 24, 39, 54, 72, 87, 100, 118, 139, 160, 176, 190

Ruarterly of Applied Mathematies 24

Societatea Română de Științe, Secția Matematică. 160

V. ERATA.

— Completarea enunțului problemei Nr. 2569. . . 32

— Completarea enunțului problemei Nr. 2601 . . 32

— Rectificarea problemei Nr. 2626. 80

— Rectificarea problemei Nr. 2436 96

— Rectificări la articolul „Axe de simetrie la cubice“ publ. în Nr. 5 pag. 65 96

— Rectificarea articolului „Asupra cubicelor circulare și iperbolice-echilatere unicursale drepte“ publ. în N-rile 9 și 10. 200

— Rectificarea problemei 2623 112

— Rectificarea problemei 2637 112

— Rectificarea numărului problemei 2436* publicată în Nr. 5. 112

— Rectificări la Nr. 7 al R. M. T. 128

— Rectificarea problemei Nr. 2665 148

— Rectificarea problemei Nr. 2671 148

— Rectificarea problemei Nr. 2673* 148

— Rectificarea problemei Nr. 2674 148

— Rectificarea problemei Nr. 2677 168

— Rectificarea problemei Nr. 2678 168

— Rectificări în articolul din Nr. 9 și 10 200

VI. PROBLEME PROPUSE ȘI REZOLVATE.

Numărul din coloana 1) arată numărul problemei propuse, cel din coloana 2) pagina la care a fost propusă, cel din coloana 3) volumul în care a fost propusă și cel din coloana 4) pagina la care a fost rezolvată în volumul XXVI. Problemelor care nu au nimic în coloana 4), nu li s'a publicat încă soluția.

1).	2).	3).	4).
69	142	I	
110	14	II	25
121	30	„	
185	126	„	
194	142	„	
217	185	„	
275	94	III	
291	126	„	
317	174	„	
345	30	IV	
376	94	„	
382	110	„	
411	158	„	
424	191	„	72
435	13	V	
450	46	„	
460	62	„	39
516	174	„	
519	190	„	
535	30	VI	
562	78	„	
569	94	„	26
606	174	„	
608	174	„	
616	190	„	
622	22	VII	
635	54	„	160
654	102	„	
668	134	„	
695	190	„	
762	126	VIII	
766	126	„	
769	142	VIII	
772	142	„	
860	108	IX	
867	122	„	
879	144	„	
924	60	X	
954	108	„	
971	132	„	
971 bis	132	„	72
984	12	XI	
992	24	„	
1012	48	„	
1060	120	„	139
1068	132	„	
1077	138	„	
1093	24	XII	
1107	48	„	
1115	60	„	
1116	60	„	140
1119	60	„	
1126	72	„	140
1129	84	„	
1133	84	„	
1134	84	„	161
1140	96	„	
1146	108	„	
1149	108	„	
1156	120	„	
1157	120	„	
1158	120	„	
1160	120	„	
1163	132	„	

1).	2).	3).	4).
1166	132	XII	
1167	132	„	
1173	138	„	
1183	12	XIII	
1187	24	„	
1188	24	„	87
1198	36	„	
1205	48	„	
1206	48	„	
1213	60	„	
1216	60	„	
1218	72	„	
1219	72	„	
1220	72	„	
1223	72	„	
1224	72	„	
1225	84	„	
1228	84	„	
1229	84	„	
1234	96	„	
1236	96	„	
1243	108	„	
1245	108	„	118
1248	120	„	
1250	120	„	
1253	120	„	
1258	132	„	
1262	132	„	
1268	141	„	
1270	141	„	
1272	12	XIV	
1275	12	„	
1289	40	„	
1295	40	„	
1306	64	„	
1307	64	„	
1308	64	„	
1309	64	„	
1311	64	„	54
1315	76	„	
1319	76	„	
1323	88	„	
1327	88	„	
1331	100	„	
1333	100	„	
1341	112	„	
1349	124	„	
1350	124	„	
1351	124	„	
1354	136	„	
1357	136	„	
1363	148	„	
1364	148	XIV	
1365	148	„	
1370	12	XV	
1377	24	„	
1378	24	„	
1379	24	„	100
1380	24	„	
1385	36	„	
1386	36	„	
1389	36	„	55
1390	36	„	
1391	36	„	
1393	48	„	
1395	48	„	
1396	48	„	
1405	60	„	40
1413	72	„	40
1414	72	„	55
1422	84	„	73
1423	84	„	
1427	96	„	73
1428	96	„	
1430	96	„	
1436	108	„	
1438	108	„	
1442	120	„	
1443	120	„	
1446	120	„	
1447	120	„	55
1450	132	„	
1460	144	„	
1461	144	„	
1472	28	XVI	
1474	28	„	
1475	28	„	
1478	28	„	
1482	40	„	
1483	40	„	
1485	40	„	
	36	XVIII	
1486	40	XVI	
1490	52	„	
1493	52	„	
1498	64	„	
1501	64	„	
1507	76	„	
1514	88	„	
1530	112	„	
1531	112	„	
1532	112	„	
1534	112	„	88
1542	124	„	
1545	124	XVI	
1547	136	„	
1548	136	„	
1553	136	„	
1557	148	„	
1558	148	„	
1560	148	„	
1563	12	XVII	
1564	12	„	
1566	12	„	
1571	24	„	111
1582	36	„	
1588	48	„	
1589	48	„	
1593	96	„	
1600	60	„	
1604	72	„	
1613	84	„	
1615	84	„	
1621	96	„	
1624	96	„	
1627	108	„	
1628	108	„	
1632	108	„	
1637	120	„	
1640	120	„	
1641	132	„	
1645	132	„	
1651	144	„	
1654	144	„	
1656	144	„	
1670	24	XVIII	
1671	24	„	
1672	24	„	
1676	36		
1678	36	„	
1679	36	„	
1685	48	„	
1686	48	„	
1687	48	„	
1695	60	„	
1706	84	„	
1709	84	„	
1711	84	„	
1715	96	„	101
1716	96	„	
1722	108	„	74
1724	108	„	
1725	108	„	
	120	„	
1726	108	„	
1728	120	„	
1733	120	XVIII	75
1737	136	„	
1739	136	„	
1740	136	„	
1742	136	„	
1744	149	„	
1747	149	„	
1755	16	XIX	
1756	16	„	10
1759	16	„	
1762	28	„	
1764	28	„	
1767	28	„	
1769	40	„	
1772	40	„	
1780	56	„	
1781	56	„	
1789	80	„	56
1792	124	„	
1795	124	„	
1796	124	„	
1798	124	„	
1801	136	„	
1802	136	„	
1803	136	„	
1805	136	„	
1806	136	„	
1808	136	„	
1809	156	„	
1812	156	„	
1813	156	„	
1814	156	„	
1816	156	„	
1820	169	„	
1822	169	„	
1824	169	„	
	16	XX	
1832	16	„	
1838	28	„	
1841	28	„	
1842	44	„	
1843	44	„	
1847	44	„	
1849	44	„	
1852	56	„	
1853	56	„	
1857	56	„	
1860	68	„	
1861	68	„	
1868	80	„	
1873	80	„	

1).	2)	3).	4).
1877	92	XX	176
1878	92	„	141
1881	92	„	
1882	104	„	
1886	104	„	
1889	104	„	
1893	116	„	
1894	116	„	
1897	116	„	
1898	128	„	
1901	128	„	
1903	128	„	
1905	128	„	
1908	140	„	
1909	140	„	
1910	140	„	
1917	157	„	
1919	157	„	
1920	157	„	
1921	157	„	
1922	12	XXI	
1925	12	„	40
1926	12	„	
1930	12	„	
1932	24	„	
1935	24	„	
1937	24	„	
1938	36	„	
1940	36	„	
1941	36	„	
1942	36	„	
1943	36	„	
1944	36	„	
1945	36	„	
1950	48	„	
1952	48	„	
1953	48	„	41
1954	64	„	
1957	64	„	
1958	64	„	
1961	64	„	
1963	76	„	10
1964	76	„	
1965	76	„	
1966	76	„	
1967	76	„	
1968	76	„	
1971	88	„	
1972	88	„	
1973	88	„	
1974	88	„	
1975	88	„	
1976	88	„	
1977	88	„	

1).	2).	3).	4)
1982	100	XXI	
1983	100	„	
1984	100	„	
1986	112	„	
1989	112	„	
1990	112	„	
1995	124	„	
2000	124	„	
2001	124	„	
2003	136	„	
2004	136	„	
2009	136	„	
2012	148	„	
2015	148	„	
2016	148	„	
2017	148	„	
2018	16	XXII	
2019	16	„	
2022	16	„	
2024	16	„	
2025	16	„	
2026	30	„	
2027	30	„	
2032	30	„	
2033	30	„	
2035	42	„	
2039	42	„	
2040	42	„	
2042	54	„	
2046	54	„	
2047	54	„	
2048	54	„	
2049	54	„	
2050	66	„	
2051	66	„	
2053	66	„	
2055	66	„	
2056	66	„	
2058	78	„	
2062	78	„	
2063	78	„	
2064	78	„	
2065	78	„	
2073	90	„	
2074	102	„	
2078	102	„	
2080	102	„	
2087	114	„	88
2090	126	„	
2093	126	„	
2094	126	„	89
2095	126	„	

1).	2).	3).	4).
2096	126	XXII	
2099	138	„	
2100	138	„	75
2102	138	„	
2103	138	„	89
2104	138	„	199
2108	150	„	
2110	150	„	161
2111	150	„	
2117	12	XXIII	
2118	12	„	
	66	XXVI	
2119	12	XXIII	
2121	12	„	162
2126	26	„	118
2127	26	„	
2128	26	„	
2129	26	„	102
2133	38	„	
2134	38	„	
2135	38	„	162
2136	38	„	
2137	38	„	103
2140	50	„	
2142	50	„	
2143	50	„	
2147	62	„	
2149	62	„	
2153	62	„	
2158	74	„	142
2159	74	„	
2165	86	„	
2166	86	„	
2167	86	„	
2179	110	„	
2180	110	„	
2183	110	„	
2184	110	„	
2189	122	„	142
2193	122	„	
2194	134	„	
2195	134	„	
2199	134	„	
2200	134	„	
2201	134	„	
2202	146	„	103
2204	146	„	
2205	146	„	
2206	146	„	
2208	146	„	
2210	11	XXIV	
2211	11	„	

1).	2).	3).	4).
2215	11	XXIV	
2218	26	„	
2219	26	„	
2220	26	„	
2221	26	„	
2222	26	„	
2223	26	„	
2224	26	„	
2229	38	„	
2230	38	„	
2234	50	„	
2235	50	„	
2238	50	„	57
2239	50	„	
2248	62	„	
2251	74	„	
2254	74	„	
2255	74	„	
2258	86	„	
2259	86	„	
2261	86	„	
2262	86	„	
2266	98	„	
2268	98	„	
2271	98	„	
1274	110	„	
2275	110	„	
2276	110	„	
2277	110	„	
2278	110	„	
2280	110	„	
2281	122	„	
2282	122	„	105
2283	122	„	
2286	122	„	
2287	122	„	
2291	134	„	
2292	134	„	
2294	134	„	
2295	134	„	
2297	146	„	
2301	146	„	
2303	146	„	
2306	11	XXV	26
2307	11	„	
2308	11	„	
2314	26	„	
2315	26	„	
2316	26	„	58
2317	26	„	
2321	38	„	
2322	38	„	
2323	38	„	
2224	38	„	

1).	2).	3).	4).
2325	38	XXV	
2326	38	„	
2327	38	„	91
2328	38	„	
2329	50	„	
2330	50	„	
2331	50	„	27
2333	50	„	
2334	50	„	
2336	50	„	
2340	62	„	
2341	62	„	
2343	62	„	
2344	62	„	
2346	74	„	
2348	74	„	
2349	74	„	
2351	74	„	
2354	86	„	
2356	86	„	
2358	86	„	
2361	98	„	10
2362	98	„	
	66	XXVI	
2365	98	XXV	
2368	98	„	
2369	110	„	
2370	110	„	
2372	110	„	11
2373	110	„	
2374	110	„	
2375	110	„	
2376	110	„	
2377	121	„	
2378	121	„	
2382	122	„	
2385	122	„	
2386	134	„	
2387	134	„	27
2392	134	„	
2394	146	„	
2397	146	„	11
2398	146	„	
2402	11	XXVI	
2414	26	„	
2415	26	„	
2417	26	„	42
2421	38	„	163
2422	38	„	
2425	38	„	
2426	50	„	163

1).	2).	3)	4)
2428	50	XXVI	44
2434	66	„	
2436	66	„	
2440	76	„	119
2441	76	„	
2442	76	„	44
2444	76	„	45
2445	76	„	
2446	76	„	58
2448	88	„	
2449	88	„	119
2451	88	„	12
2455	88	„	120
2457	100	„	
2461	100	„	
2463	100	„	
2464	116	„	
2465	116	„	
24 7	116	„	75
2468	116	„	
2470	116	„	
2471	116	„	
2472	128	„	
2474	128	„	59
2477	128	„	28
2478	128	„	190
2479	128	„	
2481	144	„	190
2482	144	„	
2483	144	„	164
2484	144	„	177
2485	144	„	
2486	144	„	95
2487	144	„	
2489	156	„	
2491	156	„	42
2493	156	„	
2494	156	„	
2495	156	„	191
2496	11	XXVII	
2500	11	„	
2502	11	„	106
2503	11	„	
2504	26	„	60
2507	26	„	143
2510	26	„	76
2511	26	„	
2514	38	„	191
2515	38	„	76
2516	38	„	91
2517	38	„	61
2518	38	„	143

1).	2).	3).	4).
2520	38	XXVII	
2521	50	„	62
2523	50	„	77
2524	50	„	78
2525	50	„	
2526	50	„	
2527	50	„	
2528	50	„	
2529	66	„	121
2530	66	„	45
2531	66	„	93
2532	66	„	177
2533	66	„	121
2534	66	„	
2536	66	„	
2537	78	„	28
2538	78	„	177
2539	78	„	
2540	78	„	
2541	78	„	
2542	78	„	
2543	78	„	
2544	78	„	13
2545	78	„	144
2546	90	„	62
2547	90	„	78
2548	90	„	29
2551	90	„	62
2552	90	„	178
2553	90	„	31
2554	90	„	63
2555	102	„	15
2556	102	„	189
2557	102	„	
2558	102		
2559	102	„	
2560	102	„	144
2561	102	„	
2562	102	„	
2563	118	„	
2564	118	„	31
2566	118	„	179
2667	118	„	
2568	118	„	46
2569	118	„	
2570	118	„	
2571	130	„	15
2572	130	„	
2573	130	„	
2574	130	„	15
2575	130	„	
2576	130	„	
2577	130	„	

1)	2).	
2578	130	
2579	154	1
2580	154	47
2581	154	122
2582	154	
2583	154	„
2584	154	„
2585	154	„ 193
2586	154	„
2587	171	„ 123
2588	171	„ 189
2589	171	„
2590	171	„ 123
2591	171	„
2592	171	„
2593	171	„ 47
2594	171	„
2595	16	XXVIII
2596	16	„ 63
2597	16	„ 145
2598	16	„ 125
2599	16	„ 94
2600	16	„
2601	16	„ 63
2602	16	„ 180
2603	16	„ 125
2604	16	„ 126
2605	32	„
2606	32	„ 78
2607	32	„ 181
2608	32	„ 79
2609	32	„
2610	32	„
2611	32	„ 166
2612	32	„ 95
2613	32	„ 79
2614	32	„ 127
2615	48	„
2616	48	„ 195
2617	48	„ 127
2618	48	„ 195
2619	48	„ 107
2620	48	„
2621	48	„ 196
2622	48	„ 166
2623	48	„
2624	48	„
2625	64	„ 197
2626	64	„
2627	64	„ 145
2628	64	„
2629	64	„ 146
2630	64	„ 146
2631	64	„

1).	2).	3).	4).
2632 .	64 .	„	167
2633 .	64 .	„	181
2634 .	64 .	„	
2635 .	80 .	„	
2636 .	80 .	„	147
2637 .	80 .	„	167
2638 .	80 .	„	
2639 .	80 .	„	
2640 .	80 .	„	
2641 .	80 .	„	
2642 .	80 .	„	
2643 .	80 .	„	
2644 .	80 .	„	
2645 .	95 .	„	
2646 .	96 .	„	197
2647 .	96 .	„	
2648 .	96 .	„	182
2649 .	96 .	„	
2650 .	96 .	„	198
2651 .	96 .	„	
2652 .	96 .	„	

1).	2).	3).	4).
2653 .	96	XXVIII	182
2654 .	96 .	„	
	199 .	„	
2655 .	111 .	„	
2656 .	111 .	„	
2657 .	111 .	„	
2658 .	111 .	„	
2659 .	112 .	„	183
2660 .	112 .	„	
2661 .	112 .	„	
2662 .	112 .	„	
2663 .	112 .	„	
2664 .	112 .	„	183
2665 .	128 .	„	
2666 .	128 .	„	
2667 .	128 .	„	189
2668 .	128 .	„	
2669 .	128 .	„	
2670 .	128 .	„	
2671 .	128 .	„	
2672 .	128 .	„	

1).	2).	3).	4).
2673 .	128 .	XXVIII	
2674 .	128 .	„	
2675 .	148 .	„	
2676 .	148 .	„	
2677 .	148 .	„	
2678 .	148 .	„	
2679 .	148 .	„	
2680 .	148 .	„	
2681 .	148 .	„	
2682 .	148 .	„	
2683 .	148 .	„	
2684 .	148 .	„	
2685 .	168 .	„	
2686 .	168 .	„	
2687 .	168 .	„	
2688 .	168 .	„	
2689 .	168 .	„	
2690 .	168 .	„	
2691 .	168 .	„	
2692 .	168 .	„	
2693 .	168 .	„	

1).	2).	3).	4).
2694 .	168 .	XXVIII	
2695 .	183 .	„	
2696 .	184 .	„	
2697 .	184 .	„	
2698 .	184 .	„	
2699 .	184 .	„	
2700 .	184 .	„	
2701 .	184 .	„	
2702 .	184 .	„	
2703 .	184 .	„	
2704 .	184 .	„	
2705 .	199 .	„	
2706 .	199 .	„	
2707 .	200 .	„	
2708 .	200 .	„	
2709 .	200 .	„	
2710 .	200 .	„	
2711 .	200 .	„	
2712 .	200 .	„	
2713 .	200 .	„	
2714 .	200 .	„	

TABLOUL NUMELOR*)

Abel 38.
Abramescu N. 12, 87, 113, 115.
Adam M. 176.
Alaci V. 1, 2, 9. 16, 17, 21, 29, 32, 33, 38, 43, 48, 49, 64, 65, 76, 77, 80, 81, 86, 87, 93, 96 97, 102, 106, 107, 113, 128, 133, 148, 153, 159, 162, 164, 168, 179, 179, 180, 181, 181, 185, 193, 200.
Alasia C. 33, 34, 36.
Aldea V. M. 57.
Alexa M. 31, 47, 62, 78, 123, 166, 179, 180.
Amau V. C. 41.
Amărăsteanu F. M. 40, 55, 56.
Anastasiade I. 1.
Andrievicii N. 40, 55.
Andronescu Pl. 1.
Andrunachievici V. 40, 74.
Angheluță Th. 1, 54, 82, 163, 195.
Aniţescu N. N. 1. 75.
Anton I. 103, 105, 162, 163.
Antoniu V. E. 141.
Antoniu I. S. 24, 39, 72, 100.
Apollonius 34.
Apostol R. 40, 74, 88.
Arghiriade E. 1, 5, 70, 78, 87, 113, 118, 177.
Arnăutu G. M. 58.
Arserescu I. 40.
Asan I. 78.
Aubert 100.
Avram G. 115.

Bădescu R. 1, 39, 54.
Baidaff B. I. 1, 139.
Bakony C. 1.
Bakony C. 40, 55, 56, 57, 142, 176.
Bal L. 40.
Bălă V. C. 15, 31, 47, 63, 77, 93, 123, 148, 167, 177, 180, 182,
Bălăuță M. 31, 127, 145, 146, 148, 167, 180, 181, 182, 183, 190.
Bănărescu M. I.
Banciu G. 15, 31, 77, 145.
Bandler 195.
Barbilian 188.
Barbu P. S. 168.
Barbul V. V. 15, 16, 46, 63, 77, 93, 102.
Bărbulescu F. 54.
Bărglăzan A. 1.
Bandler D. 48.
Baumgartner I. I. 55.
Bejenaru V. 40, 55.
Benet R. W. 24.
Beşchea M. 58.
Beşchea R. 12, 43, 44.
Beu D. 180.
Birănaş T. I. 58, 105, 162, 163.
Bitang A. 90, 162.
Blaga O. 44, 63, 93, 123.
Boerescu P. G. 96, 112, 182, 183.
Bodea I. 105.
Bogoevici N. 63, 79, 94, 127, 147, 166, 168, 177, 178, 179, 184, 199.
Bogza M. 40, 44, 55. 58
Bolcaş V. 102, 162, 163.
Boldescu P. 139.
Bonea I. 1
Bosie B. 102.
Bota I. V. 15, 63, 145, 180.
Botea E. 24
Botez M. 1. 40, 54, 55, 87.
Bouanchon 147.
Bouwkamp J. C. 24
Brasch A. 162, 163.
Braşoveanu G. 105
Breazu M. 15, 21, 31. 47, 62, 63, 79, 95, 125, 127, 144. 145, 146, 147, 148, 166, 167, 168, 179, 180, 181, 182, 183, 195, 196, 197, 198.
Brocard H. 6, 33, 34, 36, 126, 171, 173, 174.
Bu ur N. V. 55.
Budeanu C. 168.
Buiclin G. 1, 10, 11, 12, 16, 24, 26, 27, 32, 44, 45, 48, 58, 60, 61, 62, 63, 64, 80, 88, 91, 103, 105, 106, 112, 128, 142, 143, 144, 148, 168, 183, 190, 200.
Bunescu D. A. 39.

Călniceanu C. 1, 87.
Câmpianu F. 176.

*) Numerele care urmează după nume, arată paginile în care se găsesc publicate numele.

Cândea C. 1.
Cândea M. V. 31. 93.
Cănescu T. 29.
Cantill I. V. 16.
Cârciu I. 42, 60, 61, 77, 120, 166
Cătuneanu C. 1.
Cauchy 23.
Cavallaro G. V. 33, 36, 100, 171, 173.
Cazanacli V. P. 40, 55, 56, 118.
Ceaușescu V. 88.
Cernătescu I. D. 25.
Cernescu A. N. 44
Chesaru P. C. 58, 163.
Chintescu M. M. 57.
Chioreanu I. 78, 93.
Chiriac C. 1, 43, 44, 58, 90, 102, 103, 105, 119, 162, 163.
Chiriac I. 78.
Chirvai I. V. 40.
Cioară A. 15. 29, 31, 45, 46, 47, 61, 62, 63, 76, 77, 78, 94, 107, 123, 166, 177, 178, 179, 181.
Ciobanu I. 47, 123.
Ciobanu V. 1.
Cioca I. I. 15, 46, 78, 93, 180.
Cinescu P. 29, 43, 59, 60, 62, 63, 77, 63, 77, 93, 119, 120, 121, 166.
Ciorănescu N. 54, 87, 113.
Claudian V. 1, 72, 160, 190.
Coandă I. V. 140.
Coatu G. 42, 148, 198.
Cocoș G. 76.
Cojocaru M. N 140.
Colesnic D. 90.
Coman A. 1, 72.
Comberousse Ch 17, 33.
Constantinescu G. G. 1, 72, 160, 176, 182, 197.
Constantinescu I. G. 29, 30, 62, 120, 133, 166, 167.
Constantinescu N. I. 11, 16, 24, 28, 30, 58, 62, 90, 99, 125, 160, 162, 163, 175, 184.
Constantinescu G. V. 120, 121, 190.
Constantinescu C. V. 40, 43, 44, 56, 59, 60.
Conta V. 160.
Corduneanu C. 13, 44, 76, 163.
Cosman A. 161.
Coșniță C. 1, 7, 80, 96, 139, 140, 190, 198.
Costăchescu V. C. 1, 63, 80, 96, 97-103, 190.
Costea F, 102.
Costin Alexandrina 27.
Cotariu M. 102, 105, 143, 160 162, 163,
Coțiu G. A 27, 31, 46, 47, 60, 63, 77, 90, 93, 145, 148, 166, 178, 179, 180, 195.
Crăcea D 43.
Crăciun Silvia 30, 62, 107, 178.
Crăciunescu V. 45, 76, 166.
Creța F. G. 90.
Cristea I. N. 40, 57.
Cristescu V. 51, 126, 140, 144, 189.
Cunningham 71.
Curea I. 1.

Dănescu A. 44, 45.
Darboux 190.
Dăscălescu H. 1, 55, 75, 77, 101, 102,
Dăscălescu M. 44
David V. 162, 176.
De Sabata I. 15, 29, 31, 47, 63, 64, 76, 77, 84, 95, 107, 123, 127, 144, 145, 146, 148, 166, 167, 180, 182, 183.
Deiculescu D. G. 40.
Deutsch E. 15, 31, 32, 44, 47, 48, 57, 59, 61, 63, 64, 77, 78, 79, 80, 87, 89, 93, 94, 95, 107, 112, 121, 123, 125, 126, 127, 128, 145, 146, 147, 148, 161, 166, 167, 176, 177, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 190, 195, 197, 198, 199, 200.
Deleanu I. A. 94, 95, 127, 166, 167, 183, 197.
Diaconu G. V. 43, 119, 121.
Dimitriu G. 1.
Dimitriu D. I. 106.
Dimitriu A. P. 40.
Dincă I. N. 31.
Dobrescu A. 121.
Dobrescu Filofteia 39.
Dobrișan A. A. 58.
Dobrotescu M. G. 162.
Dodu A. E. 62, 63, 78, 94, 123, 125, 145, 168, 179, 180, 181, 183, 190, 198.
Domide M. 1.
Drăghici I. 79, 95, 127, 166, 183.
Dragomir A. 57.
Dumitrescu G. 1, 32, 48, 64, 95, 146, 196.

Enache I. 120.
Enăchescu G. 40, 57.
Enăchescu I. 62, 74.
Eratostene 138.
Erdélyi I. 180, 195.
Euler 2, 5, 6, 7, 18, 70, 76, 99, 115, 172.

F. G. M. 95.
Feuerbach 184.
Filimon I. 45
Filip A. 180, 197.
Fleșeriu E. 166.
Florescu L. L. 40, 73.
Florescu V. 40, 55, 56, 74.
Florian D. C. 105.
Focșeneanu M. I. 5, 186.
Funth Carmen 31, 47, 94.

Gârlișteanu El. 15, 31, 47. 63, 64.
Găzdău I. M. 47, 95, 179, 183.
Geier A. 183, 190.
Georgescu H. 58.
Georgescu N. 163.
Georgescu-Roegen N. 24, 54, 95, 102, 149,
Georgian N. N. 62.
Gergonne 140.
Gertler N. R. 45, 127, 148, 167, 183.
Gheorghiev. G. 176.
Gheorghiu A. 72, 160
Gheorghiu Th. Gh. 1, 10, 13, 15, 16, 17, 22, 26, 28, 29, 31, 32, 33, 39, 40, 41, 45, 46, 47, 48, 49, 51, 55, 56, 57, 61, 62, 63, 64, 65, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 88, 89, 93, 95, 96, 97, 113, 118, 119, 200.
120, 121, 122, 123, 125, 126, 127, 128, 133, 140, 141, 142, 145, 146, 147, 148, 158, 161, 162, 163, 167, 168, 169, 176, 179, 182, 183.
Gheorghiu M. 72.
Gheorghiu C. O. 90.
Gheorghiu Ș. 24, 87, 176.
Gheorghiu V. 1.
Gherlan I. V. 15, 30, 31, 42, 44, 46, 47, 62, 63, 64, 76, 77, 78, 79, 80, 94, 95, 107, 120. 121, 123, 127, 145, 166, 176, 177, 178, 179, 180, 181.
Ghermănescu M. 5, 6, 7, 8, 16, 32, 40, 41, 48, 57, 58, 80, 87, 96, 102, 128, 148, 168, 184, 199.
Ghersch P. 166.
Gheţu E. 43.
Ghiriș I. 48, 180
Ghițescu S. 1.
Gheţescu V. 1. 29, 32, 75, 79, 178.
Giurconiu M. G. 11, 15, 29, 31, 44, 45, 58, 60, 63, 76, 78, 93, 105, 119, 123, 162, 163, 166, 177, 179, 180 197.
Gligor N. S. 27, 90, 102, 176
Gloden A. 1, 72, 99, 101, 102.
Godea I. 162.
Godeanu V 40, 55.
Goga F. I. 120, 142.
Goldiș G. 162.
Gongu T. 31, 77, 180.
Gottard F. 58.
Grigore T. V. 72.
Groza L. 163.
Grozescu L. 42, 142, 162, 163.
Grumăzescu M. 73.

Harct R. 43, 44, 60, 76, 95.
Haret S. R. 28, 190.
Hartmann S. 24.
Hendli N. M. 10, 162.
Herman C. 40.
Herman V. 1, 55, 74.
Hollinger A. 114, 117.
Hompola T. 55.
Honae C. 87.
Hoppenot 71.
Hurezeanu M. R. 15, 16, 31, 42, 77, 78, 93, 123, 180.

Iacob S. E. 1, 31, 76, 144.
Iacob C. 190.
Iancu S. 60.
Iancu-Biss P. H. 1.
Ionescu-Bujor C. 1, 18, 74.
Ionescu D. 88.
Ionescu D. V. 1, 40.
Ionescu F. P. 40, 55, 163.
Ionescu-Țiu. D. C. 1, 27, 61, 64, 80, 96, 128, 138, 143, 144, 148, 167, 168, 184, 199.
Ionescn V. 163.
Iosifescu C. 162.
Iovănel C. 93, 177.
Iuga G. 81.
Ivănescu C. 1, 139, 140, 141, 161.

Jarnik M. V. 24.
Jidanu I. C. 40, 55, 56, 73.

Kiepert 7, 37.
King R. 24.
Kinsky I. 90, 142, 163, 190.
Kivu C. M. 40.
Knopf H. 161.

Lagrange 124.
Labrouse 186, 188.
Laguerre 138, 139.
Lalescu T. 163.
Lapi S. 33.
Lăpuşanu V. 15.
Latea C. P. 87, 139, 140, 141.
Laţiu E. 39.
Laţiu V. 1.
Lăzărescu S. 40.
Lemoine 6, 7, 36, 171, 174.
Lenz N. F. 63, 180.
Liteanu G. 1, 72.
Longchemps 8.
Loziciu I. 1, 40, 48, 90, 166.
Lungu A. I. 167, 180, 183.
Lupan A. 1.
Lupescu C. 176.

Macavei A. E. 58.
Maclaurin 37, 157.
Madelena Alice 58.
Mahrenholz I. 41, 102, 103, 162.
Maior N. 1.
Mal ţa M. 103, 162.
Man I. 15. 29, 31, 44, 62, 63, 64, 95, 123, 126, 166.
Man I. O. 42, 60, 77, 94, 107, 180.
Mănescu I. 43, 45, 59, 60, 121.
Mang Ileana 176.
Manoilă D. 127, 166, 167, 183, 197, 199.
Manolache Elena 40.
Manolache M. 162.
Manolescu G. 11, 29, 43,58,59,76, 95,191.
Manolescu V. G. 119, 166.
Măran A. 103, 163.
Mărcuş F. 72, 176.
Mărcuţiu P. S. 45, 60, 166, 193.
Marczewski E. 24.
Mardan D. 1.
Margulius M. 26, 140, 161,
Marian V. 176.
Marica I. H. 40, 55.
Marin-Gall P. T. 40.
Marinescu S. D. 45, 76, 77, 78, 123, 179.
Marinescu E. E. 24.
Marinescu P. 113, 115.
Marţian V. M. 40.
Mateescu S. 1, 87.
Matei D. D. 40, 55, 56.
Mateiu A. 1.
Mătieş V. S. 1, 10.
Mayer O. 176.
Mazilu M. 162.
Mehedinţi D. D. 88, 141.
Melenti S. 55.
Meteş M. 58.
Miclea N. 105, 163.
Middleton D. 25.
Mihăileanu N. N. 1. 17, 87, 88, 139, 140, 141, 159, 161, 200.
Mihăilescu C. C. 31, 79, 123, 199.
Mihăilescu D. 179.
Mihăilescu C. V. 95.
Mihalcea N. N. 181
Mihalcea V. V. 40.
Mihoc N. O. 10.
Milea E. 55.
Milu I. N. 48.
Mioc V. 1.
Miquel 161.
Mirescu P. 1.
Mitric A. 58.
Moessner A. 62.
Moisă I. G. 40, 55.
Moise I. P. 162.
Moisil G. 5.
Moisovici M. S. 40, 56.
Moldovean M. 76.
Monge G. 10, 87.
Morega V. T. 15, 29, 31, 61, 63. 76, 77.
Moreno H. 77.
Müller M. R. 174.
Munteanu G. 15, 62, 62, 77, 145.
Munteanu I. 59.
Munteanu T. I. 13, 44
Munteanu L. 162.
Murariu P. 1.
Murgu V. M. 55.
Murgulescu Elena 1.
Murgulescu G. I. 1, 39. 87.
Musta Ş. 1.
Muţiu A. 162, 163.
Myller A. 176.

Nadaşan S. 1.
Nadolshi V. 176.
Naneş Cornelia 40, 54, 55.
Nannei M. 174.
Neaeşu V. 127, 189, 200.
Nedelcu F. 80, 112, 128, 183, 184.
Negrea A. M. 40, 55, 56, 74, 101.
Neguţ A. I. 15, 16, 29, 31, 42, 62, 63, 77, 78, 93, 121, 123, 125, 145, 167, 177, 180, 193, 195.
Negulescu D. S. 40.
Nemeth I. 1, 91.
Nemoianu C. 47, 79, 93. 107, 127, 166, 180.
Neuberg J. 33, 34.
Neumann Maria 16, 18, 27, 46, 59, 91, 118, 139, 148, 163, 168, 176, 197.
Nicoară M. 79, 94, 95, 123.
Nicolescu C. 40.
Nicolau A. 1.
Nicolau P. 1.
Niculescu A. 5, 6, 72, 190.
Niewenglowski B. 117.
Nosarenwska M. 24.
Novac I. A. 58. 93, 102. 180.
Novac I. I. 12. 15, 28, 29, 31, 40, 43, 44, 45, 46, 55, 56, 59. 60, 62, 63, 76, 77, 78, 89, 93, 95, 119, 121, 144, 145, 162, 163, 177, 178, 179 191.

Ollenschi I. 1.
Oprea G. 162.
Oroş M. 63, 87. 94.

Păduret A. V. 40. 55.
Pălăceanu D. V. 162.
Pali S. 90, 121.
Panabucdjian K. 40, 55.
Panait C. M. 141.
Panaitescu S. C. G. 118.
Pantea N. A. 15, 16, 29, 31, 42, 44, 46, 47, 61. 62, 63, 76, 77, 78, 79, 94, 107, 120, 121, 123, 180, 195.
Pantaziu 190.
Papelier 100.
Pasăre I. M. 40.
Păsarin G. 15, 29, 31, 61, 63, 76, 77, 94.
Pâslariu V. V. 88, 140, 141.
Patriciu V. 1.
Petcu A. V. 29, 31, 47, 62, 63, 64, 79, 123, 127, 146, 147, 148, 167, 182, 183, 184, 190, 195, 197. 200.
Păunescu S. G. 15, 31, 63, 78, 79, 93, 94, 128, 144, 167, 180, 181, 183,
Petrescu A. 1.
Petrescu An. 40.
Petrulian N. 39.
Pilatte 172
Pitagora 18.
Pisanca N. I. 15, 29, 31, 42, 47, 62, 63, 64, 77, 93, 96, 120, 123, 126, 127, 180, 181, 197.
Poboran V. 1.
Podraczky V. 58.
Poenaru G. 166.
Pompeiu D. 65, 80, 98, 147.
Popa B. I. 141, 176.
Popa D. V. 11, 28, 44, 58, 113.
Popa F. P. 15, 29, 31, 47, 62, 63, 78, 123, 195, 197.
Popa G. 31, 42.
Popa N. 40.
Popa P. 107. 145, 180.
Popa S. 76, 78, 94, 107.
Popescu A. 88, 118.
Popescu D. 89, 163.
Popescu I. 1.
Popescu I. B. 105.
Popescu N. C. 57.
Popescu I. G. 10, 139.
Popescu M. S. 40, 55.
Popescu S. 78.
Popescu Văleni I. 1.
Popovici N. C. 127.
Popovici P. C. 147, 167, 184, 197, 199.
Popovici T. I. 72, 176.
Porumb N. 1.
Postelnicescu C. M. 40, 55, 73, 88, 101.
Potlog A. 87.
Predoescu M. T. 161.
Propst I. 1.
Predoescu I. M. 40.
Protopopescu I. 160.
Ptolomeu 183.
Pupăzan G. 55.
Purcea M. I. 15, 30, 31, 45, 46, 47, 62, 63, 64, 76, 78, 79, 93, 94, 95, 121,

123, 125, 126, 127, 142, 145, 146, 147, 148, 162, 163, 166, 176, 179, 180, 182, 193, 197.

Radu C. 146, 148, 166, 167, 168, 181, 182, 183, 195, 199.
Radu S. C. 63, 64, 95, 125, 147.
Radu D. 15, 31. 62.
Radoslav G. I. 142. 176.
Rădulescu G. O. 40.
Răduleț R. 1, 87.
Râmboiu N. S. 44, 93, 177.
Râmniceanu C. 26.
Răutan I. 72.
Rațiu M. 31, 78, 93, 123, 125, 179, 180.
Receanu M. C. 55.
Riesz M. 24.
Ristea G. 93.
Rizescu I. 100, 115, 116, 117.
Roibu T. 123, 145
Rolle 41, 113, 114, 115.
Roman I. C. 10, 15, 16, 31, 32, 42, 45, 47, 62, 63, 76, 77, 123, 127, 145, 180.
Roșca Ș. V. 161.
Rosenberg I. 40, 55.
Roth R. E. 1, 117.
Rothenstein B. 142.
Rouchè E. 17, 33.
Rucăreanu N. 72.

Săbău G. 90.
Săbău M. 103, 162.
Sabata I. 42, 62, 94, 196.
Salem R. 24.
Sâmbotin G. 40, 55, 73, 88, 101.
Sândulescu I. 141.
Sârbu I. 15, 77.
Săruleșteanu I. E. 40, 56.
Sauciuc L. 1.
Savin M. 55.
Schächter E. 179.
Schileriu I. 1, 28.
Schiomink N. H. 31, 123.
Scodreanu Al. 100
Scondăcescu M. 15.
Secară M. D. 40.
Sechel T. M. 40.
Sefeate A. 15.
Seracin E. 31, 63, 76, 79, 93, 95, 107, 123, 183.
Șerengău M. 43, 163.
Sergescu P. 1, 10.
Sierpinski W. 24.
Silaș G. 26, 145, 177, 178, 195, 196, 197, 198, 199.
Simcso C. 102.
Simion L. 31, 47, 63, 76, 78, 93, 107, 123, 177, 180.
Simionescu D. G. 1, 190.
Simionescu S. 95.
Simion 70, 183.
Șipoș E. 75, 118, 162.
Snow S. R. 25.
Soare S. 102, 162.
Soare V. M. 66, 76, 78, 79, 95, 125, 127, 143, 146, 148, 162, 163, 167, 168, 179, 181.
Soporean E. 180.
Sorean E. 93.
Spătaru A. 75.
Spiru Haret 100.
Stamate I. I. 2, 48, 127, 176.
Stan A. 2.
Stan D. 39.
Stan P. 13, 43, 44, 76.
Stăncescu C. 2, 94.
Stanciu D. 93.
Stanciu O. 43.
Stanciu P. 162.
Stancu D. D. 15, 16, 29, 31, 45, 47, 61, 62, 77, 78, 120.
Stănescu D. C. 15, 29, 31, 47, 62, 94, 119, 1 1, 123.
Stănescu M. E. 161.
Stănilă D G. B. 15, 16, 43, 45, 59, 62, 76, 77, 123, 144, 166, 179, 180.
Stefănescu C. 40.
Ștefănescu D. N. 40, 55, 101.
Ștefănescu E. 26.
Ștefănescu F. M. 90, 162.
Ștefănescu I. S. 42.
Steiner 33, 34, 35, 37, 70, 187, 188.
Steinhaus H. 24.
Stevenson F. A. 24.
Stoen scu A. 100.
Stoenescu D. M. 40.
Stoian M. D. 40.
Stoica N. D. 101.
Stoicescu L. 2
Stretea A. 90, 162.
Sturm 178.
Șubac G. I. 88.
Süli M. 88, 141, 161.
Șuța I. M. 15, 29, 31, 47, 62.
Szabo V. T. 105.
Székely I. G. 45, 47, 93, 77, 145, 180.

Tămășescu V. 77, 129, 180.
Tancu P. 10.
Țarălungă D. 56.
Târaș V. 72.
Târcomnicu D. C. 40, 119.
Tarry 37.
Tarța V. 163.
Târu M. 63.
Teodorescu C. C. 39, 160.
Teodorescu M. D. 40.
Teodorescu P. P. 11, 13, 15, 16, 23, 24, 27, 28, 31, 32, 43, 44, 45, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 76, 77, 78, 93, 95, 107, 118, 120, 121, 122, 126, 128, 143, 144, 146, 163, 168, 177, 178, 179, 190, 191, 200.
Teodorescu P. T. 91, 166.
Teodosiu A. 2.
Terezevski A. 162.
Terquen 6, 7, 8,
Thébault V. 10, 39, 54, 55, 163, 173, 184.
Tibăr A. 15, 29, 31, 47, 123, 148, 183. 197, 198.
Țigănescu T. 141.
Țigănoiu A. 162, 163.
Tilică C. S. 26, 176.
Tincu C. C. 40, 43, 55, 56, 58, 59, 90, 102. 103, 105, 119, 120, 162, 163.
Țino O. 2, 54, 72, 95, 177.
Țintariu E. D, 31, 62.
Țițeica 141.
Țițeica G, 17. 87. 90, 100, 160.
Țițeica I. I. 88. 101.
Toderasc V. 123.
Toderașcu I. V. 29. 77. 78, 93.
Toma N. N. 40.
Toscano L. 174, 176.
Trifu N. 94.
Trufin E. 2.
Turbuțiu G. 15, 31, 44, 47, 63, 77, 89, 145, 162, 167, 180.
Turcu V. 2.
Tutor A. 162.

Văduva F. M. 176.
Văleovici V. 2, 39.
Văluța G. 87.
Vandermonde 139, 145, 174.
Vasiliu G. 40, 141.
Vasiliu-Loeben G. 140, 161.
Vasu V. 141, 148, 168.
Vesa V. 2.
Viciu A. 2.
Virgil G. 119.
Vișa E. 2, 15, 16, 32, 45, 48, 63, 64, 66, 70, 80, 96, 107, 117, 122, 123, 128, 133, 134, 145, 153. 164, 166, 190, 191, 195.
Vlad I. V, 2.
Vladea I. 72.
Vlădescn I. 2.
Vlăduț C. 58.

Weber M. 89.
Wegener E. 40, 42, 55, 56, 57, 74, 75, 78, 88, 89, 102, 103, 122, 124, 142, 143, 161, 162, 163.
Weinstein A. 25.
Wigh J. 90.
Winternitz T. W. 24
Woodall 71, 72.
Wroclaw 24.

Zagaican I. 40, 55, 56, 72, 73.
Zăgănescu I. 2.
Zănescu L. 167, 183.
Zapan G. 2.
Zarankiewitz K. 24
Zbârcea I. I. 31, 77, 180.
Zbegan V. 2.
Zelingher N. 25, 76, 107.

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 1 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Bălăuţă Mihai (P; 1198, 2487, 2673, 2677, 2679, 2680, 2683, 2686, 2687); *Bogoevici Nicolae* (P; 2256, 2654, 2678, 2682, 2687, 2688, 2690, 2691, 2692); *Cenuşen Leonida* (2628, 2680, 2681, 2691, 2692); *Coatu Gh* (P.); *Cocârlă Trandafir* (2680, 2691, 2692); *Constantineseu Gh.* (P; 2666, 2680); *Deutsch Em.* (P. 2308, 2503, 2616, 2667, 2668, 2672, 2680, 2681, 2683). *Drăghici Iosif* (P; 2557, 2618, 2634, 2648, 2670, 2678, 2679, 2681, 2682); *Drăgilă Simion* (2639); *Enescu Gh.* (P.); *Gertler Richard* (2599, 2660, 2664, 2666, 2667, 2580, 2683, 2687); *Manoilă Dan* (2691), 2692); *Mărgineanu Gh.* (2680); *Nedelcu Fl.* (P); *Nedelcu Mihai* (2596) *Nicodim Ştefan* (2652, 2659, 2680, 2683, 2691, 2692); *Păsărin Gh.* (2680, 2687); *Petcu Valeriu* (P); *Popovici C-tin* (2609, 2618. 2625, 2626, 2635, 2665, 2680, 2691, 2692); *Seracin Eugen* (2671. 2680, 2687. 2690, 2691, 2692, 2694); *Soare Mircea* (2678, 2679, 2680, 2688, 2691); *Şuta Mihai* (2523, 2626, 2628, 2635, 2655, 2675, 2678); *Teodorescu Petre* (P; 2687, 2689); *Zănescu Liviu* (2680, 2692).

INFORMAŢII

1. Nu se publică în revistă decât manuscrise dela abonaţi.

2. Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol, trebuesc scrise citeţ (în special iscălitura) numai pe o parte a hârtiei. Probleme propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor, iar cele rezolvate, de enunţ. Nu sunt luate în considerare probleme rezolvate iscălite de mai mulţi corespondenţi. Problemele rezolvate vor fi redactate îndependent una de alta, şi nu în continuare.

3. Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

4. Numele colaboratorilor dela cari s'au primit soluţii la problemele publicate în acest număr şi care au sosit la redacţie după data de 15 a lunei precedente, nu mai pot fi trecute în corpul revistei Numele lor este însă menţionat pe copertă împreună cu numărul problemei rezolvate.

5. Rugăm pe corespondenţii noştrii la orice schimbare de adresă sau lipsă din localitate fără a avea pe cineva să le primească revista, să ne anunţe din vreme. În caz contrar revista ne vine înapoi şi cu regret anunţăm că a doua oară nu o mai putem expedia. Mai mult, se suspendă expedierea numerelor următoare până ce abonatul va reclama aceste numere.

6. Aducem la cunoştinţa corespondenţii noştrii care ne trimit *probleme propuse* că ele trebue să fie cât mai *originale*, în sensul de a nu a fi asemănătoare cu cele publicate în ultimul timp.

7. Se pot procura din vol. XXVIII numere izolate trimiţând la Administraţie suma de lei 32 de fiecare.

8. *Tartia Cornel* (Cluj). Cu părere de rău vă comunicăm că v'am trimes revista pe adresa indicată de Dv şi deci nu vă mai putem trimite altele decât contra cost.

ANALIZA INFINITEZIMALĂ (tipărit)
de Prof. V. ALACI
Vol. I: CALCULUL DIFERENŢIAL, 295 lei.
Vol. II: CALCULUL INTEGRAL . 410 lei.
(plus chetueli de transport).
A se adresa la: Cooperativa „VICTORIA" Secţia Studenţească. Bulevardul 6 Martie No. 8, Timişoara IV.

Abonamentul pentru Volumul XXIX, este de 300 lei. Taxa de membru este 200 lei. Rugăm, trimiteţi cât mai urgent aceste sume pentru ca să nu întrerupem trimiterea revistei.

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

REVISTA MATEMATICĂ DIN TIMIȘOARA – VOL. XXVIII.

5 lei